

الرياضيات المتقطعة

DISCRETE MATHEMATICS

الدكتـــور
روحي ابراهيم الخطيب




دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo

بسم الله الرحمن الرحيم

الرياضيات المتقطعة

DISCRETE MATHEMATICS

رقــــــم التصـــــنيف : 513

المؤلف ومن هو في حكمه : روحي ابراهيم الخطيب

عنـــــوان الكـــــتاب : الرياضيات المتقطعة

رقــــــم الإيـــــداع : 2013/8/2809

الـــــواصــــفـــــات : العمليات الحسابية/ الرياضيات

بــيانـــــات الـــنشـــر : عمان - دار المسيرة للنشر والتوزيع

تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعــة الأولــى 2014م – 1435هـ



شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه

عنوان الدار

الرئيسي : عمان - العبدلي - مقابل البنك العربي هاتف : 5627049 6 962+ فاكس : 5627059 6 962+

الفرع : عمان - ساحة المسجد الحسيني - سوق البتراء هاتف : 4640950 6 962+ فاكس : 4617640 6 962+

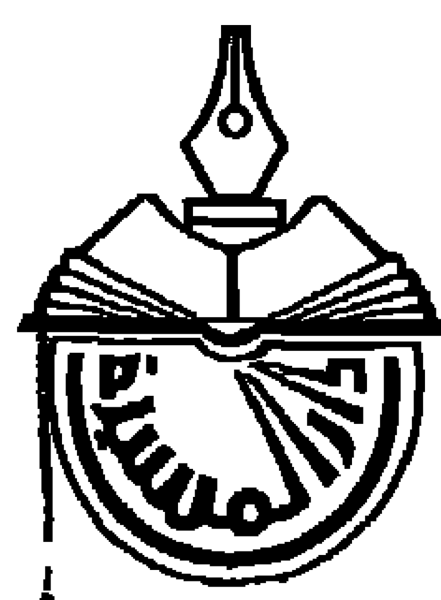
صندوق بريد 7218 عمان - 11118 الأردن

E-mail: Info@massira.jo . Website: www.massira.jo

الرياضيات المتقطعة

DISCRETE MATHEMATICS

الدكتـــور
روحي ابـراهيم الخطيب



الفهرس

المقدمة.. 9

الفصل الأول

أنظمة الأعداد

(1-1) تمثيل الأعداد الصحيحة 13
(1-2) تحويل العدد الصحيح 19
(1-3) تحويل الأعداد بالصيغة العامة 28
(1-4) العمليات الحسابية في النظام الثنائي................................52
(1-5) العمليات الحسابية في النظام الثماني 70
(1-6) العمليات الحسابية في النظام السداسي عشر................................79
(1-7) تمثيل العدد الثنائي داخل الحاسوب 84
(1-8) جمع وطرح الأعداد الثنائية بإستعمال المكمل الأول................................92
(1-9) جمع وطرح الأعداد الثنائية بإستعمال المكمل الثاني 103
(1-10) ضرب الأعداد في النظام الثنائي بإستخدام إسلوب الإزاحة 116
تمارين 122

الفصل الثاني

المنطق الرياضي

(2-1) الجمل المنطقية 137
(2-2) أدوات الربط 139
(2-3) الجمل الصحيحة والمتناقضة................................147

(2-4) البراهين الرياضية 157
(2-5) المحاورات 171
(2-6) الجمل المفتوحة 173
(2-7) دوائر المفاتيح الكهربائية 178
تمارين 184

الفصل الثالث

المجموعات

(3-1) المجموعات (الفئات) 197
(3-2) المجموعة الشاملة 203
(3-3) إتحاد المجموعات 210
(3-4) تقاطع المجموعات 214
(3-5) الفرق بين مجموعتين 224
(3-6) الفرق التناظري بين مجموعتين 227
(3-7) حاصل الضرب الكارتيزي 231
تمارين 235

الفصل الرابع

العلاقات

(4-1) العلاقة الثنائية 245
(4-2) تمثيل العلاقات 252
(4-3) أنواع العلاقات 256
(4-3-1) علاقة التركيب 256
(4-3-2) العلاقة الإنعكاسية 259
(4-3-3) العلاقة التناظرية 261
(4-3-4) العلاقة المتعدية 264

(4-3-5) العلاقة التخالفية 267
(4-3-6) علاقة التكافؤ 269
تمارين 281

الفصل الخامس

الدوال

(5-1) الدوال.. 289
(5-2) الصورة والصورة العكسية.. 298
(5-3) العمليات الحسابية على الدوال.. 307
(5-4) تركيب الدوال 309
(5-5) أنواع الدوال.. 312
(5-5-1) الدالة المتباينة 312
(5-5-2) الدالة الشاملة 320
(5-5-3) الدالة المتقابلة.. 326
تمارين 340

الفصل السادس

الجبر البولياني

(6-1) علاقة الترتيب 347
(6-2) العناصر الشهيرة في المجموعة المرتبة 359
(6-3) الشبكة.. 365
(6-4) الجبر البولياني 379
(6-5) الدوال البوليانية 388
(6-6) الدوائر المنطقية 397
(6-7) خرائط كارنوف.. 411
تمارين 438

الفصل السابع

طرق العد

(7-1) مبادئ العد.. 449
(7-2) التباديل.. 454
(7-3) التوافيق.. 459
(7-4) نظرية ذات الحدين.. 464
(7-5) مبدأ برج الحمام.. 469
تمارين.. 474

الفصل الثامن

المخططات

(8-1) تعاريف أساسية.. 479
(8-2) تشاكل مخططين.. 501
(8-3) العمليات على المخططات.. 503
(8-4) المسارات والدارات.. 517
(8-5) مسارات ودارات أويلر.. 532
(8-6) مسارات ودارات هاملتون.. 538
(8-7) تمثيل المخططات بالمصفوفات.. 548
(8-8) المخططات المستوية.. 563
(8-9) الأشجار.. 577
(8-10) الأشجار ذات الجذور.. 583
(8-11) الأشجار الثنائية المرتبة.. 596
تمارين.. 603
المراجع.. 625

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم والحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد الخلق اجمعين ، سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى اله وصحبه والتابعين بإحسان إلى يوم الدين؛ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ ﷺ: " إِنْ قَامَتْ السَّاعَةُ وَبِيَدِ أَحَدِكُمْ فَسِيلَةٌ ، فَإِنْ اسْتَطَاعَ أَنْ لَا يَقُومَ حَتَّى يَغْرِسَهَا ، فَلْيَفْعَلْ " ومن هذا المبدأ أقدم هذا العمل متمنيا أن يجعله الله عز وجل خالصا لنور وجهه الكريم.... أما بعد؛

يعتبر هذا الكتاب منهج علمي دراسي لمقرر الرياضيات المتقطعة والبعض يطلق علية الرياضيات المنفصلة أو الهياكل المتقطعة أو الهياكل المنفصلة أو المنطق والمجموعات أو رياضيات الحاسوب وأين كان المسمى فإن هذا المقرر يدرس لطلاب السنوات الأولى الجامعية لكي يمهد طريق معرفة الرياضيات لطلابنا الجدد في كليات العلوم والهندسة والتربية والحاسبات، لذا حاولت أن أقدم المواضيع بطريقة علمية مبسطة كمحاضرات تتناسب مع هذه المرحلة الدراسية مع إعطاء مجموعة كبيرة جدا من التمارين المحلولة التي تساعد الطالب في فهم أعمق للموضوع المعروض وطبعا يسبق ذلك عرض التعريفات بطريقة سهلة مباشرة ثم النظريات التي تحكم الموضوع وكلها تقريبا بالبرهان.
ويحتوي هذا الكتاب على ثمان فصول وهي:

الفصل الأول: خصص هذا الفصل لعرض الخلفيات الأساسية لأنظمة الأعداد ويحتوي على تمثيل الأعداد الصحيحة – تحويل العدد الصحيح – تحويل الأعداد بالصيغة العامة – العمليات الحسابية في النظام الثنائي – العمليات الحسابية في النظام الثماني – العمليات الحسابية في النظام السادس عشر – تمثيل العدد الثنائي داخل الحاسوب – جمع وطرح الأعداد الثنائية بإستعمال المكمل الأول – جمع وطرح الأعداد الثنائية باستعمال المكمل الثاني – ضرب الأعداد في النظام الثنائي باستخدام أسلوب الإزاحة.

الفصل الثاني: خصص هذا الفصل لدراسة المنطق الرياضي وذلك من خلال دراسة:

الجمل المنطقية – أدوات الربط – الجمل الصحيحة والمتناقضة – البراهين الرياضية– المحاورات– الجمل المفتوحة– دوائر المفاتيح الكهربائية.

الفصل الثالث: خصص هذا الفصل لدراسة المجموعات وذلك من خلال دراسة: المجموعات (الفئات)- المجموعة الشاملة - إتحاد المجموعات - تقاطع المجموعات - الفرق بين مجموعتين – الفرق التناظري بين مجموعتين – حاصل الضرب الكارتيزي.

الفصل الرابع: خصص هذا الفصل لدراسة العلاقات وذلك من خلال دراسة: العلاقة الثنائية - تمثيل العلاقات - أنواع العلاقات - علاقة التركيب – العلاقة الإنعكاسية- العلاقة التناظرية – العلاقة المتعدية – العلاقة التخالفية – علاقة التكافؤ.

الفصل الخامس: خصص هذا الفصل لدراسة الدوال وذلك من خلال دراسة: الدوال – الصورة والصورة العكسية – تركيب الدوال – أنواع الدوال – الدالة المتباينة – الدالة الشاملة – الدالة المتقابلة .

الفصل السادس: خصص هذا الفصل لدراسة الجبر البولياني وذلك من خلال دراسة: علاقة الترتيب – العناصر الشهيرة في المجموعة المرتبة - الشبكة - الجبر البولياني – الدوال البوليانية– الدوائر المنطقية- خرائط كارنوف .

الفصل السابع: خصص هذا الفصل لدراسة طرق العد وذلك من خلال دراسة: مبادئ العد – التباديل – التوافيق - نظرية ذات الحدين – مبدأ برج الحمام .

الفصل الثامن: خصص هذا الفصل لدراسة المخططات وذلك من خلال دراسة: تعاريف أساسية - تشاكل مخططين – العمليات على المخططات – المسارات والدارات – مسارات ودارات أويلر– مسارات ودارات هاملتون- تمثيل المخططات بالمصفوفات- المخططات المستوية- الأشجار- الأشجار ذات الجذور- الأشجار الثنائية المرتبة.

وأكرر لأبنائي الطلاب أن هذا المقرر يحتاج إلى بذل الجهد لكي يستفيد الطالب منه ويتفوق ويحقق مستوى علمي ورياضي عالي. وختاما فإنني أتوجه إلى الله بالثناء والحمد ثم بالشكر والعرفان لكل من ساعدني في إخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود ولله الحمد من قبل ومن بعد.

المؤلف

الفصل الأول

أنظمة الأعداد

Number Systems

(1-1) تمثيل الأعداد الصحيحة

(1-2) تحويل العدد الصحيح

(1-3) تحويل الأعداد بالصيغة العامة

(1-4) العمليات الحسابية في النظام الثنائي

(1-5) العمليات الحسابية في النظام الثماني

(1-6) العمليات الحسابية في النظام السداسي عشر

(1-7) تمثيل العدد الثنائي داخل الحاسوب

(1-8) جمع وطرح الأعداد الثنائية بإستعمال المكمل الأول

(1-9) جمع وطرح الأعداد الثنائية بإستعمال المكمل الثاني

(1-10) ضرب الأعداد في النظام الثنائي بإستخدام إسلوب الإزاحة

تمارين

الفصل الأول

أنظمة الأعداد

(1-1) تمثيل الأعداد الصحيحة Representation of integers

لقد إستخدم الإنسان في تاريخه الطويل أنظمة عددية مختلفة ساهمت في تطوير الرياضيات وسهلت علية إجراء العمليات الحسابية المختلفة وكان من أهم وأشهر هذه الأنظمة العددية:

1. النظام العشري Decimal System

وهذا النظام يستخدم الرموز (الأرقام) أو الأعداد digits {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8} وله الأساس Base يساوي 10 حيث أن الأساس لأي نظام عددي يساوي عدد الرموز المختلفة المستخدمة في هذا النظام.

2. النظام الثنائي Binary System

وهذا النظام يستخدم الرموز{0,1}وله الأساس يساوي 2 ومن الجدير بالذكر أن النظام الثنائي هو النظام المستخدم في أجهزة الحاسبات الحالية حيث يتم تحويل الأعداد {0, 1} إلى إشارات كهربائية على هيئة 1 يعني on بينما 0 تعني off .

3. النظام الثماني Octal System

وهذا النظام يستخدم الرموز {0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7} وله الأساس يساوي 8 .

4. النظام السادس عشر Hexadecimal System

وهذا النظام يستخدم الرموز {0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F} حيث $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$ وله الأساس يساوي 16.

ملاحظات:

1. النظام العددي هو عبارة عن عدد الرموز أو الأرقام التي يتكون منها النظام وهذه الأرقام التي يتكون منها النظام تبدأ من الصفر وتنتهي بأساس النظام ناقص واحد.

2. في هذا الجزء يجب نتتبه جيداً لكلمة العدد وكلمة الرقم فالعدد يتكون من مجموعة من الأرقام المرتبة من اليمين إلى اليسار وبالتالي في العدد 257 يعني الرقم الأول هو 7 والرقم الثاني هو 5 والرقم الثالث 2 وقد نستعمل كلمة خانة بدلاً من رقم.
3. أي عدد صحيح أكبر من الواحد الصحيح يصلح بأن يمثل أساس للنظام العددي والنظرية التالية تثبت ذلك:

نظرية (1-1-1) : إذا كان B عدد صحيح أكبر من الواحد الصحيح فإن أي عدد صحيح موجب N يمكن أن يكتب بطريقة وحيدة على الصورة:

$$N = a_m B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \cdots + a_2 B^2 + a_1 B + a_0$$

حيث:

$$0 \le a_i < B, \qquad a_m \ne 0$$

البرهان:

أولا: إثبات الوجود

بإستخدام خوارزمية القسمة نقسم العدد N على العدد B فنحصل على:

$$N = q_1 B + a_0,\ 0 \le a_0 < B \ldots\ldots (1)$$

فإذا كانت $q_1 \ge B$ فإننا بإستخدام خوارزمية القسمة نقسم العدد q_1 على العدد B فنحصل على:

$$q_1 = q_2 B + a_1,\ 0 \le a_1 < B \ldots\ldots (2)$$

من (2) نعوض في (1) فنحصل على:

$$N = (q_2 B + a_1)B + a_0 = q_2 B^2 + a_1 B + a_0, \qquad q_1 > q_2$$

وبإتباع هذا الأسلوب نحصل في المرحلة m على:

$$a_{m-1} = q_m B + a_{m-1}, \qquad 0 \le a_{m-1} < B$$

حيث:

$$q_1 > q_2 > \cdots > q_m \ge 0$$

وهي متتالية متناقصة ستصل إلى مرحلة نهائية يكون فيها $q_m < B$ عندئذ يكون فيها $a_m = q_m$ وبذلك نحصل على:

$$N = a_m B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \cdots + a_2 B^2 + a_1 B + a_0$$

حيث:

$$0 \le a_i < B, \qquad a_m \ne 0$$

ثانيا: إثبات الوحدانية

نفرض أن:

$N = a_m B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \cdots + a_2 B^2 + a_1 B + a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$N = b_m B^m + b_{m-1} B^{m-1} + \cdots + b_2 B^2 + b_1 B + b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

حيث:

$0 \le a_i < B, \quad a_m \ne 0, \quad 0 \le b_i < B, \quad b_m \ne 0$

بطرح (4) من (3) نحصل على:

$0 = (a_m - b_m)B^m + (a_{m-1} - b_{m-1})B^{m-1} + \cdots + (a_1 - b_1)B +$
$(a_0 - b_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

وبوضع:

$B^0 = e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),$
$B^1 = e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),$
$B^2 = e_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0),$
$\vdots$
$B^m = e_{m+1} = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$

ومن الجبر الخطي فإن المجموعة $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}\}$ تمثل أساس للفضاء الخطي R^{m+1} وبالتالي فهذه المجموعة مستقلة خطيا فإن المعادلة (5) تعطينا:

$a_m - b_m = 0, a_{m-1} - b_{m-1} = 0, \ldots, a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0$

إذن:

$a_m = b_m, \quad a_{m-1} = b_{m-1}, \quad \ldots, a_1 = b_1, \quad a_0 = b_0$

إذن التمثيل (3) = التمثيل (4).

إذن التمثيل وحيد.

ملاحظات:

1. إذا كتب العدد الصحيح بالصيغة

$N = a_m B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \cdots + a_2 B^2 + a_1 B + a_0$

حيث B يمثل الأساس فإن الصيغة السابقة تسمى قيمة العدد N وفي هذه الحالة نكتب العدد بالصورة $(a_m \ldots a_2 a_1 a_0)_B$ وأما إذا كانت B=10 فإن النظام العددي المستخدم هو

عبارة عن النظام العشري وفي هذه الحالة العدد N يكتب مباشرة بالصورة $a_m \dots a_2 a_1 a_0$ وبالتالي نسمي $a_0 B^0 = a_0$ الأحاد.

و $a_1 B^1 = a_1 \times 10$ العشرات.

و $a_2 B^2 = a_2 \times 100$ المئات.

و $a_3 B^3 = a_3 \times 1000$ ألوف.

وبالتالي العدد N = أحاد + عشرات + مئات + ألوف + عشرات الألوف + مئات الألوف +...

2. يمكننا وضع الجدول التالي للربط ما بين النظام العشري والثنائي والثماني والسادس عشر كما يلي:

النظام العشري	النظام الثنائي	النظام الثماني	النظام السادس عشر
0	0000	000	0
1	0001	001	1
2	0010	002	2
3	0011	003	3
4	0100	004	4
5	0101	005	5
6	0110	006	6
7	0111	007	7
8	1000	010	8
9	1001	011	9
10	1010	012	A
11	1011	013	B
12	1100	014	C
13	1101	015	D
14	1110	016	E
15	1111	017	F

3. لتسهيل الحسابات:

$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, \dots$

$8^0 = 1, 8^1 = 8, 8^2 = 64, 8^3 = 512, 8^4 = 4094, 8^5 = 32768, 8^6 = 262144, \dots$

$16^0 = 1, 16^1 = 16, 16^2 = 256, 16^3 = 4096, 16^4 = 65536, 16^5$
$= 1048576, 16^6 = 16777216, \ldots$

مثال: أوجد تحليل العدد العشري $(1234)_{10}$ طبقا لقيم مواضعه.

الحل:

الموضع	0	1	2	3
قيم المواضع	$(10)^0$ 1	$(10)^1$ 10	$(10)^2$ 100	$(10)^3$ 1000
العدد	4	3	2	1

$$1234 = 1 \times (10)^3 + 2 \times (10)^2 + 3 \times (10)^1 + 4 \times (10)^0$$
$$= 1000 + 200 + 30 + 4$$

مثال: حول العدد الثنائي $(100100)_2$ إلى النظام العشري؟

الحل:

الموضع	0	1	2	3	4	5
قيم المواضع	2^0 1	2^1 2	2^2 4	2^3 8	2^4 16	2^5 32
العدد	0	0	1	0	0	1

$$(100100)_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
$$= 32 + 0 + 4 + 0 + 0 = 36$$

مثال: إكتب العدد $(11101)_2$ بالنظام العشري؟

الحل:

$$(11101)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29$$

مثال: إكتب العدد $(100101)_2$ بالنظام العشري؟

الحل:

$$(100101)_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 = 37$$

مثال: حول العدد الثماني $(554)_8$ إلى النظام العشري؟

الحل:

الموضع	0	1	2
قيم المواضع	8^0 1	8^1 8	8^2 64
العدد	4	5	5

$4 \times 1 = 4$

$5 \times 8 = 40$

$5 \times 64 = 320$

إذن بالجمع لحصل على:

$$(554)_8 = 364$$

مثال: إكتب العدد $(1257)_8$ بالنظام العشري؟

الحل:

$$(1257)_8 = 1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$
$$= 512 + 128 + 40 + 7 = 687$$

مثال: إكتب العدد $(130)_8$ بالنظام العشري؟

الحل:

$$(130)_8 = 1 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 0 \times 8^0$$
$$= 64 + 24 + 0 = 88$$

مثال: حول العدد السادس عشر $(16C)_{16}$ إلى النظام العشري؟

الحل:

الموضع	0	1	2
قيم المواضع	16^0 1	16^1 16	16^2 256
العدد	C	6	1

$12 \times 1 = 12$

$6 \times 16 = 96$

$1 \times 256 = 256$

إذن بالجمع نحصل على:

$(16C)_{16} = 364$

مثال: إكتب العدد $(3AF)_{16}$ بالنظام العشري؟

الحل:

$$(3AF)_{16} = 3 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0$$
$$= 768 + 160 + 15 = 943$$

مثال: إكتب العدد $(150BE)_{16}$ بالنظام العشري؟

الحل:

$$(150BE)_{16} = 1 \times 16^4 + 5 \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 14 \times 16^0$$
$$= 65536 + 20480 + 0 + 176 + 14 = 86206$$

(1-2) تحويل العدد الصحيح

لتحويل العدد الصحيح N من نظام عددي إلى نظام عددي أخر سوف يكون لدينا الحالات الأتية:

(1-2-1) تحويل العدد الصحيح من النظام العشري إلى النظام الثنائي

لتحويل العدد الصحيح N من النظام العشري إلى النظام الثنائي فإننا نقسم العدد N على 2 فنحصل على العدد الصحيح q_1 ويكون باقي القسمة هو العدد a_0 حيث $0 \leq a_0 < 2$ فإذا كانت $q_1 \geq 2$ فإننا نقسم العدد q_1 على 2 فنحصل على العدد الصحيح q_2 ويكون باقي القسمة هو العدد a_1 حيث $0 \leq a_1 < 2$.

ونستمر هكذا حتى يكون ناتج القسمة $q_m = 0$ وبالتالي فإن مجموعة بواقي القسمة تشكل العدد بواسطة نظام الأعداد الثنائية.

مثال: حول العدد 35 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم
2^0	1	17	2	35
2^1	1	8	2	17
2^2	0	4	2	8
2^3	0	2	2	4
2^4	0	1	2	2
2^5	1	0	2	1

إذن:

$35 = (100011)_2$

مثال: حول العدد 29 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
29	2	14	1	2^0
14	2	7	0	2^1
7	2	3	1	2^2
3	2	1	1	2^3
1	2	0	1	2^4

إذن:

$29 = (11101)_2$

مثال: حول العدد العشري 36 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
36	2	18	0	2^0
18	2	9	0	2^1
9	2	4	1	2^2
4	2	2	0	2^3
2	2	1	0	2^4
1	2	0	1	2^5

إذن:

$36 = (100100)_2$

مثال: حول العدد العشري 364 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
364	2	182	0	2^0
182	2	91	0	2^1
91	2	45	1	2^2
45	2	22	1	2^3
22	2	11	0	2^4
11	2	5	1	2^5
5	2	2	1	2^6
2	2	1	0	2^7
1	2	0	1	2^8

إذن:

$364 = (101101100)_2$

(1-2-2) تحويل العدد الصحيح من النظام العشري إلى النظام الثماني

لتحويل العدد الصحيح N من النظام العشري إلى النظام الثماني فإننا نقسم العدد N على 8 فنحصل على العدد الصحيح q_1 ويكون باقي القسمة هو العدد a_0 حيث $0 \le a_0 < 8$ فإذا كانت $q_1 \ge 8$ فإننا نقسم العدد q_1 على 8 فنحصل على العدد الصحيح q_2 ويكون باقي القسمة هو العدد a_1 حيث $0 \le a_1 < 8$.

ونستمر هكذا حتى يكون ناتج القسمة $q_m = 0$ وبالتالي فإن مجموعة بواقي القسمة تشكل العدد بواسطة نظام الأعداد الثماني.

مثال: حول العدد 250 إلى النظام الثماني؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
250	8	31	2	8^0
31	8	7	7	8^1
3	8	3	3	8^2

إذن:

$250 = (372)_8$

مثال: حول العدد 1989 إلى النظام الثماني؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
1989	8	248	5	8^0
248	8	31	0	8^1
31	8	3	7	8^2
3	8	0	3	8^3

إذن:

$1989 = (3705)_8$

مثال: حول العدد العشري36 إلى النظام الثماني؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
36	8	4	4	8^0
4	8	0	4	8^1

إذن:

$36 = (44)_8$

مثال: حول العدد العشري 364 إلى النظام الثماني؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
364	8	45	4	8^0
45	8	5	5	8^1
5	8	0	5	8^2

إذن:

$364 = (554)_8$

(1-2-3) تحويل العدد الصحيح من النظام العشري إلى النظام السادس عشر

لتحويل العدد الصحيح N من النظام العشري إلى النظام السادس عشر فإننا نقسم العدد N على 16 فنحصل على العدد الصحيح q_1 ويكون باقي القسمة هو العدد a_0 حيث

$0 \le a_0 < 16$ فإذا كانت $q_1 \ge 16$ فإننا نقسم العدد q_1 على 16 فنحصل على العدد الصحيح q_2 ويكون باقي القسمة هو العدد a_1 حيث $0 \le a_1 < 16$.

ونستمر هكذا حتى يكون ناتج القسمة $q_m = 0$ وبالتالي فإن مجموعة بواقي القسمة تشكل العدد بواسطة نظام الأعداد السادس عشر.

مثال: حول العدد 1989 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
1989	16	124	5	16^0
124	16	7	C=12	16^1
7	16	0	7	16^2

إذن:

$1989 = (7C5)_{16}$

مثال: حول العدد 283 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
283	16	17	11=B	16^0
17	16	1	1	16^1
1	16	0	1	16^2

إذن:

$1989 = (11B)_{16}$

مثال: حول العدد 125 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

المقسوم	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
125	16	7	13=D	16^0
7	16	0	7	16^1

إذن:

$125 = (7D)_{16}$

مثال: حول العدد العشري36 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم
16^0	4	2	16	36
16^1	2	0	16	2

إذن:

$36 = (24)_{16}$

مثال: حول العدد العشري 364 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم
16^0	12 = C	22	16	364
16^1	6	1	16	22
16^2	1	0	16	1

إذن:

$364 = (16C)_{16}$

(1-2-4) تحويل العدد الصحيح من النظام الثنائي إلى النظام الثماني والعكس

لتحويل العدد الصحيح N من النظام الثنائي إلى النظام الثماني فإن كل ثلاث مواقع للعدد الثنائي تقابل موقع واحد للعدد الثماني حيث:

ثنائي			ثماني
2^0	2^1	2^2	
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	2
1	1	0	3
0	0	1	4
1	0	1	5
0	1	1	6
1	1	1	7

وبالتالي للتحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني فإننا نأخذ كل ثلاثة مواضع ثنائية معا ونستبدلها بقيمة واحده من النظام الثماني مع مراعاة البدأ من اليمين إلى اليسار.

وللتحويل من النظام الثماني إلى النظام الثنائي فإننا نأخذ كل عدد ثماني ونستبدلة بثلاث خانات من النظام الثنائي مع مراعاة البدأ من اليمين إلى اليسار.

مثال: حول العدد $(11111000101)_2$ إلى النظام الثماني.

الحل:

العدد الثنائي	101	000	111	011
العدد الثماني	5	0	7	3

إذن:

$(11111000101)_2 = (3705)_8$

مثال: حول العدد $(3705)_8$ إلى النظام الثنائي.

الحل:

العدد الثماني	5	3	2
العدد الثنائي	101	011	010

إذن:

$(235)_8 = (10011101)_2$

مثال: حول العدد الثماني $(554)_8$ إلى النظام الثنائي؟

الحل:

العدد الثماني	4	5	5
العدد الثنائي	100	101	101

إذن:

$(554)_8 = (101101100)_2$

مثال: حول العدد الثنائي $(101101100)_2$ إلى النظام الثماني؟

الحل:

ثنائي	100	101	101
ثماني	4	5	5

إذن:

$(101101100)_2 = (554)_8$

(5-2-1) تحويل العدد الصحيح من النظام الثنائي إلى النظام السادس عشر والعكس

لتحويل العدد الصحيح N من النظام الثنائي إلى النظام السادس عشر فإن كل أربع مواقع للعدد الثنائي تقابل موقع واحد للعدد السادس عشر حيث:

سادس عشر	ثنائي			
	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A = 10	1	0	1	0
B = 11	1	0	1	1
C = 12	1	1	0	0
D = 13	1	1	0	1
E = 14	1	1	1	0
D = 15	1	1	1	1

وبالتالي للتحويل من النظام الثنائي إلى النظام السادس عشر فإننا نأخذ كل أربع مواضع ثنائية معا ونستبدلها بقيمة واحده من النظام السادس عشر مع مراعاة البدأ من اليمين إلى اليسار.

وللتحويل من النظام السادس عشر إلى النظام الثنائي فإننا نأخذ كل عدد سادس عشر ونستبدلة بأربع خانات من النظام الثنائي مع مراعاة البدأ من اليمين إلى اليسار.

مثال: حول العدد$(11111000101)_2$ إلى النظام السادس عشر.

الحل:

العدد الثنائي	0101	1100	0111
العدد السادس عشر	5	C	7

إذن:

$(11111000101)_2 = (7C5)_{16}$

مثال: حول العدد $(2F5)_{16}$ إلى النظام الثنائي.

الحل:

العدد السادس عشر	5	F	2
العدد الثنائي	0101	1111	0010

إذن:

$(2F5)_{16} = (1011110101)_2$

مثال: حول العدد السادس عشر $(16C)_{16}$ إلى النظام الثنائي؟

الحل:

العدد السادس عشر	C	6	1
العدد الثنائي	1100	0110	0001

إذن:

$(16C)_{16} = (101101100)_2$

مثال: حول العدد الثنائي $(101101100)_2$ إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

ثنائي	1100	0110	0001
سادس عشر	12 = C	6	1

إذن:

$(101101100)_2 = (16C)_{16}$

(1-2-6) تحويل العدد الصحيح من النظام الثماني إلى النظام السادس عشر والعكس

لتحويل العدد الصحيح N من النظام الثماني إلى النظام السادس عشر والعكس فإنه يلزمنا استخدام نظام وسيط للتحويل له أولاً وهذا النظام الوسيط أما أن يكون النظام العشري أو أن يكون النظام الثنائي.

مثال: حول العدد $(3705)_8$ إلى النظام السادس عشر.

الحل:

$$(3705)_8 = 3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 5 \times 8^0 = (1989)_{10} = (7C5)_{16}$$

مثال: حول العدد $(7D)_{16}$ إلى النظام الثماني.

الحل:

$$(7D)_{16} = (0111 \quad 1101)_2 = (001 \quad 111 \quad 101)_2 = (175)_8$$

مثال: حول العدد $(7C5)_{16}$ إلى النظام الثماني.

الحل:

$$(7C5)_{16} = (0111 \quad 1100 \quad 0101)_2 = (011 \quad 111 \quad 000 \quad 101)_2 = (3705)_8$$

(1-3) تحويل الأعداد بالصيغة العامة

لقد اقتصرت عمليات التحويل السابقة على الأعداد الصحيحة فقط والآن سوف نعمم هذه الحالات ولكن على عدد مكتوب بالصيغة العامة والمقصود بالصيغة العامة هو أن العدد N يتكون من جزء صحيح و جزء كسري ويفصل بينهما نقطة تسمى الفاصلة الكسرية وبالتالي فالجزء الكسري يكون يمين الفاصلة بينما الجزء الصحيح يقع يسار الفاصلة كما يلي:

$$N = (a_n \dots a_2 \, a_1 \, a_0 \, . \, a_{-1} \, a_{-2} \dots a_{-m})_B$$

حيث:

الجزء الصحيح هو: $a_0B^0 + a_1B^1 + a_2B^2 + \cdots + a_nB^n$

الجزء الكسري هو: $a_{-1}B^{-1} + a_{-2}B^{-2} + \cdots + a_{-m}B^{-m}$

(1-3-1) تحويل الأعداد إلى النظام العشري بالصيغة العامة

لتحويل العدد N في الصيغة العامة من النظام العددي الذي له الأساس B إلى النظام العشري فإننا نستخدم الصيغة التالية:

$$N = (a_n \dots a_2\, a_1\, a_0\, .\, a_{-1}\, a_{-2} \dots a_{-m})_B$$
$$= a_0B^0 + a_1B^1 + a_2B^2 + \dots + a_nB^n + a_{-1}B^{-1} + a_{-2}B^{-2} + \dots + a_{-m}B^{-m}$$

وبصورة عامة قيمة كل موضع تعتمد على أساس النظام مرفوعا لأس يناظر رتبة الموضع، وترتب المواضع من اليمين إلى اليسار تصاعديا ، بحيث تكون (أس) رتبة أول عدد على يسار العلامة العشرية هي (0) وعلى يمينها (1-)، وتكون قيمة العدد في النظام العشري (أو أي نظام عددي آخر) مساوية لمجموع حواصل ضرب الرقم في كل موضع في قيمة الموضع.

ملاحظات:

.1

النظام العشري الأساس = 10 الأرقام المستخدمة 0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9										
المواضع	...	-3	-2	-1	.	0	1	2	3	...
قيم المواضع	... ...	10^{-3} $\frac{1}{1000}$	10^{-2} $\frac{1}{100}$	10^{-1} $\frac{1}{10}$	. .	10^0 1	10^1 10	10^2 100	10^3 1000	... ...

2. في النظام العشري تكون قيمة الموضع هي 10^n وتأخذ صورتين وهما:

أ. قيمة المواضع للجزء الصحيح من العدد العشري وهي:

$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots\dots$

or 1 , 10 , 100 , 1000 ,......

ب. قيمة المواضع للكسر العشري وهي:

$10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots\dots$

or $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...

.3

المواضع	...	-3	-2	-1	.	0	1	2	3	...
قيم المواضع	...	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	.	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	...
	...	1/8	1/4	1/2	.	1	2	4	8	...

النظام الثنائي

الأساس = 2

الأرقام المستخدمة 0 , 1

4. في النظام الثنائي قيمة الموضع هي 2^n وتأخذ صورتين وهما:

أ. قيمة المواضع للجزء الصحيح من العدد الثنائي وهي:

$2^0 , 2^1, 2^2, 2^3,......$

or 1 , 2 , 4 , 8 ,......

ب. قيمة المواضع للكسر الثنائي وهي:

$2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, ...$

or $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,......

.5

النظام الثماني

الأساس = 8

الأرقام المستخدمة 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7

المواضع	...	-3	-2	-1	.	0	1	2	3	...
قيم المواضع	...	8^{-3}	8^{-2}	8^{-1}	.	8^{0}	8^{1}	8^{2}	8^{3}	...
	...	1/512	1/64	1/8	.	1	8	64	512	...

6. في النظام الثماني قيمة الموضع هي 8^n وتأخذ صورتين وهما:

أ. قيمة المواضع للجزء الصحيح من العدد الثماني وهي:

$8^0 , 8^1, 8^2, 8^3,......$

or 1 , 8 , 64 , 512 ,......

ب. قيمة المواضع للكسر الثماني وهي:

$8^{-1} , 8^{-2}, 8^{-3}, ...$

or $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{512}$,......

.7

النظام السادس عشر الأساس= 16 الأرقام المستخدمة 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F										
المواضع	...	-3	-2	-1	.	0	1	2	3	...
قيم المواضع	... ...	16^{-3} 1/4096	16^{-2} 1/256	16-1 1/16	. .	16^0 1	16^1 16	16^2 256	16^3 4096	... ...

8. في النظام السادس عشر قيمة الموضع هي 16^n وتأخذ صورتين وهما:

أ. قيمة المواضع للجزء الصحيح من العدد السادس عشر وهي:

$16^0, 16^1, 16^2, 16^3, \ldots\ldots$

or $1, 16, 256, 4096, \ldots\ldots$

ب. قيمة المواضع للكسر السادس عشر وهي:

$16^{-1}, 16^{-2}, 16^{-3}, \ldots\ldots$

or $\frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \frac{1}{4096}, \ldots\ldots$

مثال: أوجد تحليل العدد العشري $(1234.379)_{10}$ طبقا لقيم مواضعه.

الحل:

الموضع	-3	-2	-1	.	0	1	2	3
قيم المواضع	10^{-3} $\frac{1}{1000}$	10^{-2} $\frac{1}{100}$	10^{-1} $\frac{1}{10}$	.	10^0 1	10^1 10	10^2 100	10^3 1000
العدد	9	7	3	.	4	3	2	1

$$1234 = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$$

$$= 1000 + 200 + 30 + 4 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000}$$

$$= 1000 + 200 + 30 + 4 + 0.3 + 0.07 + 0.009$$

مثال: حول العدد الثنائي $(0.0101)_2$ إلى النظام العشري؟

الحل:

1	.	-1	-2	-3	-4	الموضع
2	. .	2^{-1} 1/2	2^{-2} 1/4	2^{-3} 1/8	2^{-4} 1/16	قيم المواضع
0	.	0	1	0	1	العدد

$1\times\frac{1}{16}=0.0625,\quad 0\times\frac{1}{8}=0.0,\quad 1\times\frac{1}{4}=0.25,\quad 0\times\frac{1}{2}=0.0,$
$0\times 2=0.0$

إذن بالجمع نحصل على:

$$(0.0101)_2=0\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}+0\times2^{-3}+1\times2^{-4}$$
$$=0+0+0.25+0+0.0625=0.3125$$

مثال: حول العدد الثنائي $(100100.0101)_2$ إلى النظام العشري؟

الحل:

5	4	3	2	1	0	.	-1	-2	-3	-4	الموضع
2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1	. .	2^{-1} 1/2	2^{-2} 1/4	2^{-3} 1/8	2^{-4} 1/16	قيم المواضع
1	0	0	1	0	0	.	0	1	0	1	العدد

$1\times\frac{1}{16}=0.0625$

$0\times\frac{1}{8}=0$

$1\times\frac{1}{4}=0.25$

$0\times\frac{1}{2}=0$

$0\times 1=0$

$0\times 2 = 0$

$1\times 4 = 4$

$0\times 8 = 0$

$0\times 16 = 0$

$1\times 32 = 32$

إذن بالجمع نحصل على:

$(100100.0101)_2$

$= 1\times \frac{1}{16} + 0\times \frac{1}{8} + 1\times \frac{1}{4} + 0\times \frac{1}{2} + 0\times 1$

$+ 0\times 2 + 1\times 4 + 0\times 8 + 0\times 16 + 1\times 32$

$= 0.0625 + 0 + 0.25 + 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 32 = 36.3125$

مثال : حول العدد الثنائي $(111101.101)_2$ إلى النظام العشري؟

الحل:

5	4	3	2	1	0	.	-1	-2	-3	الموضع
2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1	. .	2^{-1} 1/2	2^{-2} 1/4	2^{-3} 1/8	قيم المواضع
1	1	1	1	0	1	.	1	0	1	العدد

$1\times \frac{1}{8} = 0.125$

$0\times \frac{1}{4} = 0$

$1\times \frac{1}{2} = 0.5$

$1 \times 1 = 1$

$0 \times 2 = 0$

$1 \times 4 = 4$

$1 \times 8 = 8$

$1 \times 16 = 16$

$1 \times 32 = 32$

إذن بالجمع نحصل على:

$(111101.101)_2 = 61.625$

مثال: حول العدد $(1011.01)_2$ إلى النظام العشري.

الحل:

$$(1011.01)_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

$$= 1 + 2 + 0 + 8 + 0 + \frac{1}{4} = 11.25$$

مثال: حول العدد الثماني $(75.5)_8$ إلى النظام العشري؟

الحل:

1	0	.	-1	الموضع
8^1 8	8^0 1	. .	8^{-1} 1/8	قيم المواضع
7	5	.	5	العدد

حيث

$5 \times \frac{1}{8} = 0.625$

$5 \times 1 = 5$

$7 \times 8 = 56$

إذن بالجمع نحصل على:

$(75.5)_8 = 61.625$

مثال: حول العدد الثماني $(0.24)_8$ إلى النظام العشري؟

الحل:

.	-1	-2	الموضع
. .	8^{-1} 1/8	8^{-2} 1/64	قيم المواضع
.	2	4	العدد

$$4 \times \frac{1}{64} = 0.0625$$

$$2\times\frac{1}{8} = 0.25$$

إذن بالجمع نحصل على:

$$(0.24)_8 = 0.3125$$

مثال: حول العدد الثماني $(554.24)_8$ إلى النظام العشري؟

الحل:

2	1	0	.	-1	-1	الموضع
8^2 64	8^1 8	8^0 1	. .	8^{-1} 1/8	8^{-2} 1/64	قيم المواضع
5	5	4	.	2	4	العدد

$$4\times\frac{1}{64} = 0.0625$$

$$2\times\frac{1}{8} = 0.25$$

$4 \times 1 = 4$

$5 \times 8 = 40$

$5 \times 64 = 320$

إذن بالجمع نحصل على:

$$(554.24)_8 = 364.3125$$

مثال: حول العدد $(200.75)_8$ إلى النظام العشري.

الحل:

$$(200.75)_8 = 0 \times 8^0 + 0 \times 8^1 + 2 \times 8^2 + 7 \times 8^{-1} + 5 \times 8^{-2}$$

$$= 0 + 0 + 128 + \frac{7}{8} + \frac{5}{64} = 128.95$$

مثال: حول العدد السادس عشر $(0.B)_{16}$ إلى النظام العشري؟

الحل:

الموضع	-1	.
قيم المواضع	16^{-1} 1/16	. .
العدد	B	.

$$11 \times \frac{1}{16} = 0.6875$$

إذن:

$$(0.B)_{16} = 0.6875$$

مثال: حول العدد السادس عشر $(3D.A)_{16}$ إلى النظام العشري؟

الحل:

الموضع	-1	.	0	1
قيم المواضع	16^{-1} 1/16	. .	16^{0} 1	16^{1} 16
العدد	A	.	D	3

حيث:

$$10 \times \frac{1}{16} = 0.625$$

$$13 \times 1 = 13$$

$$3 \times 16 = 48$$

إذن بالجمع نحصل على:

$$(3D.A)_{16} = 61.625$$

مثال: حول العدد السادس عشر $(16C.B)_{16}$ إلى النظام العشري؟

الحل:

الموضع	-1	.	0	1	2
قيم المواضع	16^{-1} 1/16	. .	16^{0} 1	16^{1} 16	16^{2} 256
العدد	B	.	C	6	1

$$11 \times \frac{1}{16} = 0.6875$$

$$12 \times 1 = 1$$

$$6 \times 16 = 96$$

$$1 \times 256 = 256$$

إذن بالجمع نحصل على:

$$(16C.B)_{16} = 364.6875$$

مثال: حول العدد $(C4C.4)_{16}$ إلى النظام العشري.

الحل:

$$(C4C.4)_{16} = C \times 16^{0} + 4 \times 16^{1} + C \times 16^{2} + 4 \times 16^{-1}$$

$$= 12 \times 1 + 4 \times 16 + 12 \times 256 + \frac{4}{16} = 12 + 64 + 3072 + \frac{1}{4}$$

$$= 3148.25$$

(1-3-2) تحويل الأعداد من النظام العشري إلى الأنظمة العددية الأخرى بالصيغة العامة

لتحويل العدد N في الصيغة العامة من النظام العشري إلى نظام عددي جديد و الذي له الأساس B فإننا ننظر إلى العدد في الصيغة العامة على هيئة جزئيتين (جزء صحيح و جزء كسري) فبالنسبة للجزء الصحيح يتم ذلك بالقسمة المتتالية على B أساس النظام المطلوب التحويل إلية كما رأينا سابقا أما بالنسبة للجزء الكسري فيتم تحويلة بالضرب المتتالي في B أساس النظام الجديد المحول إلية العدد وفي كل عملية ضرب نفصل الجزء الصحيح من العدد الناتج ونستمر في العملية حتى يصل الجزء الكسري إلى الصفر ولكن قد تقابلنا حالة لا تنتهي فيها هذه العملية ولا يصل فيها الجزء الكسري إلى الصفر وبالتالي فنحن أمام خيارين لوقف العملية أما إيقاف العملية عند بدأ تكرار الناتج في الجزء الكسري وأما إيقاف العملية

عند الوصول إلى عدد معين من الأرقام يحدد مستوى دقة الأعـداد المطلـوب الوصـول إليـة وهذه العملية تسمى عملية القطع.

مثال: حول العدد 13.625 إلى النظام الثنائي.

الحل:

أولا: نحول الجزء الصحيح والذي يساوي 13:

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم عليه
2^0	1	6	2	13
2^1	0	3	2	6
2^2	1	1	2	3
2^3	1	0	2	1

إذن:

$$13 = (1101)_2$$

ثانيا: نحول الجزء الكسري 0.625

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
2^{-1}	0.25	1	1.25	2	0.625
2^{-2}	0.50	0	0.50	2	0.25
2^{-3}	0.00	1	1	2	0.50

إذن:

$$0.625 = (0.101)_2$$

إذن:

$$13.625 = (1101.101)_2$$

مثال: حول العدد 0.0625 إلى النظام الثنائي.

الحل:

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
2^{-1}	0.125	0	0.125	2	0.0625
2^{-2}	0.25	0	0.25	2	0.125
2^{-3}	0.50	0	0.50	2	0.25
2^{-4}	0.00	1	1	2	0.50

إذن:

$0.0625 = (0.0001)_2$

مثال: حول العدد العشري0.3125 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.3125	2	0.625	0	0.652	2^{-1}
0.625	2	1.25	1	0.25	2^{-2}
0.25	2	0.5	0	0.50	2^{-3}
0.5	2	1.0	1	0.00	2^{-4}

إذن:

$0.3125 = (0.0101)_2$

مثال: حول العدد العشري 0.6875 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.6875	2	1.375	1	0.375	2^{-1}
0.375	2	0.75	0	0.75	2^{-2}
0.75	2	1.5	1	0.5	2^{-3}
0.5	2	1.0	1	0.00	2^{-4}

إذن:

$0.6875 = (0.1011)_2$

مثال: حول العدد 0.0625 إلى النظام الثماني.

الحل:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.0625	8	0.5	0	0.5	8^{-1}
0.50	8	4.0	4	0.0	8^{-2}

إذن:

$0.0625 = (0.04)_8$

مثال: حول العدد 0.7 إلى النظام الثنائي.

الحل:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.7	2	1.4	1	0.4	2^{-1}
0.4	2	0.8	0	0.8	2^{-2}
0.8	2	1.6	1	0.6	2^{-3}
0.6	2	1.2	1	0.2	2^{-4}
0.2	2	0.4	0	0.4	2^{-5}
0.4	2	0.8	0	0.8	2^{-6}
0.8	2	1.6	1	0.6	2^{-7}
0.6	2	1.2	1	0.2	2^{-8}

إذن:

$0.7 = (0.10110011)_2$

ملاحظة: في المثال السابق من الممكن أن نتوقف بعد الدورة الأولى أي عند ظهور الجزء الكسري 0.4 فنحصل على:

$0.7 = (0.1011)_2$

مثال: حول العدد العشري 36.3125 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

أ. تحويل الجزء الصحيح من العدد العشري:

المقسوم عليه	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
36	2	18	0	2^0
18	2	9	0	2^1
9	2	4	1	2^2
4	2	2	0	2^3
2	2	1	0	2^4
1	2	0	1	2^5

إذن:

$36 = (100100)_2$

ب. تحويل الجزء الكسري من العدد العشري:

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
2^{-1}	0.625	0	0.625	2	0.3125
2^{-2}	0.25	1	1.25	2	0.625
2^{-3}	0.5	0	0.5	2	0.25
2^{-4}	0.0	1	1.0	2	0.5

إذن:

$0.3125=(0.0101)_2$

إذن: من ناتج (أ) و (ب) ينتج:

$36.3125=(100100.0101)_2$

مثال: حول العدد العشري 364.6875 إلى النظام الثنائي؟

الحل:

أ. تحويل الجزء الصحيح من العدد العشري

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم عليه
2^0	0	182	2	364
2^1	0	91	2	182
2^2	1	45	2	91
2^3	1	22	2	45
2^4	0	11	2	22
2^5	1	5	2	11
2^6	1	2	2	5
2^7	0	1	2	2
2^8	1	0	2	1

إذن:

$364=(101101100)_2$

ب. تحويل الجزء الكسري من العدد العشري:

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
2^{-1}	0.375	1	1.375	2	0.6875
2^{-2}	0.75	0	0.75	2	0.375
2^{-3}	0.5	1	1.5	2	0.75
2^{-4}	0.0	1	1.0	2	0.5

إذن:

$0.6875 = (0.1011)_2$

إذن: من ناتج (أ) و (ب) ينتج:

$364.6875 = (101101100.1011)_2$

مثال: حول العدد 0.122 إلى النظام الثماني.

الحل:

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
8^{-1}	0.976	0	0.976	8	0.122
8^{-2}	0.808	7	7.808	8	0.976
8^{-3}	0.464	6	6.464	8	0.808
8^{-4}	0.712	3	3.712	8	0.464
8^{-5}	0.696	5	5.696	8	0.712
8^{-6}	0.368	6	6.368	8	0.696
8^{-7}	0.844	2	2.844	8	0.368

من الملاحظ أن هذه العملية غير منتهية وبالتالي نعمل عملية قطع فنحصل على:

$0.122 = (0.0763562)_8$

مثال: حول العدد العشري 0.3125 إلى النظام الثماني؟

الحل:

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
8^{-1}	0.5	2	2.5	8	0.3125
8^{-2}	0.0	4	4.0	8	0.5

إذن:

$0.3125 = (0.24)_8$

مثال: حول العدد العشري 0.6875 إلى النظام الثماني؟

الحل:

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
8^{-1}	0.5	5	5.5	8	0.6875
8^{-2}	0.0	4	4.0	8	0.5

إذن:

$0.6875 = (0.54)_8$

مثال: حول العدد العشري 36.3125 إلى النظام الثماني؟

الحل:

أ. تحويل الجزء الصحيح من العدد العشري:

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم عليه
8^0	4	4	8	36
8^1	4	0	8	4

إذن:

$36 = (44)_8$

ب. تحويل الجزء الكسري من العدد العشري:

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
8^{-1}	0.5	2	2.5	8	0.3125
8^{-2}	0.0	4	4.0	8	0.5

إذن:

$0.3125=(0.24)_8$

إذن: من ناتج (أ) و (ب) ينتج:

$36.3125 = (44.24)_8$

مثال: حول العدد العشري 364.6875 إلى النظام الثماني؟

الحل:

أ. تحويل الجزء الصحيح من العدد العشري:

المقسوم عليه	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
364	8	45	4	8^0
45	8	5	5	8^1
5	8	0	5	8^2

إذن:

$364 = (554)_8$

ب. تحويل الجزء الكسري من العدد العشري:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.6875	8	5.5	5	0.5	8^{-1}
0.5	8	4.0	4	0.0	8^{-2}

إذن:

$0.6875 = (0.54)_8$

إذن من ناتج (أ) و (ب) ينتج:

$364.6875 = (554.54)_8$

مثال: حول الكسر العشري 0.3125 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.3125	16	5.0	5	0. 0	16^{-1}

إذن:

$0.3125 = (0.5)_{16}$

مثال: حول الكسر العشري 0.6875 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.6875	16	11.0	11=B	0.0	16^{-1}

إذن:

$0.6875 = (0.B)_{16}$

مثال: حول العدد 250.65 إلى النظام السادس عشر.

الحل:

أ. نحول الجزء الصحيح:

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم عليه
16^0	10=A	15	16	250
16^1	15=F	0	16	15

إذن:

$250 = (FA)_{16}$

ب. نحول الجزء الكسري

المراتب	الجزء الكسري	الجزء الصحيح	ناتج الضرب	الأساس	العدد الكسري
16^{-1}	0.40	10= A	10.40	16	0.625
16^{-2}	0.40	6	6.40	16	0.25
16^{-3}	0.40	6	6.40	16	0.50

من الملاحظ أن هذه العملية غير منتهية وبالتالي نعمل قطع فنحصل على:

$0.65 = (0.A66)_{16}$

إذن من (أ) و (ب) نحصل على:

$250.65 = (FA.A66)_2$

مثال: حول العدد العشري 36.3125 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

أ. تحويل الجزء الصحيح من العدد العشري:

المراتب	باقي القسمة	ناتج القسمة	القاسم	المقسوم عليه
16^0	4	2	16	36
16^1	2	0	16	2

إذن:

$36=(24)_{16}$

ب. تحويل الجزء الكسري من العدد العشري:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.3125	16	5.0	5	0. 0	16^{-1}

إذن:

$0.3125 = (0.5)_{16}$

إذن: من ناتج (أ) و (ب) ينتج :

$36.3125 = (24.5)_{16}$

مثال: حول العدد العشري 364.6875 إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

أ. تحويل الجزء الصحيح من العدد العشري:

المقسوم عليه	القاسم	ناتج القسمة	باقي القسمة	المراتب
364	16	22	12= C	16^{0}
22	16	1	6	16^{1}
1	16	0	1	16^{2}

إذن:

$364 = (16C)_{16}$

ب. تحويل الجزء الكسري من العدد العشري:

العدد الكسري	الأساس	ناتج الضرب	الجزء الصحيح	الجزء الكسري	المراتب
0.6875	16	11.0	11=B	0. 0	16^{-1}

إذن:

$0.6875 = (0.B)_{16}$

إذن من ناتج (أ) و (ب) ينتج:

$364.6875 = (16C.B)_{16}$

(1-3-3) تحويل الأعداد من النظام الثماني إلى النظام الثنائي والعكس بالصيغة العامة

لتحويل الأعداد من النظام الثماني إلى النظام الثنائي والعكس في الصيغة العامة التي تحتوي على جزء صحيح و جزء كسري فإننا نتبع نفس الأسلوب الذي إتبعناه في حالة

الأعداد الصحيحة حيث كل رقم في النظام الثماني يقابلة ثلاث أرقام في النظام الثنائي فنقوم بعملية الإستبدال بين الأرقام المتناظرة في النظامين.

مثال: حول العدد $(42.37)_8$إلى النظام الثنائي.

الحل:

4	2	.	3	7	العدد الثماني
100	010	.	011	111	العدد الثنائي

إذن:

$(42.37)_8 = (100010.011111)_2$

مثال: حول العدد $(10110001.1011)_2$ إلى النظام الثماني.

الحل:

نضيف صفرين للجزء الكسري في أقصى اليمين بينما نضيف صفر واحد في أقصى اليسار بالنسبة للجزء الصحيح وبالتالي يكون لدينا:

010	110	001	.	101	100	العدد الثنائي
2	6	1	.	5	4	العدد الثماني

إذن:

$(10110001.1011)_2 = (261.54)_8$

مثال: حول العدد $(1110110010.100010)_2$ إلى النظام الثماني.

الحل:

نضيف صفرين في أقصى اليسار بالنسبة للجزء الصحيح وبالتالي يكون لدينا:

001	110	110	010	.	100	010	العدد الثنائي
1	6	6	2	.	5	4	العدد الثماني

إذن:

$(1110110010.100010)_2 = (1662.42)_8$

مثال: حول العدد $(72.35)_8$ إلى النظام الثنائي.

الحل:

العدد الثماني	5	3	.	2	1
العدد الثنائي	101	011	.	010	111

إذن:

$(72.35)_8 = (111010.011101)_2$

مثال: حول العدد الثماني $(0.625)_8$ إلى النظام الثنائي؟

الحل:

العدد الثماني	5	2	6	.	0
العدد الثنائي	101	010	110	.	0

إذن:

$(0.625)_8 = (0.110010101)_2$

مثال: حول العدد الثماني $(554.625)_8$ إلى النظام الثنائي؟

الحل:

العدد الثماني	5	2	6	.	4	5	5
العدد الثنائي	101	010	110	.	100	101	101

إذن:

$(554.625)_8 = (101101100.110010101)_2$

مثال: حول العدد الثنائي $(0.110010101)_2$ إلى النظام الثماني؟

الحل:

ثنائي	101	010	110	.	0
ثماني	5	2	6	.	0

إذن:

$(0.110010101)_2 = (0.625)_8$

مثال: حول العدد الثنائي $(101101100.110010101)_2$ إلى النظام الثماني؟

الحل:

101	101	100	.	110	010	101	**ثنائي**
5	5	4	.	6	2	5	**ثماني**

إذن:

$(101101100.110010101)_2 = (554.625)_8$

(1-3-4) تحويل الأعداد من النظام السادس عشر إلى النظام الثنائي والعكس بالصيغة العامة

لتحويل الأعداد من النظام السادس عشر إلى النظام الثنائي والعكس في الصيغة العامة التي تحتوي على جزء صحيح و جزء كسري فإننا نتبع نفس الأسلوب الذي إتبعناه في حالة الأعداد الصحيحة حيث كل رقم في النظام السادس عشر يقابلة أربعة أرقام في النظام الثنائي فنقوم بعملية الاستبدال بين الأرقام المتناظرة في النظامين.

مثال: حول العدد $(FAC.91BD)_{16}$ إلى النظام الثنائي.

الحل:

F	A	C	.	9	1	B	D	**العدد السادس عشر**
1111	1010	1100	.	1001	0001	1011	1101	**العدد الثنائي**

إذن:

$(FAC.91BD)_{16} = (111110101100.1001000110111101)_2$

مثال: حول العدد $(1110101001.11111)_2$ إلى النظام السادس عشر.

الحل:

نضيف ثلاث أصفار للجزء الكسري في أقصى اليمين بينما نضيف صفرين في أقصى اليسار بالنسبة للجزء الصحيح وبالتالي يكون لدينا:

0011	1010	1001	.	1111	1000	**العدد الثنائي**
3	A	9	.	F	8	**العدد السادس عشر**

إذن:

$(1110101001.11111)_2 = (3A9.F8)_{16}$

مثال: حول العدد $(11010110011.10001010)_2$ إلى النظام السادس عشر.

الحل:

نضيف صفر في أقصى اليسار بالنسبة للجزء الصحيح وبالتالي يكون لدينا:

العدد الثنائي	1010	1000	.	0011	1011	0110
العدد السادس عشر	A	8	.	3	B	6

إذن:

$$(11010110011.10001010)_2 = (6B3.8A)_{16}$$

مثال: حول العدد $(111001.11)_2$ إلى النظام السادس عشر.

الحل:

نضيف صفرين للجزء الكسري في أقصى اليمين بينما نضيف صفرين في أقصى اليسار بالنسبة للجزء الصحيح وبالتالي يكون لدينا:

العدد الثنائي	1100	.	1001	0011
العدد السادس عشر	C	.	9	3

إذن:

$$(111001.11)_2 = (39.C)_{16}$$

مثال: حول العدد السادس عشر $(0.BD)_{16}$ إلى النظام الثنائي؟

الحل:

سادس عشر	D	B	.	0
ثنائي	1101	1011	.	0

إذن:

$$(0.BD)_{16} = (0.10111101)_2$$

مثال: حول العدد السادس عشر $(16C.BD)_{16}$ إلى النظام الثنائي؟

الحل:

1	6	C	.	B	D	سادس عشر
0001	0110	1100	.	1011	1101	ثنائي

إذن:

$(16C.BD)_{16} = (101101100.\ 10111101)_2$

مثال: حول العدد الثنائي $(0.10111101)_2$ إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

0	.	1011	1101	ثنائي
0	.	B	D	سادس عشر

إذن:

$(0.10111101)_2 = (0.BD)_{16}$

مثال: حول العدد الثنائي $(101101100.10111101)_2$ إلى النظام السادس عشر؟

الحل:

0001	0110	1100	.	1011	1101	ثنائي
1	6	C	.	B	D	سادس عشر

إذن:

$(101101100.10111101)_2 = (\ 16C.BD\ )_{16}$

(1-3-5) تحويل الأعداد من النظام السادس عشر إلى النظام الثماني والعكس بالصيغة العامة

لتحويل الأعداد من النظام السادس عشر إلى النظام الثماني والعكس في الصيغة العامة التي تحتوي على جزء صحيح و جزء كسري فإننا نتبع نفس الأسلوب الذي اتبعناه في حالة الأعداد الصحيحة حيث يتم إستخدام نظام وسيط وهو النظام الثنائي يتم التحويل لـه أولاً ثم نتحول من النظام الثنائي إلى النظام المطلوب التحويل إلية.

مثال: حول العدد $(53.72)_8$ إلى النظام السادس عشر.

الحل:

أولاً: نحول العدد إلى النظام الثنائي:

$$(53.72)_8 = (101011.111010)_2$$

ثانياً: نحول العدد إلى النظام السادس عشر:

العدد الثنائي	1000	1110	.	1011	0010
العدد السادس عشر	8	E	.	B	2

إذن:

$$(53.72)_8 = (2B.E8)_{16}$$

مثال: حول العدد $(AC.2D)_{16}$ إلى النظام الثماني.

الحل:

أولاً: نحول العدد إلى النظام الثنائي:

$$(AC.2D)_{16} = (10101100.00101101)_2$$

ثانياً: نحول النظام الثنائي إلى النظام الثماني.

العدد الثنائي	010	011	001	.	100	101	010
العدد الثماني	2	3	1	.	4	5	2

إذن:

$$(10101100.00101101)_2 = (254.132)_8$$

إذن:

$$(AC.2D)_{16} = (254.132)_8$$

(1-4) العمليات الحسابية في النظام الثنائي

(1-4-1) عملية الجمع في النظام الثنائي

$0 + 0 = 0$

$1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 1$

$1 + 1 = 0$ and carry 1

حيث: $(1)_2 + (1)_2 = (10)_2$

مثال: إحسب $(101)_2 + (11)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ + & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

إذن: $(101)_2 + (11)_2 = (1000)_2$

مثال: إحسب $(1001)_2 + (11)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} +$$

إذن: $(1001)_2 + (11)_2 = (1100)_2$

مثال: إحسب $(101)_2 + (100)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} +$$

إذن: $(101)_2 + (100)_2 = (1001)_2$

مثال: إحسب $(111)_2 + (111)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} +$$

إذن: $(111)_2 + (111)_2 = (1110)_2$

مثال: إحسب $(1111)_2 + (1111)_2$

الحل:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} +$$

إذن: $(1111)_2 + (1111)_2 = (11110)_2$

مثال: إحسب $(1011)_2 + (101101)_2$

الحل:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

إذن: $(1011)_2 + (101101)_2 = (111000)_2$

مثال: إحسب $(111.01)_2 + (11.111)_2$

الحل:

أولا نوحد العلامة الكسرية في كلا العددين:

$(111.010)_2 + (011.111)_2$

وبالتالي:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & & 1 & 1 & 1 & . & 0 & 1 & 0 \\ + & & 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & . & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ثم نكتب النتيجة مع الأخذ بعين الاعتبار بأن تكون العلامة الكسرية بعد الرقم الثالث.

إذن: $(111.01)_2 + (11.111)_2 = (1011.001)_2$

مثال: احسب $(1011.0111)_2 + (10011.101)_2$

الحل:

أولا نوحد العلامة الكسرية في كلا العددين:

$(01011.0111)_2 + (10011.1010)_2$

وبالتالي:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1. & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 & 1. & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1. & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ثم نكتب النتيجة مع الأخذ بعين الاعتبار بأن تكون العلامة الكسرية بعد الرقم الرابع.

إذن:

$(01011.0111)_2 + (10011.1010)_2 = (11111.0001)_2$

مثال: احسب $(1111)_2 + (111)_2 + (110)_2$

الحل:

	1	1	1	1	
	0	1	1	1	+
1	0	1	1	0	

إذن: $(1111)_2 + (111)_2 = (10110)_2$

1	0	1	1	0	
0	0	1	1	0	+
1	1	1	0	0	

إذن: $(1111)_2 + (111)_2 + (110)_2 = (11100)_2$

مثال: إحسب $(1110)_2 + (101)_2 + (110)_2$

الحل:

	1	1	1	0	
	0	1	0	1	+
1	0	0	1	1	

إذن: $(1110)_2 + (101)_2 = (10011)_2$

1	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	+
1	1	0	0	1	

إذن: $(1110)_2 + (101)_2 + (110)_2 = (11001)_2$

مثال: إحسب $(111)_2 + (110)_2 + (11)_2$

الحل:

	1	1	1	
	1	1	0	+
1	1	0	1	

إذن: $(111)_2 + (110)_2 = (1101)_2$

	1	1	0	1	
	0	0	1	1	+
1	0	0	0	0	

إذن: $(111)_2 + (110)_2 + (11)_2 = (10000)_2$

مثال: أوجد $(1011)_2 + (111)_2$

الحل:

	1	0	1	1	
	0	1	1	1	+
1	0	0	1	0	

إذن:

$(1011)_2 + (111)_2 = (10010)_2$

مثال: أوجد $(1011.11)_2 + (110.1)_2$

الحل:

	1	0	1	1.	1	1	
	0	1	1	0.	1	0	+
1	0	0	1	0.	0	1	

إذن:

$(1011.11)_2 + (110.1)_2 = (10010.01)_2$

(1-4-2) عملية الطرح في النظام الثنائي

عملية الطرح في النظام الثنائي تشابه عملية الطرح في النظام العشري حيث ننظم العددين في صفين حيث الصف الأول هو العدد المطروح منه والصف الثاني هو العدد المطروح فإذا كان الرقم الأول أكبر أو يساوي الرقم الثاني فنحسب الفرق مباشرة.

وأما إذا كان الرقم الثاني أكبر من الرقم الأول فإننا نستلف واحد من الرقم التالي وبالتالي هذا الرقم ينقص 1 كما إننا نضيف 2 للرقم الأول وبالتالي يصبح الرقم الأول أكبر من الرقم الثاني وبالتالي نجري عملية الطرح.

$0 - 0 = 0$

$1 - 0 = 1$

$1 - 1 = 0$

$0 - 1 = 1$ and borrow 1

حيث: $(10)_2 - (1)_2 = (1)_2$

مثال: إحسب $(101)_2 - (11)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & - \\ \hline 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

إذن: $(101)_2 - (11)_2 = (10)_2$

مثال: إحسب $(100110)_2 - (1110)_2$

الحل:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & - \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

إذن: $(100110)_2 - (1110)_2 = (11000)_2$

مثال: إحسب $(111001)_2 - (1011)_2$

الحل:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & - \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

إذن: $(111001)_2 - (1011)_2 = (101110)_2$

مثال: إحسب $(11001)_2 - (1101)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

إذن: $(11001)_2 - (1101)_2 = (1100)_2$

مثال: إحسب $(11100)_2 - (100)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

إذن: $(11100)_2 - (100)_2 = (11000)_2$

مثال: إحسب $(1001)_2 - (110)_2$

الحل:

	1	0	0	1
-	0	1	1	0
	0	0	1	1

إذن: $(1001)_2 - (110)_2 = (11)_2$

مثال: إحسب $(111.01)_2 - (11.111)_2$

الحل:

أولا نوحد العلامة الكسرية في كلا العددين:

$(111.010)_2 - (011.111)_2$

وبالتالي:

	1	1	1	.	0	1	0
-	0	1	1	.	1	1	1
	0	1	1	.	0	1	1

ثم نكتب النتيجة مع الأخذ بعين الاعتبار بأن تكون العلامة الكسرية بعد الرقم الثالث.

إذن: $(111.01)_2 - (11.111)_2 = (11.011)_2$

مثال: إحسب $(111)_2 - (100)_2$

الحل:

	1	1	1
-	1	0	0
	0	1	1

إذن: $(111)_2 - (100)_2 = (11)_2$

مثال: إحسب $(1000)_2 - (111)_2$

الحل:

	1	0	0	0
-	0	1	1	1
	0	0	0	1

إذن: $(1000)_2 - (111)_2 = (1)_2$

مثال: إحسب $(100110)_2 - (1011)_2$

الحل:

	1	0	0	1	1	0
−	0	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	1	1

إذن: $(100110)_2 - (1011)_2 = (11011)_2$

مثال: إحسب $(1110001)_2 - (1011)_2$

الحل:

	1	1	1	0	0	0	1
−	0	0	0	1	0	1	1
	1	1	0	0	1	1	0

إذن: $(1110001)_2 - (1011)_2 = (1100110)_2$

مثال: إحسب $(100110)_2 - (1110)_2$

الحل:

$(100110)_2 - (1110)_2 = (11000)_2$

مثال: أوجد $(1110)_2 - (101)_2$

الحل:

	1	1	1	0
−	0	1	0	1
	1	0	0	1

إذن:

$(1110)_2 - (101)_2 = (1001)_2$

مثال: أوجد $(1100)_2 - (1011)_2$

الحل:

	1	1	0	0
−	1	0	1	1
	0	0	0	1

إذن:

$(1100)_2 - (1011)_2 = (1)_2$

مثال: أوجد $(10100.11)_2 - (101.01)_2$

الحل:

	1	0	1	0	0.	1	1
−	0	0	1	0	1.	0	1
	0	1	1	1	1.	1	0

إذن:

$(10100.11)_2 - (101.01)_2 = (1111.1)_2$

(1-4-3) عملية الضرب في النظام الثنائي

أولاً: نضرب الرقم الأول من العدد الثاني في جميع أرقام العدد الأول ثم نضع النتيجة تحت عناصر الرقم الأول.

ثانياً: نضرب الرقم الثاني من العدد الثاني في جميع أرقام العدد الأول ثم نضع النتيجة تحت عناصر الرقم الثاني.

وهكذا تحت ننتهي من جميع عناصر العدد الثاني.

ثالثاً: نجري عملية الجمع للنتائج التي حصلنا عليها .

مثال: إحسب $(100110)_2 \times (1110)_2$

الحل:

					1	0	0	1	1	0
×							1	1	1	0
					0	0	0	0	0	0
+				1	0	0	1	1	0	
+			1	0	0	1	1	0		
+		1	0	0	1	1	0			
	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

إذن: $(100110)_2 \times (1110)_2 = (1000010100)_2$

مثال: إحسب $(111)_2 \times (101)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & & & 1 & 1 & 1 & \times \\
 & & & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & + \\
 & 1 & 1 & 1 & & & + \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

إذن: $(111)_2 \times (101)_2 = (100011)_2$

مثال: إحسب $(1101)_2 \times (1011)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \times \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & + \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & + \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & + \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

إذن: $(1101)_2 \times (1011)_2 = (10001111)_2$

مثال: إحسب $(1100)_2 \times (1010)_2$

الحل:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & & & 1 & 1 & 0 & 0 & \times \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & + \\
1 & 1 & 0 & 0 & & & & + \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

إذن: $(1100)_2 \times (1010)_2 = (1111000)_2$

مثال: إحسب $(1011)_2 \times (1010)_2$

الحل:

			1	0	1	0	×
			1	0	1	1	
			1	0	1	0	
		1	0	1	0		+
	0	0	0	0			+
1	0	1	0				+
1	1	0	1	1	1	0	

إذن: $(1011)_2 \times (1010)_2 = (1101110)_2$

مثال: إحسب $(11.1)_2 \times (10.1)_2$

الحل:

أولا: نحسب عملية الضرب بدون العلامات الكسرية ثم نضع العلامة الكسرية بعد الرقم الثاني.

			1	1	1	×
			1	0	1	
			1	1	1	
		0	0	0		+
	1	1	1			+
1	0	0	0	1	1	

إذن: $(11.1)_2 \times (10.1)_2 = (1000.11)_2$

مثال: إحسب $(1.01)_2 \times (10.1)_2$

الحل:

أولا: نحسب عملية الضرب بدون العلامات الكسرية ثم نضع العلامة الكسرية بعد الرقم الثالث.

		1	0	1	×
		1	0	1	
		1	0	1	
	0	0	0		+
1	0	1			+
1	1	0	0	1	

إذن: $(1.01)_2 \times (10.1)_2 = (11.001)_2$

مثال: إحسب $(11101)_2 \times (11)_2$

الحل:

		1	1	1	0	1	×
					1	1	
		1	1	1	0	1	
	1	1	1	0	1		+
1	0	1	0	1	1	1	

إذن: $(11101)_2 \times (11)_2 = (1010111)_2$

مثال : أوجد $(1111)_2 \times (101)_2$

الحل:

			1	1	1	1	
				1	0	1	×
			1	1	1	1	
		0	0	0	0		+
	1	1	1	1			+
1	0	0	1	0	1	1	

إذن:

$(1111)_2 \times (101)_2 = (1001011)_2$

مثال : أوجد $(11001)_2 \times (101)_2$

الحل:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & \times \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & + \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & + \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

إذن:

$(11001)_2 \times (101)_2 = (1111101)_2$

مثال : أوجد $(1011.01)_2 \times (11.01)_2$

الحل:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1. & 0 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 1. & 0 & 1 & \times \\
\hline
 & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & + \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & + \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & & & & + \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

إذن:

$(1011.01)_2 \times (11.01)_2 = (100100.1001)_2$

مثال: إحسب $(1011010)_2 \times (101101)_2$

الحل:

بإتباع نفس الأسلوب السابق نحصل على:

$(1011010)_2 \times (101101)_2 = (111111010010)_2$

(1-4-4) عملية القسمة في النظام الثنائي

نجري عملية القسمة المطولة كما نجريها على الأعداد الصحيحة.

مثال: أوجد $(11011)_2 \div (11)_2$

الحل:

		0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1
		1	1			
		0	0	0	1	1
					1	1
					0	0

إذن:

$(11011)_2 \div (11)_2 = (1001)_2$

مثال: أوجد $(10101)_2 \div (111)_2$

الحل:

			0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1
				1	1	1	
			0	0	1	1	1
					1	1	1
					0	0	0

إذن:

$(11011)_2 \div (111)_2 = (11)_2$

مثال: أوجد $(1001011)_2 \div (101)_2$

الحل:

			0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
				1	0	1			
				1	0	0	0		
					1	0	1		
						0	1	1	1
						1	0	1	
						0	1	0	1
						1	0	1	
						0	0	0	

إذن:

$$(1001011)_2 \div (101)_2 = (1111)_2$$

مثال: أوجد $(110111)_2 \div (101)_2$

الحل:

	0	0	1	0	1	1
1 0 1	1	1	0	1	1	1
	1	0	1			
	0	0	1	1	1	
			1	0	1	
				1	0	1
				1	0	1
				0	0	0

إذن:

$$(110111)_2 \div (101)_2 = (1011)_2$$

مثال: إحسب $(11001)_2 \div (101)_2$

الحل:

	0	0	1	0	1
1 0 1	1	1	0	0	1
	1	0	1		
	0	0	1	0	1
			1	0	1
			0	0	0

إذن: $(11001)_2 \div (101)_2 = (101)_2$

مثال: إحسب $(100011)_2 \div (111)_2$

الحل:

	0	0	0	1	0	1
1 1 1	1	0	0	0	1	1
		1	1	1		
		0	0	1	1	1
				1	1	1
				0	0	0

إذن: $(100011)_2 \div (111)_2 = (101)_2$

مثال: إحسب $(100011)_2 \div (101)_2$

الحل:

```
          0  0  0  1  1  1
1 0 1 |   1  0  0  0  1  1
             1  0  1
             0  1  1  1
                1  0  1
                0  1  0  1
                   1  0  1
                   0  0  0
```

إذن: $(100011)_2 \div (101)_2 = (111)_2$

مثال: إحسب $(10110)_2 \div (111)_2$

الحل:

```
          0  0  0  1  1.  0  0  0  1  0  0  0  1
1 1 1 |   1  0  1  1  0
             1  1  1
             1  0  0  0
                1  1  1
                0  0  1  0  0  0
                      0  1  1  1
                      0  0  0  1  0  0  0
                               0  1  1  1
                      0  0  0  0  0  0  1
```

إذن عملية القسمة غير منتهية وبالتالي:

$(10110)_2 \div (111)_2 = (11.00010001)_2$

مثال: إحسب $(110011)_2 \div (110)_2$

الحل:

```
          0  0  1  0  0  0. 1
1 1 0 |   1  1  0  0  1  1
          1  1  0
          0  0  0  0  1  1  0
                      1  1  0
                      0  0  0
```

إذن: $(110011)_2 \div (110)_2 = (1000.1)_2$

مثال: إحسب $(11101)_2 \div (1100)_2$

الحل:

```
                0 0 0 1 0. 0 1 1
          ------------------------------
1 1 0 0 | 1 1 1 0 1
          1 1 0 0
          0 0 1 0 1 0 0
                1 1 0 0
                1 0 0 0 0
                  1 1 0 0
          ----------------
                  0 1 0 0
```

إذن عملية القسمة غير منتهة وبالتالي نعمل قطع:

إذن: $(11101)_2 \div (1100)_2 = (10.011)_2$

مثال: إحسب $(1000.11)_2 \div (11.1)_2$

الحل:

نتخلص أولاً من العلامات الكسرية وبالتالي:

```
                0 0 0 0 1 0. 1
          ------------------------------
1 1 1 0 | 1 0 0 0 1 1
            1 1 1 0
          ------------------------------
          0 0 0 1 1 1 0
                1 1 1 0
          ------------------------------
                0 0 0 0
```

إذن: $(1000.11)_2 \div (11.1)_2 = (10.1)_2$

مثال: إحسب $(1.1)_2 \div (0.11)_2$

الحل:

نتخلص أولاً من العلامات الكسرية وبالتالي

```
        0 1 0
      ____________
 1 1 | 1 1 0
       1 1
       0 0 0
       0 0 0
       ______
       0 0 0
```

إذن: $(1.1)_2 \div (0.11)_2 = (10)_2$

مثال: إحسب $(11.01)_2 \div (1.01)_2$

الحل:

نتخلص أولاً من العلامات الكسرية وبالتالي:

```
          0 0 1 0. 1 0 0 1 1
        ______________________
 1 0 1 | 1 1 0 1
         1 0 1
         ______________________
         0 0 1 1 0
             1 0 1
         ______________________
               0 1 0 0 0
                   1 0 1
         ______________________
                     1 1 0
                     1 0 1
         ______________________
                     0 0 1
```

إذن عملية القسمة غير منتهية وبالتالي:

$(11.01)_2 \div (1.01)_2 = (10.10011)_2$

مثال: إحسب $(1000.11)_2 \div (10.1)_2$

الحل:

نتخلص أولاً من العلامات الكسرية وبالتالي:

```
                0 0 0 0 1 0. 1
         ------------------------
1 0 1 0 | 1 0 0 0 1 1
            1 0 1 0
          -----------------------
          0 0 1 1 1 1
              1 0 1 0
          -----------------------
                1 0 1 0
                1 0 1 0
          -----------------------
                0 0 0 0
```

إذن: $(1000.11)_2 \div (10.1)_2 = (11.1)_2$

(1-5) العمليات الحسابية في النظام الثماني

(1-5-1) عملية الجمع في النظام الثماني

عملية الجمع في النظام الثماني تخضع للجدول الأتي:

+	$(0)_8$	$(1)_8$	$(2)_8$	$(3)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$
$(0)_8$	$(0)_8$	$(1)_8$	$(2)_8$	$(3)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$
$(1)_8$	$(1)_8$	$(2)_8$	$(3)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$	$(10)_8$
$(2)_8$	$(2)_8$	$(3)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$	$(10)_8$	$(11)_8$
$(3)_8$	$(3)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$	$(10)_8$	$(11)_8$	$(12)_8$
$(4)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$	$(10)_8$	$(11)_8$	$(12)_8$	$(13)_8$
$(5)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$	$(10)_8$	$(11)_8$	$(12)_8$	$(13)_8$	$(14)_8$
$(6)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$	$(10)_8$	$(11)_8$	$(12)_8$	$(13)_8$	$(14)_8$	$(15)_8$
$(7)_8$	$(7)_8$	$(10)_8$	$(11)_8$	$(12)_8$	$(13)_8$	$(14)_8$	$(15)_8$	$(16)_8$

مثال: إحسب $(375)_8 + (567)_8$

الحل:

```
     3   7   5
     5   6   7  +
  --------------
 1   1   6   4
```

إذن: $(375)_8 + (567)_8 = (1164)_8$

مثال: إحسب $(777)_8 + (666)_8$

الحل:

	7	7	7	
	6	6	6	+
1	6	6	5	

إذن: $(777)_8 + (666)_8 = (1665)_8$

مثال: إحسب $(777)_8 + (23)_8$

الحل:

	7	7	7	
		2	3	+
1	0	2	2	

إذن: $(777)_8 + (23)_8 = (1022)_8$

مثال: إحسب $(52.374)_8 + (763.45)_8$

الحل:

	0	5	2	.	3	7	4	
	7	6	3	.	4	5	0	+
1	0	3	6	.	0	4	4	

إذن: $(52.374)_8 + (763.45)_8 = (1036.044)_8$

مثال: أوجد $(532)_8 + (345)_8$

الحل:

	5	3	2	
	3	4	5	+
1	0	7	7	

إذن:

$(532)_8 + (345)_8 = (1077)_8$

مثال: أوجد $(654)_8 + (132)_8$

الحل:

	6	5	4	
	1	3	2	+
1	0	0	6	

إذن:

$(654)_8 + (132)_8 = (1006)_8$

مثال: أوجد $(367)_8 + (256)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 6 & 7 \\ + & 2 & 5 & 6 \\ \hline & 6 & 4 & 5 \end{array}$$

إذن:

$(367)_8 + (256)_8 = (645)_8$

مثال: أوجد $(7643)_8 + (5457)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rrrrr} & 7 & 6 & 4 & 3 \\ + & 5 & 4 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

إذن:

$(7643)_8 + (5457)_8 = (15322)_8$

مثال: أوجد $(47657)_8 + (35642)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 4 & 7 & 6 & 5 & 7 \\ + & 3 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

إذن:

$(47657)_8 + (35642)_8 = (105521)_8$

(1-5-2) عملية الطرح في النظام الثماني

عملية الطرح في النظام الثماني تشابه عملية الطرح في النظام العشري حيث ننظم العددين في صفين حيث الصف الأول هو العدد المطروح منه والصف الثاني هو العدد المطروح فإذا كان الرقم الأول أكبر أو يساوي الرقم الثاني فنحسب الفرق مباشرة .

وأما إذا كان الرقم الثاني أكبر من الرقم الأول فإننا نستلف واحد من الرقم التالي وبالتالي هذا الرقم ينقص 1 كما إننا نضيف 8 للرقم الأول وبالتالي يصبح الرقم الأول أكبر من الرقم الثاني وبالتالي نجري عملية الطرح.

مثال: إحسب $(7001)_8 - (666)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rrrrr} & 7 & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 6 & 6 & 6 \\ \hline & 6 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

إذن: $(7001)_8 - (666)_8 = (6113)_8$

مثال: إحسب $(71)_8 - (24.57)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rrrcrr} & 7 & 1 & . & 0 & 0 \\ - & 2 & 4 & . & 5 & 7 \\ \hline & 4 & 4 & . & 2 & 1 \end{array}$$

إذن: $(71)_8 - (24.57)_8 = (44.21)_8$

مثال: إحسب $(753)_8 - (621)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rrrr} & 7 & 5 & 3 \\ - & 6 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

إذن: $(753)_8 - (621)_8 = (132)_8$

مثال: إحسب $(765)_8 - (476)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rrrr} & 7 & 6 & 5 \\ - & 4 & 7 & 6 \\ \hline & 2 & 6 & 7 \end{array}$$

إذن: $(765)_8 - (476)_8 = (267)_8$

مثال: إحسب $(652)_8 - (453)_8$

الحل:

6	5	2	
4	5	3	−
1	7	7	

إذن: $(652)_8 - (453)_8 = (177)_8$

مثال: أوجد $(1077)_8 - (532)_8$

الحل:

1	0	7	7	
0	5	3	2	−
0	3	4	5	

إذن:

$(1077)_8 - (532)_8 = (345)_8$

مثال: أوجد $(645)_8 - (256)_8$

الحل:

6	4	5	
2	5	6	−
3	6	7	

إذن:

$(645)_8 - (256)_8 = (367)_8$

مثال: أوجد $(1006)_8 - (132)_8$

الحل:

1	0	0	6	
0	1	3	2	−
0	6	5	4	

إذن:

$(1006)_8 - (132)_8 = (654)_8$

(1-5-3) عملية الضرب في النظام الثماني

عملية الضرب في النظام الثماني تخضع للجدول الاتي:

×	$(0)_8$	$(1)_8$	$(2)_8$	$(3)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$
$(0)_8$	$(0)_8$	$(0)_8$	$(0)_8$	$(0)_8$	$(0)_8$	$(0)_8$	$(0)_8$	$(0)_8$
$(1)_8$	$(0)_8$	$(1)_8$	$(2)_8$	$(3)_8$	$(4)_8$	$(5)_8$	$(6)_8$	$(7)_8$
$(2)_8$	$(0)_8$	$(2)_8$	$(4)_8$	$(6)_8$	$(10)_8$	$(12)_8$	$(14)_8$	$(16)_8$
$(3)_8$	$(0)_8$	$(3)_8$	$(6)_8$	$(11)_8$	$(14)_8$	$(17)_8$	$(22)_8$	$(25)_8$
$(4)_8$	$(0)_8$	$(4)_8$	$(10)_8$	$(14)_8$	$(20)_8$	$(24)_8$	$(30)_8$	$(34)_8$
$(5)_8$	$(0)_8$	$(5)_8$	$(12)_8$	$(17)_8$	$(24)_8$	$(31)_8$	$(36)_8$	$(43)_8$
$(6)_8$	$(0)_8$	$(6)_8$	$(14)_8$	$(22)_8$	$(30)_8$	$(36)_8$	$(44)_8$	$(52)_8$
$(7)_8$	$(0)_8$	$(7)_8$	$(16)_8$	$(25)_8$	$(34)_8$	$(43)_8$	$(52)_8$	$(61)_8$

مثال: إحسب $(652)_8 \times (76)_8$

الحل:

		6	5	2	×
			7	6	
	4	7	7	4	
5	6	4	6		+
6	3	4	5	4	

إذن: $(652)_8 \times (76)_8 = (63454)_8$

مثال: إحسب $(123)_8 \times (157)_8$

الحل:

		1	2	3	×
		1	5	7	
	1	1	0	5	
	6	3	7		+
1	2	3			
2	1	7	7	5	

إذن: $(123)_8 \times (157)_8 = (21775)_8$

مثال: إحسب $(2051)_8 \times (1234)_8$

الحل:

			2	0	5	1	×
			1	2	3	4	
		1	0	2	4	4	
		6	1	7	3		+
	4	1	2	2			+
2	0	5	1				+
2	5	5	5	3	7	4	

إذن: $(2051)_8 \times (1234)_8 = (2555374)_8$

مثال: إحسب $(337)_8 \times (66)_8$

الحل:

$(337)_8 \times (66)_8 = (27412)_8$

مثال: إحسب $(3.6)_8 \times (1.07)_8$

الحل:

$(3.6)_8 \times (1.07)_8 = (4.122)_8$

مثال: إحسب $(0.66)_8 \times (6.6)_8$

الحل:

$(0.66)_8 \times (6.6)_8 = (5.544)_8$

(1-5-4) عملية القسمة في النظام الثماني

نجري عملية القسمة المطولة كما نجريها على الأعداد الصحيحة.

مثال: إحسب $(41)_8 \div (6)_8$

الحل:

```
     0 5. 4
   ---------
 6 | 4 1 0
     3 6
   ---------
     0 3 0
       3 0
   ---------
       0 0
```

إذن: $(41)_8 \div (6)_8 = (5.4)_8$

مثال: إحسب $(22)_8 \div (5)_8$

الحل:

0 3. 4

5 | 2 2

1 7

0 3 0

3 0

0 0

إذن: $(22)_8 \div (5)_8 = (3.4)_8$

مثال: احسب $(4466)_8 \div (22)_8$

الحل:

0 2 0 3

2 2 | 4 4 6 6

4 4

0 0 6 6

6 6

0 0

إذن: $(4466)_8 \div (22)_8 = (203)_8$

مثال: إحسب $(24)_8 \div (6)_8$

الحل:

0 3. 2 5

6 | 2 4

2 2

0 2 0

1 4

0 4 0

3 6

0 2

إذن عملية القسمة غير منتهية وبالتالي نعمل القطع فنحصل على:

$(24)_8 \div (6)_8 = (3.25)_8$

مثال: إحسب $(7632)_8 \div (6)_8$

الحل:

```
    1 2 3 1. 5 2
6 | 7 6 3 2
    6
    ---
    1 6
    1 4
    ---
    0 2 3
      2 2
    -----
      0 1 2
          6
    -------
          4 0
          3 6
    -------
          0 2 0
            1 4
    ---------
            0 4
```

إذن عملية القسمة غير منتهية وبالتالي نعمل القطع فنحصل على:

$(7632)_8 \div (6)_8 = (1231.52)_8$

مثال: إحسب $(76643)_8 \div (11)_8$

الحل:

$(76643)_8 \div (11)_8 = (6765.52)_8$

مثال: إحسب $(2221)_8 \div (22)_8$

الحل:

$(2221)_8 \times (22)_8 = (100.74)_8$

(1-6) العمليات الحسابية في النظام السداسي عشر

(1-6-1) جمع و طرح الأعداد في النظام السداسي عشر

عند جمع وطرح الأعداد في النظام السداسي عشر نتبع نفس الأسلوب المستعمل في النظام العشري مع مراعاة أن أساس هذا النظام هو 16.

مثال: احسب $(6AD)_{16} + (253)_{16}$

الحل:

	6	A	D
+	2	5	3
	9	0	0

إذن: $(6AD)_{16} + (253)_{16} = (900)_{16}$

مثال: إحسب $(F6F)_{16} + (ABE)_{16}$

الحل:

		F	6	F
+		A	B	E
	1	A	2	D

إذن: $(F6F)_{16} + (ABE)_{16} = (1A2D)_{16}$

مثال: إحسب $(930.BA)_{16} + (BA8.09)_{16}$

الحل:

		9	3	0	.	B	A
+		B	A	8	.	0	9
	1	4	D	8	.	C	3

إذن: $(930.BA)_{16} + (BA8.09)_{16} = (14D8.C3)_{16}$

مثال: أوجد $(54)_{16} + (3A)_{16}$

الحل:

	5	4
+	3	A
	8	E

إذن:

$(54)_{16} + (3A)_{16} = (8E)_{16}$

مثال: أوجد $(1A6)_{16} + (F19)_{16}$

الحل:

	1	A	6	
	F	1	9	+
1	0	E	F	

إذن:

$(1A6)_{16} + (F19)_{16} = (10EF)_{16}$

مثال: أوجد $(A2C)_{16} + (73F)_{16}$

الحل:

	A	2	C	
	7	3	F	+
1	1	6	B	

إذن:

$(A2C)_{16} + (73F)_{16} = (116B)_{16}$

مثال: أوجد $(313A)_{16} + (A542)_{16}$

الحل:

3	1	3	A	
A	5	4	2	+
D	6	7	C	

إذن:

$(313A)_{16} + (A542)_{16} = (D67C)_{16}$

مثال: أوجد $(ABCD)_{16} + (7654)_{16}$

الحل:

	A	B	C	D	
	7	6	5	4	+
1	2	2	2	1	

إذن:

$(ABCD)_{16} + (7654)_{16} = (D67C)_{16}$

مثال: إحسب $(AED)_{16} - (826)_{16}$

الحل:

	A	E	D
−	8	2	6
	2	C	7

إذن: $(AED)_{16} - (826)_{16} = (2C7)_{16}$

مثال: إحسب $(8BE)_{16} - (7DF)_{16}$

الحل:

	8	B	E
−	7	D	F
	0	D	F

إذن: $(8BE)_{16} - (7DF)_{16} = (DF)_{16}$

مثال: إحسب $(F345.216)_{16} - (ABC.DE9)_{16}$

الحل:

	F	3	4	5	.	2	1	6
−	0	A	B	C	.	D	E	9
	E	8	8	8	.	4	2	D

إذن: $(F345.216)_{16} + (ABC.DE9)_{16} = (E888.42D)_{16}$

مثال: أوجد $(D67C)_{16} - (313A)_{16}$

الحل:

	D	6	7	C
−	3	1	3	A
	A	5	4	2

إذن:

$(D67C)_{16} - (313A)_{16} = (A542)_{16}$

مثال: أوجد $(12221)_{16} - (7654)_{16}$

الحل:

	1	2	2	2	1
−		7	6	5	4
	0	A	B	C	D

إذن:

$(12221)_{16} - (7654)_{16} = (ABCD)_{16}$

مثال: أوجد $(116B)_{16} - (A2C)_{16}$

الحل:

1	1	6	B	
	A	2	C	−
0	7	3	F	

إذن:

$(116B)_{16} - (A2C)_{16} = (73F)_{16}$

(1-6-2) ضرب وقسمة الأعداد في النظام السداسي عشر

عند ضرب وقسمة الأعداد في النظام السداسي عشر نتبع نفس الأسلوب المستعمل في النظام العشري مع مراعاة أن أساس هذا النظام هو 16 ويمكن أجراء عملية الضرب أو القسمة بتحويل الأعداد المراد ضربها أو قسمتها إلى مكافئها الثنائي أو العشري وأجراء العملية المطلوبة ومن ثم تحويل الناتج إلى مكافئه السداسي عشر.

مثال: إحسب $(A14)_{16} \times (5)_{16}$

الحل:

	A	1	4	
			5	×
3	2	6	4	

إذن: $(A14)_{16} \times (5)_{16} = (3264)_{16}$

مثال: إحسب $(D3)_{16} \times (8A)_{16}$

الحل:

		D	3	×
		8	A	
	8	3	E	
6	9	8		+
7	1	B	E	

إذن: $(D3)_{16} \times (8A)_{16} = (71BE)_{16}$

مثال: إحسب $(D5.59)_{16} \times (23.AB)_{16}$

الحل:

				D	5	5	9	×
				2	3	A	B	
			9	8	D	D	3	
		8	A	F	7	A		+
	2	9	B	0	B			+
1	B	C	B	2				+
1	E	F	A	B	1	7	3	

إذن: $(D5.59)_{16} \times (23.AB)_{16} = (1EFA.B173)_{16}$

مثال: إحسب $(3264)_{16} \div (5)_{16}$

الحل:

0 A 1 4

5 | 3 2 6 4

3 2

0 0 6

5

1 4

1 4

0 0

إذن: $(3264)_{16} \div (5)_{16} = (A14)_{16}$

مثال: إحسب $(980511)_{16} \div (ED)_{16}$

الحل:

```
          0 0 A 4 3 7
      ____________________
  E D | 9 8 0 5 1 1
        9 4 2
        ____________
        0 3 E 5
          3 B 4
        ____________
        0 0 3 1 1
            3 C 7
        ____________
            0 4 A 1
            0 4 A 1
        ____________
            0 0 0 0
```

إذن: $(980511)_{16} \div (ED)_{16} = (A437)_{16}$

مثال: إحسب $(C5C1)_{16} \div (4B)_{16}$

الحل:

```
         0 2 A 3
      ______________
   4B | C 5 C 1
        9 6
        ________
        2 F C
        2 E E
        --------
          E 1
          E 1
        ________
          0 0
```

إذن: $(C5C1)_{16} \div (4B)_{16} = (2A3)_{16}$

(1-7) تمثيل العدد الثنائي داخل الحاسوب

يوجد ثلاث طرق لتمثيل الأعداد داخل الحاسوب:

1. طريقة الإشارة والمقدار Signed and magnitude

2. طريقة المكمل الأول 1st Complement

3. طريقة المكمل الثاني 2nd Complement

(1-7-1) تمثيل العدد الثنائي بواسطة الإشارة والمقدار

لقد اتفق على استعمال 0 ليدل على إشارة العدد الموجب بينما العدد 1 يدل على العدد السالب وبالتالي لتمثيل العدد الثنائي داخل الحاسوب فإن العدد يتكون من جزئين الجزء الأول هو القيمة العددية بينما تكون الخانة الأخيرة التي تقع في أقصى اليسار لتدل على الإشارة.

مثال: مثل الأعداد العشرية التالية 25- ,25+ ,24- ,24+ في النظام الثنائي بواسطة طريقة الإشارة والمقدار.

الحل:

النظام الثنائي بواسطة الإشارة والمقدار	النظام العشري
011000	+24
111000	-24
011001	+25
111001	-25

(1-7-2) تمثيل العدد الثنائي بواسطة المكمل الأول

إذا كان لدينا عدد N وله الأساس B وأن هذا العدد له n خانة صحيحة و m خانة كسرية فإن المكمل الأول للعدد N على الأساس B هو $\bar{N} = B^n - N - B^{-m}$

وبالتالي في النظام الثنائي يكون المكمل الأول للعدد N هو $\bar{N} = 2^n - N - 2^{-m}$

مثال: إحسب المكمل الأول للعدد العشري 52320.

الحل:

$$\bar{N} = B^n - N - B^{-m} = 10^3 - 320.52 - 10^{-2}$$
$$= 1000 - 320.52 - 0.01 = 679.47$$

مثال: إحسب المكمل الأول للعدد الثنائي $(101.1)_2$.

الحل:

$$\bar{N} = B^n - N - B^{-m} = 2^3 - 101.1 - 2^{-1}$$
$$= 1000 - 101.1 - 0.1 = 010.0 = (010.0)_2$$

مثال: إحسب المكمل الأول للعدد الثنائي $(10110)_2$

الحل:

$$\overline{N} = B^n - N - B^{-m} = 2^5 - 101.1 - 2^0$$

$$= 10000 - 10110 - 1 = 01001 = (01001)_2$$

ملاحظة: يمكن حساب المكمل الأول للعدد الثنائي بطريقة سهلة مباشرة وذلك بتبديل الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد.

مثال: إحسب المكمل الأول للعدد الثنائي $(101.1)_2$

الحل:

لإيجاد المكمل الأول للعدد الثنائي N بتبديل الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد فنحصل على:

$$\overline{N} = (010.0)_2$$

مثال: إحسب المكمل الأول للعدد الثنائي $(100.10)_2$

الحل:

لإيجاد المكمل الأول للعدد الثنائي N بتبديل الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد فنحصل على:

$$\overline{N} = (011.01)_2$$

مثال: إحسب المكمل الأول للعدد الثنائي $(10110)_2$

الحل:

لإيجاد المكمل الأول للعدد الثنائي N بتبديل الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد فنحصل على:

$$\overline{N} = (01001)_2$$

ملاحظه: لتمثيل العدد الثنائي بواسطة المكمل الأول فيكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان العدد موجب فباستخدام طريقة الإشارة والمقدار نكتب العدد مباشرة.

الحالة الثانية: إذا كان العدد سالب فإننا نحسب المكمل الأول للعدد الموجب.

مثال: مثل العدد العشري 23+ بإستخدام المكمل الأول.

الحل:

نحول العدد 23+ إلى النظام الثنائي:

$+23 = (00010111)_2$

مثال: مثل العدد العشري 23- بإستخدام المكمل الأول.

الحل:

أولاً: نحول العدد 23+ إلى النظام الثنائي:

$+23 = (00010111)_2$

ثانياً: نحسب المكمل الأول للعدد $(00010111)_2$:

$-23 = (11101000)_2$

مثال: مثل العدد العشري 25+ باستخدام المكمل الأول.

الحل:

نحول العدد 23+ إلى النظام الثنائي:

$+25 = (00011001)_2$

مثال: مثل العدد العشري 25- بإستخدام المكمل الأول.

الحل:

أولاً: نحول العدد 25+ إلى النظام الثنائي:

$+25 = (00011001)_2$

ثانياً: نحسب المكمل الأول للعدد $(00011001)_2$:

$-25 = (11100110)_2$

مثال: مثل العدد العشري 26- بإستخدام المكمل الأول.

الحل:

أولاً: نحول العدد 26+ إلى النظام الثنائي:

$+26 = (00011010)_2$

ثانياً: نحسب المكمل الأول للعدد $(00011010)_2$:

$-26 = (11100101)_2$

(1-7-3) تمثيل العدد الثنائي بواسطة المكمل الثاني

إذا كان لدينا عدد N وله الأساس B وأن هذا العدد له n خانة صحيحة و m خانة كسرية فإن المكمل الثاني للعدد N على الأساس B هو $\bar{\bar{N}} = B^n - N$

وبالتالي في النظام الثنائي يكون المكمل الثاني للعدد N هو $\bar{\bar{N}} = 2^n - N$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد العشري 52320.

الحل:

$$\bar{\bar{N}} = B^n - N = 10^3 - 320.52 = 1000 - 320.52 = 679.48$$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(101.1)_2$

الحل:

$$\bar{\bar{N}} = B^n - N = 2^3 - 101.1 = 1000 - 101.1 = 10.1 = (010.1)_2$$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(10110)_2$

الحل:

$$\bar{\bar{N}} = B^n - N = 2^5 - 10110 = 100000 - 10110 = 01010 = (01010)_2$$

ملاحظة: يمكن حساب المكمل الثاني للعدد الثنائي في النظام الثنائي بواسطة المكمل الأول ثم نضيف واحد إلى أول خانة من جهة اليمين في المكمل الأول.

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(101.1)_2$

الحل:

أولاً: نحسب المكمل الأول للعدد الثنائي N بتبديل الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد فنحصل على:

$$\bar{N} = (010.0)_2$$

ثانياً: نضيف واحد إلى أول خانة من جهة اليمين في المكمل الأول فنحصل على:

$$\bar{\bar{N}} = (010.0)_2 + (0.1)_2 = (010.1)_2$$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(10110)_2$

الحل:

أولا: نحسب المكمل الأول للعدد الثنائي N بتبديل الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد فنحصل على:

$\bar{N} = (01001)_2$

ثانيا: نضيف واحد إلى أول خانة من جهة اليمين في المكمل الأول فنحصل على:

$\bar{\bar{N}} = (01001)_2 + (1)_2 = (01010)_2$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(100.10)_2$

الحل:

أولا: نحسب المكمل الأول للعدد الثنائي N بتبديل الواحد إلى صفر والصفر إلى واحد فنحصل على:

$\bar{N} = (011.01)_2$

ثانيا: نضيف واحد إلى أول خانة من جهة اليمين في المكمل الأول فنحصل على:

$\bar{\bar{N}} = (011.01)_2 + (0.01)_2 = (011.10)_2$

ملاحظة: يمكن حساب المكمل الثاني للعدد الثنائي بطريقة سريعة وسهلة وذلك بعكس الصفر إلى واحد والواحد إلى صفر وذلك بعد أول خانة بها واحد من جهة اليمين.

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(101.1)_2$

الحل:

N	1	0	1	1
$\bar{\bar{N}}$	0	1	0	1

وبالتالي:

$\bar{\bar{N}} = (010.1)_2$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(100.10)_2$

الحل:

N	1	0	0	1	0
$\bar{\bar{N}}$	0	1	1	1	0

وبالتالي:

$\bar{\bar{N}} = (011.10)_2$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(10110)_2$

الحل:

N	1	0	1	1	0
$\bar{\bar{N}}$	0	1	0	1	0

وبالتالي:

$\bar{\bar{N}} = (01010)_2$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(10101100)_2$

الحل:

N	1	0	1	0	1	1	0	0
$\bar{\bar{N}}$	0	1	0	1	0	1	0	0

وبالتالي:

$\bar{\bar{N}} = (01010100)_2$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(10101101)_2$

الحل:

N	1	0	1	0	1	1	0	1
$\bar{\bar{N}}$	0	1	0	1	0	0	1	1

وبالتالي:

$\bar{\bar{N}} = (01010011)_2$

مثال: إحسب المكمل الثاني للعدد الثنائي $(01010011)_2$

الحل:

N	0	1	0	1	0	0	1	1
$\bar{\bar{N}}$	1	0	1	0	1	1	0	1

وبالتالي:

$\bar{\bar{N}} = (10101101)_2$

ملاحظه: لتمثيل العدد الثنائي بواسطة المكمل الثاني فيكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان العدد موجب فبإستخدام طريقة الإشارة والمقدار نكتب العدد مباشرة.

الحالة الثانية: إذا كان العدد سالب فإننا نحسب المكمل الثاني للعدد الموجب.

مثال: مثل العدد العشري 3- بإستخدام المكمل الثاني.

الحل:

أولاً: نحول العدد 23+ إلى النظام الثنائي:

$+3 = (00000011)_2$

ثانياً: نحسب المكمل الثاني للعدد $(00000011)_2$:

$-3 = (11111101)_2$

مثال: مثل العدد العشري 23- باستخدام المكمل الثاني.

الحل:

أولاً: نحول العدد 25+ إلى النظام الثنائي:

$+23 = (00010111)_2$

ثانياً: نحسب المكمل الثاني للعدد $(00010111)_2$:

$-23 = (11101001)_2$

مثال: مثل العدد العشري 25+ بإستخدام المكمل الثاني.

الحل:

نحول العدد 25+ إلى النظام الثنائي:

$+25 = (00011001)_2$

مثال: مثل العدد العشري 25- بإستخدام المكمل الثاني.

الحل:

أولا: نحول العدد 25+ إلى النظام الثنائي:

$+25 = (00011001)_2$

ثانيا: نحسب المكمل الثاني للعدد $(00011001)_2$:

$-25 = (11100111)_2$

مثال: مثل العدد العشري 26- بإستخدام المكمل الثاني.

الحل:

أولاً: نحول العدد 26+ إلى النظام الثنائي:

$$+26 = (00011010)_2$$

ثانياً: نحسب المكمل الثاني للعدد $(00011010)_2$:

$$-26 = (11100110)_2$$

مثال: مثل العدد العشري 10- بإستخدام المكمل الثاني.

الحل:

أولاً: نحول العدد 10+ إلى النظام الثنائي:

$$+10 = (00001010)_2$$

ثانياً: نحسب المكمل الثاني للعدد $(00001010)_2$:

$$-10 = (11110110)_2$$

مثال: مثل العدد العشري 32- بإستخدام المكمل الثاني.

الحل:

أولاً: نحول العدد 32+ إلى النظام الثنائي:

$$+32 = (00100000)_2$$

ثانياً: نحسب المكمل الثاني للعدد $(00100000)_2$:

$$-32 = (11100000)_2$$

(1-8) جمع وطرح الأعداد الثنائية باستعمال المكمل الأول

عند جمع وطرح الأعداد الثنائية بإستخدام المكمل الأول فإن الفكرة الأساسية تعتمد على تحويل العدد السالب إلى المكمل الأول ثم نجمع المكمل الأول مع العدد الثاني الموجب وبذلك نكون حولنا عملية الطرح إلى عملية جمع وبالتالي فإن الإشارة التي تقع اقصى خانة من جهة اليسار تشترك في عملية الجمع وقيمتها النهائية تقرر إشارة الناتج فإذا كانت تساوي صفر فإن الناتج يكون موجب وأما إذا كانت تساوي 1 فإن الناتج يكون سالب ولكن للحصول على النتيجة النهائية يجب حساب المكمل الأول هذه النتيجة.

في هذا الجزء سوف ندرس أربع حالات:

الحالة الأولى: الجمع لعددين كلاهما موجب.

الحالة الثانية: الجمع لعددين كلاهما سالب.

الحالة الثالثة: الجمع لعددين مختلفين في الإشارة والعدد الموجب أكبر من العدد السالب.

الحالة الرابعة: الجمع لعددين مختلفين في الإشارة والعدد السالب أكبر من العدد الموجب.

(1-8-1) الجمع بإستخدام المكمل الأول لعددين كلاهما موجب

إذا كان العددين المراد جمعهما كلاهما موجب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة جديدة في أقصى اليسار تسمى خانة الفيض overflow .

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار.

الخطوة الرابعة: لجمع العددين.

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1000)_2 + (101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(1000)_2 + (0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض في أقصى اليسار:

$(01000)_2 + (00101)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة الدليل في أقصى اليسار:

$(001000)_2 + (000101)_2$

الخطوة الرابعة: لجمع العددين:

0	0	1	0	0	0	
0	0	0	1	0	1	+
0	0	1	1	0	1	

إذن الحل = $(1101)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1111)_2 + (1010)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(1111)_2 + (1010)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض في أقصى اليسار:

$(01111)_2 + (01010)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة الدليل في أقصى اليسار:

$(001111)_2 + (001010)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \quad + \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

إذن الحل = $(11001)_2$

(1-8-2) الجمع باستخدام المكمل الأول لعددين كلاهما سالب

إذا كان العددين المراد جمعهما كلاهما سالب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة جديدة في أقصى اليسار تسمى خانة الفيض.

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار .

الخطوة الرابعة: نحسب المكمل الأول للعدد السالب بدون أخر خانة والتي هي خانة دليل الإشارة .

الخطوة الخامسة: نجمع العددين.

الخطوة السادسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج.

الخطوة السابعة: نحسب المكمل الأول للناتج بدون خانة دليل الإشارة.

الخطوة الثامنة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة ونكتب الحل.

ملاحظة هامه: خانة دليل الإشارة والتي تقع في أقصى اليسار تجمع ولكنها لا تتمم.

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(-1000)_2 + (-101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-1000)_2 + (-0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض:

$(-01000)_2 + (-00101)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(101000)_2 + (100101)_2$

الخطوة الرابعة: نحسب المكمل الأول للعددين بدون الدليل:

$(110111)_2 + (111010)_2$

الخطوة الخامسة: نجمع العددين:

	1	1	0	1	1	1	
	1	1	1	0	1	0	+
1	1	1	0	0	0	1	

الخطوة السادسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

1	1	0	0	0	1	
					1	+
1	1	0	0	1	0	

الخطوة السابعة: نحسب المكمل الأول للناتج بدون دليل الإشارة: $(101101)_2$

الخطوة الثامنة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي يكون الحل هو $(-1101)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(-1110)_2 + (-101010)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-101010)_2 + (-001110)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض:

$(-0101010)_2 + (-0001110)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(10101010)_2 + (10001110)_2$

الخطوة الرابعة: نكمل العددين بدون الدليل:

$(11010101)_2 + (11110001)_2$

الخطوة الخامسة: نجمع العددين:

	1	1	0	1	0	1	0	1	
	1	1	1	1	0	0	0	1	+
1	1	1	0	0	0	1	1	0	

الخطوة السادسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

نجمع العددين:

1	1	0	0	0	1	1	0	
							1	+
1	1	0	0	0	1	1	1	

الخطوة السابعة: نكمل الناتج بدون دليل الإشارة: $(10111000)_2$

الخطوة الثامنة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي يكون الحل هو $(-111000)_2$

(1-8-3) الجمع بإستخدام المكمل الأول لعدديين مختلفين في الإشارة والعدد الموجب أكبر من العدد السالب

إذا كان العددين المراد جمعهما مختلفين في الإشارة والعدد الموجب أكبر من العدد السالب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار .

الخطوة الثالثة: نحسب المكمل الأول للعدد السالب.

الخطوة الرابعة: نجمع العددين.

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج.

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة ونكتب الحل.

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1000)_2 - (101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(1000)_2 + (-0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01000)_2 + (10101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(01000)_2 + (11010)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	0	0	0	
	1	1	0	1	0	+
1	0	0	0	1	0	

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

0	0	0	1	0	
				1	+
0	0	0	1	1	

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+11)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(100)_2 - (11100)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(11100)_2 + (-00100)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(011100)_2 + (100100)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(011100)_2 + (111011)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	1	1	0	0	
	1	1	1	0	1	1	+
1	0	1	0	1	1	1	

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

0	1	0	1	1	1	
					1	+
0	1	1	0	0	0	

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+11000)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1111)_2 - (1111)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(1111)_2 + (-1111)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01111)_2 + (11111)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(01111)_2 + (10000)_2$

الخطوة الرابعة: لجمع العددين:

$$\begin{array}{rccccc} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

$$\begin{array}{rccccc} & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ + & & & & & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

الخطوة السادسة: لحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+0)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(11001)_2 - (1101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(11001)_2 + (-01101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(011001)_2 + (101101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(011001)_2 + (110010)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

		0	1	1	0	0	1
		1	1	0	0	1	0	+
	1	0	0	1	0	1	1

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

0	0	1	0	1	1	
					1	+
0	0	1	1	0	0	

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+1100)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1110001)_2 - (1011)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(1110001)_2 + (-0001011)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01110001)_2 + (10001011)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(01110001)_2 + (11110100)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	1	1	0	0	0	1	
	1	1	1	1	0	1	0	0	+
1	0	1	1	0	0	1	0	1	

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

0	1	1	0	0	1	0	1	
							1	+
0	1	1	0	0	1	1	0	

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+1100110)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1110)_2 - (100110)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(100110)_2 + (-001110)_2$

الخطوة الثانية: نضع دليل الإشارة:

$(0100110)_2 + (1001110)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(0100110)_2 + (1110001)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	0	0	1	1	0	
	1	1	1	0	0	0	1	+
1	0	0	1	0	1	1	1	

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

0	0	1	0	1	1	1	
						1	+
0	0	1	1	0	0	0	

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+11000)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(-0.101)_2 + (0.11)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(0.110)_2 + (-0.101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(00.110)_2 + (10.101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(00.110)_2 + (11.010)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0. & 1 & 1 & 0 & \\
 & 1 & 1. & 0 & 1 & 0 & + \\
\hline
1 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0. & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & 1 & + \\
\hline
0 & 0. & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+0.001)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1010.10)_2 + (-1.001)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(1010.100)_2 + (-0001.001)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01010.100)_2 + (10001.001)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب:

$(01010.100)_2 + (11110.110)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0. & 1 & 0 & 0 & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0. & 1 & 1 & 0 & + \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1. & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

الخطوة الخامسة: نسحب أخر رقم من الناتج ونضيفه إلى أول رقم في الناتج:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1. & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & & & & & 1 & + \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 1. & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+1001.011)_2$

(1-8-4) الجمع بإستخدام المكمل الأول لعددين مختلفين في الإشارة والعدد السالب أكبر من العدد الموجب

إذا كان العددين المراد جمعهما مختلفين في الإشارة والعدد السالب أكبر من العدد الموجب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار.

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون خانة الدليل.

الخطوة الرابعة: نجمع العددين.

الخطوة الخامسة: نكمل الناتج بدون خانة دليل الإشارة.

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة ونكتب الحل.

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(101)_2 + (-1000)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-1000)_2 + (0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة :

$(11000)_2 + (00101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(10111)_2 + (00101)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

1	0	1	1	1	
0	0	1	0	1	+
1	1	1	0	0	

الخطوة الخامسة: نكمل الناتج بدون الدليل: 10011

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(-11)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الأول إحسب $(101)_2 + (-1010)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(-1010)_2 + (0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(11010)_2 + (00101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(10101)_2 + (00101)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

1	0	1	0	1	
0	0	1	0	1	+
1	1	0	1	0	

الخطوة الخامسة: نكمل الناتج بدون الدليل: 10101

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(-1010)_2$

(1-9) جمع وطرح الأعداد الثنائية بإستعمال المكمل الثاني

في هذا الجزء سوف ندرس أربع حالات:

الحالة الأولى: الجمع لعددين كلاهما موجب.

الحالة الثانية: الجمع لعددين كلاهما سالب.

الحالة الثالثة: الجمع لعددين مختلفين في الإشارة والعدد الموجب أكبر من العدد السالب.

الحالة الرابعة: الجمع لعددين مختلفين في الإشارة والعدد السالب أكبر من العدد الموجب.

(1-9-1) الجمع بإستخدام المكمل الثاني لعددين كلاهما موجب

إذا كان العددين المراد جمعهما كلاهما موجب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة جديدة في أقصى اليسار تسمى خانة الفيض .

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار.

الخطوة الرابعة: نجمع العددين.

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(100)_2 + (111)_2$

الحل:

ا-خطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(111)_2 + (100)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض في أقصى اليسار:

$(0111)_2 + (0100)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة الدليل في أقصى اليسار:

$(00111)_2 + (00100)_2$

الخطوة الرابعة: لجمع العددين:

0	0	1	1	1	
0	0	1	0	0	+
0	1	0	1	1	

إذن الحل = $(1011)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(101)_2 + (1000)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(1000)_2 + (0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض في أقصى اليسار:

$(01000)_2 + (00101)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة الدليل في أقصى اليسار:

$(001000)_2 + (000101)_2$

الخطوة الرابعة: لجمع العددين:

0	0	1	0	0	0	
0	0	0	1	0	1	+
0	0	1	1	0	1	

إذن الحل = $(1101)_2$

(1-9-2) الجمع بإستخدام المكمل الثاني لعددين كلاهما سالب

إذا كان العددين المراد جمعهما كلاهما سالب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة جديدة في أقصى اليسار تسمى خانة الفيض.

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار .

الخطوة الرابعة: نحسب المكمل الثاني للعدد السالب بدون خانة دليل الإشارة .

الخطوة الخامسة: نجمع العددين ونهمل أي عدد خارج خانة الإشارة.

الخطوة السادسة: نحسب المكمل الثاني للناتج بدون خانة دليل الإشارة.

الخطوة السابعة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة ونكتب الحل.

ملاحظة هامه: خانة دليل الإشارة والتي تقع في أقصى اليسار تجمع ولكنها لا تتمم.

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-1001)_2 - (1100)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-1001)_2 + (-1100)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض:

$(-01001)_2 + (-01100)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(101001)_2 + (101100)_2$

الخطوة الرابعة: نحسب المكمل الثاني للعددين بدون الدليل:

$(110111)_2 + (110100)_2$

الخطوة الخامسة: نجمع العددين:

	1	1	0	1	1	1	
	1	1	0	1	0	0	+
1	1	0	1	0	1	1	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(101011)_2$

الخطوة السادسة: نكمل الناتج بدون دليل الإشارة: $(110101)_2$

الخطوة السابعة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي يكون الحل هو $(-10101)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-1000)_2 + (-101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-1000)_2 + (-0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض:

$(-01000)_2 + (-00101)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(101000)_2 + (100101)_2$

الخطوة الرابعة: نكمل العددين بدون الدليل:

$(111000)_2 + (111011)_2$

الخطوة الخامسة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(110011)_2$

الخطوة السادسة: نكمل الناتج بدون دليل الإشارة: $(101101)_2$

الخطوة السابعة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي يكون الحل هو $(-1101)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-101010)_2 + (-1110)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-101010)_2 + (-001110)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض:

$(-0101010)_2 + (-0001110)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(10101010)_2 + (10001110)_2$

الخطوة الرابعة: نكمل العددين بدون الدليل:

$(11010110)_2 + (11110010)_2$

الخطوة الخامسة: نجمع العددين:

	1	1	0	1	0	1	1	0	
	1	1	1	1	0	0	1	0	+
1	1	1	0	0	1	0	0	0	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(11001000)_2$

الخطوة السادسة: نكمل الناتج بدون دليل الإشارة: $(10111000)_2$

الخطوة السابعة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي يكون الحل هو $(-111000)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-101)_2 + (-1001)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-1001)_2 + (-0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة الفيض:

$(-01001)_2 + (-00101)_2$

الخطوة الثالثة: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(101001)_2 + (100101)_2$

الخطوة الرابعة: نكمل العددين بدون الدليل:

$(110111)_2 + (111011)_2$

الخطوة الخامسة: نجمع العددين:

	1	1	0	1	1	1	
	1	1	1	0	1	1	+
1	1	1	0	0	1	0	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(110010)_2$

الخطوة السادسة: نكمل الناتج بدون دليل الإشارة: $(101110)_2$

الخطوة السابعة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي يكون الحل هو $(-1110)_2$

(1-8-3) الجمع باستخدام المكمل الثاني لعددين مختلفين في الإشارة والعدد الموجب أكبر من العدد السالب

إذا كان العددين المراد جمعهما مختلفين في الإشارة والعدد الموجب أكبر من العدد السالب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار .

الخطوة الثالثة: نحسب المكمل الثاني للعدد السالب بدون خانة الدليل.

الخطوة الرابعة: نجمع العددين ونهمل أي عدد خارج خانة الإشارة.

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة ونكتب الحل.

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1000)_2 - (101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(1000)_2 + (-0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01000)_2 + (10101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(01000)_2 + (11011)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	0	0	0	
	1	1	0	1	1	+
1	0	0	0	1	1	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو$(00011)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+11)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(100)_2 - (1000)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(1000)_2 + (-0100)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01000)_2 + (10100)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(01000)_2 + (11100)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ + & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو$(00100)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+100)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(100)_2 - (11100)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(11100)_2 + (-00100)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(011100)_2 + (100100)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(011100)_2 + (111100)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ + & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو$(011000)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+11000)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب$(1111)_2 - (1111)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(1111)_2 + (-1111)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01111)_2 + (11111)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(01111)_2 + (10001)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	1	1	1	
	1	0	0	0	1	+
1	0	0	0	0	0	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو$(00000)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+0)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب$(1111)_2 - (110)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(1111)_2 + (-0110)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01111)_2 + (10110)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(01111)_2 + (11010)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	1	1	1	
	1	1	0	1	0	+
1	0	1	0	0	1	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو$(01001)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+1001)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1100)_2 - (1001)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$$(1100)_2 + (-1001)_2$$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$$(01100)_2 + (11001)_2$$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$$(01100)_2 + (10111)_2$$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{cccccc c} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & + \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(00011)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+11)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(11001)_2 - (1101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$$(11001)_2 + (-01101)_2$$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$$(011001)_2 + (101101)_2$$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$$(011001)_2 + (110011)_2$$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{ccccccc c} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & + \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(001100)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+1100)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1110001)_2 - (1011)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(1110001)_2 + (-0001011)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01110001)_2 + (10001011)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(01110001)_2 + (11110101)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	1	1	0	0	0	1	
	1	1	1	1	0	1	0	1	+
1	0	1	1	0	0	1	1	0	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(01100110)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+1100110)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(100110)_2 - (1110)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(100110)_2 + (-001110)_2$

الخطوة الثانية: نضع دليل الإشارة:

$(0100110)_2 + (1001110)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(0100110)_2 + (1110010)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	0	0	1	1	0	
	1	1	1	0	0	1	0	+
1	0	0	1	1	0	0	0	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(0011000)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+11000)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(0.11)_2 + (-0.101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين:

$(0.110)_2 + (-0.101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(00.110)_2 + (10.101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(00.110)_2 + (11.011)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	0.	1	1	0	
	1	1.	0	1	1	+
1	0	0.	0	0	1	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو$(00.001)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+0.001)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1010.10)_2 + (-1.001)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(1010.100)_2 + (-0001.001)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(01010.100)_2 + (10001.001)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(01010.100)_2 + (11110.111)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

	0	1	0	1	0.	1	0	0	
	1	1	1	1	0.	1	1	1	+
1	0	1	0	0	1.	0	1	1	

نهمل الواحد الأخير الخارج عن خانة الإشارة في أقصى اليسار فيكون الناتج هو $(01001.011)_2$

الخطوة الخامسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(+1001.011)_2$

(4-9-1) الجمع بإستخدام المكمل الثاني لعددين مختلفين في الإشارة والعدد السالب أكبر من العدد الموجب

إذا كان العددين المراد جمعهما مختلفين في الإشارة والعدد السالب أكبر من العدد الموجب فإننا نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات للعددين.

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة في أقصى اليسار.

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون خانة الدليل.

الخطوة الرابعة: نجمع العددين.

الخطوة الخامسة: نكمل الناتج بدون خانة دليل الإشارة.

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة ونكتب الحل.

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-1000)_2 + (101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(-1000)_2 + (0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة :

$(11000)_2 + (00101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(11000)_2 + (00101)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

الخطوة الخامسة: نكمل الناتج بدون الدليل: 10011

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(-11)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(11000)_2 - (10000)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات:

$(10000)_2 + (-11000)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة :

$(010000)_2 + (111000)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(010000)_2 + (101000)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{rcccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

الخطوة الخامسة: نكمل الناتج بدون الدليل: 101000

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(-1000)_2$

مثال: بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(101)_2 + (-1010)_2$

الحل:

الخطوة الأولى : نوحد الخانات :

$(-1010)_2 + (0101)_2$

الخطوة الثانية: نضيف خانة دليل الإشارة:

$(11010)_2 + (00101)_2$

الخطوة الثالثة: نكمل العدد السالب بدون الدليل:

$(10110)_2 + (00101)_2$

الخطوة الرابعة: نجمع العددين:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

الخطوة الخامسة: نكمل الناتج بدون الدليل: 10101

الخطوة السادسة: نحول خانة الدليل إلى الإشارة وبالتالي فالحل هو $(-101)_2$

(1-10) ضرب الأعداد في النظام الثنائي بإستخدام إسلوب الإزاحة

لوصف عملية ضرب الأعداد في النظام الثنائي داخل الحاسبات فإننا نحول عملية الضرب إلى عملية جمع ويتم ذلك بإستخدام إسلوب الإزاحة كما يلي:

أولا: نوحد عدد خانات العددين وليكن n خانة.

ثانيا: ننشأ سجل يتكون من n2 خانة ونسميه MQ ونضع العدد المضروب والذي له الطول n في يسار السجل ونملأ باقي خانات MQ التي تقع في جهة اليمين بأصفار.

ثالثا: ننشأ سجل أخر يتكون من n خانة ونضع فيها العدد الضارب (المضروب فيه) ونسميه M .

رابعا: نزيح خانات السجل MQ خانة واحدة إلى اليسار وبالتالي سوف تخرج أخر خانة من جهة اليسار من السجل MQ وبالتالي نحن أمام حالتان:

الحالة الأولى: الرقم الخارج من السجل هو 1 وفي هذه الحالة نجمع MQ إلى العدد M .

الحالة الثانية: الرقم الخارج من السجل هو 0 وفي هذه الحالة نجمع MQ إلى أصفار.

خامسا: نكرر الخطوة الرابعة بقدر عدد خانات العدد الضارب.

مثال: بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(101)_2 \times (101)_2$

الحل:

الخطوة الأولى:

- MQ هو [101 000]
- إزاحة MQ [010 000] 1
- إضافة M :

	0	1	0	0	0	0
+				1	0	1
	0	1	0	1	0	1

إذن MQ هو [101 101]

الخطوة الثانية:

- إزاحة MQ   0 [101 010]
- إضافة أصفار :

	1	0	1	0	1	0
+				0	0	0
	1	0	1	0	1	0

إذن MQ هو   [101 010]

الخطوة الثالثة:

- إزاحة MQ   1 [010 100]
- إضافة M :

	0	1	0	1	0	0
+				1	0	1
	0	1	1	0	0	1

إذن MQ هو: [011 001]

إذن الحل هو : $(11001)_2$

مثال: بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1100)_2 \times (1010)_2$

الحل:

الخطوة الأولى:

- MQ هو [1100 0000]
- إزاحة MQ 1 [1000 0000]
- إضافة M :

	1	0	0	0	0	0	0	0
+					1	0	1	0
	1	0	0	0	1	0	1	0

إذن MQ هو   [1000 1010]

الخطوة الثانية:

- إزاحة MQ [0001 0100] 1
- إضافة M :

0	0	0	1	0	1	0	0	
				1	0	1	0	+
0	0	0	1	1	1	1	0	

إذن MQ هو [0001 1110]

الخطوة الثالثة:

- إزاحة MQ [0011 1100] 0
- إضافة M :

0	0	1	1	1	1	0	0	
				0	0	0	0	+
0	0	1	1	1	1	0	0	

إذن MQ هو [0011 1100]

الخطوة الرابعة:

- إزاحة MQ [0111 1000] 0
- إضافة M :

0	1	1	1	1	0	0	0	
				0	0	0	0	+
0	1	1	1	1	0	0	0	

إذن MQ هو [0111 1000]

إذن الحل هو : $(1111000)_2$

مثال: بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1011)_2 \times (1010)_2$

الحل:

الخطوة الأولى:

- MQ هو [1011 0000]
- إزاحة MQ [0110 0000] 1
- إضافة M :

0	1	1	0	0	0	0	0	
				1	0	1	0	+
0	1	1	0	1	0	1	0	

إذن MQ هو [0110 1010]

الخطوة الثانية:

- إزاحة MQ [1101 0100] 0
- إضافة أصفار :

1	1	0	1	0	1	0	0	
				0	0	0	0	+
1	1	0	1	0	1	0	0	

إذن MQ هو [1101 0100]

الخطوة الثالثة:

- إزاحة MQ [1010 1000] 1
- إضافة أصفار :

1	0	1	0	1	0	0	0	
				1	0	1	0	+
1	0	1	1	0	0	1	0	

إذن MQ هو [1011 0010]

الخطوة الرابعة:

- إزاحة MQ [0110 0100] 1
- إضافة M :

	0	1	1	0	0	1	0	0
+					1	0	1	0
	0	1	1	0	1	1	1	0

إذن MQ هو [0110 1110]

إذن الحل هو : $(1101110)_2$

مثال: بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1011)_2 \times (1001)_2$

الحل:

الخطوة الأولى:

- MQ هو [1011 0000]
- إزاحة MQ [0110 0000] 1
- إضافة M :

	0	1	1	0	0	0	0	0
+					1	0	0	1
	0	1	1	0	1	0	0	1

إذن MQ هو [0110 1001]

الخطوة الثانية:

- إزاحة MQ [1101 0010] 0
- إضافة أصفار :

	1	1	0	1	0	0	1	0
+					0	0	0	0
	1	1	0	1	0	0	1	0

إذن MQ هو [1101 0010]

الخطوة الثالثة:

- إزاحة MQ   1 [10100 100]
- إضافة M :

	1	0	1	0	0	1	0	0
+					1	0	0	1
	1	0	1	0	1	1	0	1

إذن MQ هو   [1010 1101]

الخطوة الرابعة:

- إزاحة MQ   1 [0101 1010]
- إضافة أصفار :

	0	1	0	1	1	0	1	0
+					1	0	0	1
	0	1	1	0	0	0	1	1

إذن MQ هو   [0110 0011]

إذن الحل هو : $(1100011)_2$

تمارين

1. أوجد تحليل العدد العشري $(79486)_{10}$ طبقا لقيم مواضعه.

2. حول العدد الثنائي $(110101)_2$ إلى النظام العشري ؟

3. إكتب العدد $(101101)_2$ بالنظام العشري؟

4. إكتب العدد $(100111)_2$ بالنظام العشري؟

5. حول العدد الثماني $(6154)_8$ إلى النظام العشري؟

6. إكتب العدد $(6214)_8$ بالنظام العشري؟

7. إكتب العدد $(2407)_8$ بالنظام العشري؟

8. حول العدد السادس عشر $(E62C)_{16}$ إلى النظام العشري؟

9. إكتب العدد $(29AF)_{16}$ بالنظام العشري؟

10. إكتب العدد $(50BE)_{16}$ بالنظام العشري؟

11. حول العدد 315 إلى النظام الثنائي؟

12. حول العدد 229 إلى النظام الثنائي؟

13. حول العدد العشري 336 إلى النظام الثنائي؟

14. حول العدد العشري 360 إلى النظام الثنائي ؟

15. حول العدد 260 إلى النظام الثماني؟

16. حول العدد 1969 إلى النظام الثماني؟

17. حول العدد العشري 365 إلى النظام الثماني؟

18. حول العدد العشري 368 إلى النظام الثماني؟

19. حول العدد 1986 إلى النظام السادس عشر؟

20. حول العدد 282 إلى النظام السادس عشر؟

21. حول العدد 1255 إلى النظام السادس عشر؟

22. حول العدد العشري 376 إلى النظام السادس عشر؟

23. حول العدد العشري 3864 إلى النظام السادس عشر؟

24. حول العدد $(111000101)_2$ إلى النظام الثماني.

25. حول العدد $(275)_8$ إلى النظام الثنائي.

26. حول العدد الثماني $(554)_8$ إلى النظام الثنائي؟

27. حول العدد الثنائي $(101101101)_2$ إلى النظام الثماني؟

28. حول العدد $(1111100011)_2$ إلى النظام السادس عشر.

29. حول العدد $(2F15)_{16}$ إلى النظام الثنائي.

30. حول العدد السادس عشر $(A69C)_{16}$ إلى النظام الثنائي؟

31. حول العدد الثنائي $(101001101)_2$ إلى النظام السادس عشر؟

32. حول العدد $(5775)_8$ إلى النظام السادس عشر.

33. حول العدد $(97ED)_{16}$ إلى النظام الثماني.

34. حول العدد $(88FA)_{16}$ إلى النظام الثماني.

35. أوجد تحليل العدد العشري $(5294.389)_{10}$ طبقا لقيم مواضعه.

36. حول العدد الثنائي $(10.01011)_2$ إلى النظام العشري ؟

37. حول العدد الثنائي $(1100.0111)_2$ إلى النظام العشري؟

38. حول العدد الثنائي $(11101.011)_2$ إلى النظام العشري؟

39. حول العدد $(11011.011)_2$ إلى النظام العشري.

40. حول العدد الثماني $(735.75)_8$ إلى النظام العشري؟

41. حول العدد الثماني $(66.214)_8$ إلى النظام العشري؟

42. حول العدد الثماني $(564.244)_8$ إلى النظام العشري؟

43. حول العدد $(276.72)_8$ إلى النظام العشري.

44. حول العدد السادس عشر $(A.4B)_{16}$ إلى النظام العشري؟

45. حول العدد السادس عشر $(E3D.EA)_{16}$ إلى النظام العشري؟

46. حول العدد السادس عشر $(E6D.CB)_{16}$ إلى النظام العشري؟

47. حول العدد $(C5A.D4)_{16}$ إلى النظام العشري.

48. حول العدد 46.275 إلى النظام الثنائي.

49. حول العدد 10.0545 إلى النظام الثنائي.

50. حول العدد العشري 3195100. إلى النظام الثنائي؟

51. حول العدد العشري 67525. إلى النظام الثنائي؟

52. حول العدد 0.695 إلى النظام الثماني.

53. حول العدد 0.897 إلى النظام الثنائي.

54. حول العدد العشري 12538. إلى النظام الثنائي؟

55. حول العدد العشري 685 464. إلى النظام الثنائي؟

56. حول العدد 0.922 إلى النظام الثماني.

57. حول العدد العشري .4825324 إلى النظام الثماني؟

58. حول الكسر العشري .91850 إلى النظام السادس عشر؟

59. حول الكسر العشري .78550 إلى النظام السادس عشر؟

60. حول العدد 260.065 إلى النظام السادس عشر.

61. حول العدد العشري .3165306 إلى النظام السادس عشر؟

62. حول العدد العشري .6815560 إلى النظام السادس عشر؟

63. حول العدد $(542.317)_8$ إلى النظام الثنائي.

64. حول العدد $(1011001.1001)_2$ إلى النظام الثماني.

65. حول العدد $(110110110.1010)_2$ إلى النظام الثماني.

66. حول العدد $(742.345)_8$ إلى النظام الثنائي.

67. حول العدد الثماني $(654.625)_8$ إلى النظام الثنائي؟

68. حول العدد الثماني $(514.125)_8$ إلى النظام الثنائي؟

69. حول العدد الثنائي $(10.110010111)_2$ إلى النظام الثماني؟

70. حول العدد الثنائي $(1011011.1010101)_2$ إلى النظام الثماني؟

71. حول العدد $(F9C.A1BD)_{16}$ إلى النظام الثنائي.

72. حول العدد $(111010101.10111)_2$ إلى النظام السادس عشر.

73. حول العدد $(11010110111.10101010)_2$ إلى النظام السادس عشر.

74. حول العدد $(1101001.101)_2$ إلى النظام السادس عشر.

75. حول العدد السادس عشر $(90.B9D)_{16}$ إلى النظام الثنائي؟

76. حول العدد السادس عشر $(F6C.B5D)_{16}$ إلى النظام الثنائي؟

77. حول العدد الثنائي $(110.10110101)_2$ إلى النظام السادس عشر؟

78. حول العدد الثنائي $(10110101.101011101)_2$ إلى النظام السادس عشر؟

79. حول العدد $(523.762)_8$ إلى النظام السادس عشر.

80. حول العدد $(2AC.29D)_{16}$ إلى النظام الثماني.

81. إحسب $(101)_2 + (1001)_2$

82. إحسب $(101011)_2 + (1001)_2$

83. إحسب $(1011)_2 + (11100)_2$

84. إحسب $(1101011)_2 + (1110101)_2$

85. إحسب $(11011)_2 + (110011)_2$

86. إحسب $(10101)_2 + (1011101)_2$

87. إحسب $(1101.101)_2 + (101.1101)_2$

88. إحسب $(1011.0111)_2 + (10011.101)_2$

89. إحسب $(11101)_2 + (1101)_2 + (1010)_2$

90. إحسب $(10110)_2 + (1001)_2 + (1010)_2$

91. إحسب $(10101)_2 + (10010)_2 + (11001)_2$

92. أوجد $(1011)_2 + (11011001)_2$

93. أوجد $(10101.101)_2 + (110.111)_2$

94. إحسب $(10101)_2 - (101)_2$

95. إحسب $(1001110)_2 - (11010)_2$

96. إحسب $(1101001)_2 - (11011)_2$

97. إحسب $(110101)_2 - (10101)_2$

98. إحسب $(111100)_2 - (10110)_2$

99. إحسب $(10101)_2 - (1110)_2$

100. إحسب $(1111.01)_2 - (101.111)_2$

101. إحسب $(1101)_2 - (110)_2$

102. إحسب $(11001)_2 - (1011)_2$

103. إحسب $(100110)_2 - (1011)_2$

104. إحسب $(1110011)_2 - (11011)_2$

105. إحسب $(1110110)_2 - (1110)_2$

106. أوجد $(111110)_2 - (10101)_2$

107. أوجد $(10111100)_2 - (1011011)_2$

108. أوجد $(101100.11)_2 - (1101.01)_2$

109. إحسب $(110110)_2 \times (1010)_2$

110. إحسب $(1101)_2 \times (111)_2$

111. إحسب $(1101)_2 \times (10011)_2$

112. إحسب $(1101)_2 \times (10110)_2$

113. إحسب $(1011101)_2 \times (101)_2$

114. إحسب $(100.1)_2 \times (110.1)_2$

115. إحسب $(11.01)_2 \times (110.1)_2$

116. إحسب $(11101)_2 \times (101)_2$

117. أوجد $(1111)_2 \times (1001)_2$

118. أوجد $(11001)_2 \times (1001)_2$

119. أوجد $(1011.011)_2 \times (11.011)_2$

120. إحسب $(1011010)_2 \times (10111)_2$

121. أوجد $(11100111111)_2 \div (110101)_2$

122. أوجد $(10000001010)_2 \div (101111)_2$

123. إحسب $(100111110110000)_2 \div (10010110)_2$

124. إحسب $(110011010101)_2 \div (1001001)_2$

125. إحسب $(1111101001000)_2 \div (10001111)_2$

126. إحسب $(10011100110000)_2 \div (10000100)_2$

127. إحسب $(10101110100100001000)_2 \div (10001011000)_2$

128. إحسب $(1010001000)_2 \div (100100)_2$

129. إحسب $(11.01)_2 \div (1.01)_2$

130. إحسب $(1000.11)_2 \div (10.1)_2$

131. إحسب $(335)_8 + (557)_8$

132. إحسب $(707)_8 + (616)_8$

133. إحسب $(707)_8 + (123)_8$

134. إحسب $(512.324)_8 + (743.45)_8$

135. أوجد $(542)_8 + (3345)_8$

136. أوجد $(6154)_8 + (1352)_8$

137. أوجد $(7367)_8 + (2056)_8$

138. أوجد $(17643)_8 + (35451)_8$

139. أوجد $(42652)_8 + (35612)_8$

140. إحسب $(7001)_8 - (637)_8$

141. إحسب $(71)_8 - (22.53)_8$

142. إحسب $(653)_8 - (521)_8$

143. إحسب $(7765)_8 - (466)_8$

144. إحسب $(6552)_8 - (1443)_8$

145. أوجد $(5077)_8 - (1532)_8$

146. أوجد $(1645)_8 - (1256)_8$

147. أوجد $(10062)_8 - (1327)_8$

148. إحسب $(650)_8 \times (75)_8$

149. إحسب $(153)_8 \times (151)_8$

150. إحسب $(2051)_8 \times (134)_8$

151. إحسب $(337)_8 \times (64)_8$

152. إحسب $(3.6)_8 \times (1.05)_8$

153. إحسب $(0.66)_8 \times (6.5)_8$

154. إحسب $(2012)_8 \div (57)_8$

155. إحسب $(3477)_8 \div (65)_8$

156. إحسب $(47660)_8 \div (226)_8$

157. إحسب $(6325)_8 \div (111)_8$

158. إحسب $(17510)_8 \div (217)_8$

159. إحسب $(23460)_8 \div (204)_8$

160. إحسب $(2564410)_8 \div (2130)_8$

161. إحسب $(6AD)_{16} + (25A)_{16}$

162. إحسب $(F6F)_{16} + (ABC)_{16}$

163. حسب $(930.BA)_{16} + (BAC.0C)_{16}$

164. أوجد $(5C4)_{16} + (3AC)_{16}$

165. أوجد $(1AB)_{16} + (FE9)_{16}$

166. أوجد $(A2D)_{16} + (7BF)_{16}$

167. أوجد $(3F3A)_{16} + (A54D)_{16}$

168. أوجد $(ABCD)_{16} + (7AE4)_{16}$

169. إحسب $(AED)_{16} - (8C6)_{16}$

170. إحسب $(8BE)_{16} - (7DA)_{16}$

171. إحسب $(F345.216)_{16} - (ABC.DEA)_{16}$

172. أوجد $(D67C)_{16} - (31AC)_{16}$

173. أوجد $(F2221)_{16} - (765A)_{16}$

174. أوجد $(D16B)_{16} - (A2C9)_{16}$

175. إحسب $(A14)_{16} \times (2A)_{16}$

176. إحسب $(D1.19)_{16} \times (21.AC)_{16}$

177. إحسب $(40A)_{16} \div (2F)_{16}$

178. إحسب $(73F)_{16} \div (35)_{16}$

179. إحسب $(4FB0)_{16} \div (96)_{16}$

180. إحسب $(CD5)_{16} \div (49)_{16}$

181. إحسب $(1F48)_{16} \div (8F)_{16}$

182. إحسب $(2730)_{16} \div (84)_{16}$

183. إحسب $(AE908)_{16} \div (458)_{16}$

184. إحسب $(3264)_{16} \div (5)_{16}$

185. إحسب $(980511)_{16} \div (ED)_{16}$

186. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1000)_2 + (1001)_2$

187. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1111)_2 + (1011)_2$

188. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(-1001)_2 + (-1011)_2$

189. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(-101011)_2 + (-1110)_2$

190. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(11000)_2 - (101)_2$

191. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(11100)_2 - (101)_2$

192. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(11101)_2 - (1111)_2$

193. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(110011)_2 - (1101)_2$

194. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1110011)_2 - (1011)_2$

195. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(100111)_2 - (1110)_2$

196. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(0.111)_2 + (-0.101)_2$

197. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(1011.11)_2 + (-1.001)_2$

198. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(-1000)_2 + (111)_2$

199. بإستخدام المكمل الأول إحسب $(-1010)_2 + (111)_2$

200. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1000)_2 + (1001)_2$

201. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1111)_2 + (1011)_2$

202. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-1001)_2 + (-1011)_2$

203. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-101011)_2 + (-1110)_2$

204. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(11000)_2 - (101)_2$

205. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(11100)_2 - (101)_2$

206. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(11101)_2 - (1111)_2$

207. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(110011)_2 - (1101)_2$

208. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1110011)_2 - (1011)_2$

209. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(100111)_2 - (1110)_2$

210. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(0.111)_2 + (-0.101)_2$

211. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(1011.11)_2 + (-1.001)_2$

212. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-1000)_2 + (111)_2$

213. بإستخدام المكمل الثاني إحسب $(-1010)_2 + (111)_2$

214. بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1011)_2 \times (111)_2$

215. بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1101)_2 \times (100)_2$

216. بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1011)_2 \times (1010)_2$

217. بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(10001)_2 \times (1101)_2$

218. بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1101)_2 \times (1011)_2$

219. بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(10101)_2 \times (1011)_2$

220. بإستخدام إسلوب الإزاحة إحسب $(1010)_2 \times (10011)_2$

الفصل الثاني

المنطق الرياضي

Mathematical logic

(2-1) الجمل المنطقية

(2-2) أدوات الربط

(2-3) الجمل الصحيحة والمتناقضة

(2-4) البراهين الرياضية

(2-5) المحاورات

(2-6) الجمل المفتوحة

(2-7) دوائر المفاتيح الكهربائية

تمارين

الفصل الثاني

المنطق الرياضي

(2-1) الجمل المنطقية

يوجد نوعيتين من الجمل المنطقية هما الجملة البسيطة والجملة المركبة حيث:

1. الجملة المنطقية البسيطة Simple Logic Statement

هي جملة خبرية مفيدة تحمل بصورة واضحة وحيدة خبر صحيح أو خطأ وليس كلاهما معاً وتكون فيها قيمة الصواب هي صائب True=T=1 إذا كانت الجملة صحيحة أما إذا كانت الجملة المنطقية غير صحيحة فإن قيمة الصواب هي خطأ False=F=0 .

ملاحظة:

الجمل الإستفهامية والجمل الأمرية لا تعتبر جمل منطقية.

مثال:

- عمان عاصمة الأردن — جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها T
- عمان عاصمة ليبيا — جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها F
- 8 هو عدد زوجي — جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها T
- 6 تقبل القسمة على 3 — جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها T
- كم عدد الطلاب في المدرسة؟ — ليست جملة منطقية
- متى تبدأ المباراة؟ — ليست جملة منطقية
- X+7=0 — ليست جملة منطقية
- -7+7=0 — جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها T
- +7=11 — جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها F
- =5+2 — ليست جملة منطقية

- $X>7$ ليست جملة منطقية
- $88 > 79$ جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها T
- $(\forall x \in \mathbb{Z}, x>7)$ جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها F
- $(\exists x \in \mathbb{Z}, x>7)$ جملة منطقية بسيطة وقيمة الصواب لها T
- إجمع العددين 5 و 7 ليست جملة منطقية
- ما أجمل الزهور! ليست جملة منطقية
- هو طالب في المستوى الأول ليست جملة منطقية

2. الجملة المنطقية المركبة

هي جملة منطقية ناتجة عن عدة جمل منطقية بسيطة مرتبطة مع بعضها بواسطة أداة من أدوات الربط أو الفصل أو الشرط.

مثال:

- سألتحق بكلية العلوم أو كلية الهندسة.
- إبن سينا و الخوارزمي كلاهما عالم رياضيات.
- إذا ذهبت إلى السوق فسوف أشتري التفاح.
- سأشتري سيارة جديدة إذا وفقط إذا كان معي ثمنها.

ملاحظة: يمكن نفي العبارة المنطقية p بإستخدام ~p وبالتالي يمكن تكوين جدول يسمى جدول الصواب:

p	~p
T	F
F	T

(2-2) أدوات الربط

نستخدم أدوات الربط للربط بين جملتين منطقيتين أو أكثر ومنها:

(2-2-1) أداة الربط "و" and "$\wedge$"

وهي أداة وصل (عطف) Conjunction بين جملتين p و q ويكون نتيجتها p$\wedge$q وقيمة صوابها إنها تكون صحيحة فقط عندما تكون الجملتين p وq صحيحتان معا وتكون خاطئة في غير ذلك كما يوضح جدول الصواب التالي:

p	q	p$\wedge$q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال: عبر عن الجمل الأتية بإستخدام الرموز المنطقية:

أ. ذهبت إلى السوق وإشتريت الفاكهة.

ب. ذهبت إلى السوق ولم أشتري الفاكهة.

ج. لم أذهب إلى السوق ولم أشتري الفاكهة.

الحل:

نضع الجملة "ذهبت إلى السوق" باستخدام p ونضع الجملة "أشتريت الفاكهة" بإستخدام q وبالتالي:

أ. p$\wedge$q

ب. p$\wedge$~q

ج. ~p$\wedge$~q

(2-2-2) أداة الربط "أو" V

وهي أداة فصل Disjunction بين جملتين p وq ويكون نتيجتها pVq وقيمة صوابها إنها تكون خاطئة فقط عندما تكون الجملتين p وq خاطئتين معا وتكون صحيحة في غير ذلك كما يوضح جدول الصواب التالي:

p	q	pVq
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال: ضع الجمل الأتية بدلالة الرموز المنطقية:

أ. سوف أشتري برتقال أو تفاح.

ب. لن أشتري برتقال أو سوف أشتري تفاح.

ج. لن أشتري برتقال أو تفاح.

الحل:

نضع الجملة "سوف أشتري برتقال" بإستخدام p ونضع الجملة "سوف أشتري تفاح" بإستخدام q وبالتالي:

أ. pVq

ب. ~pVq

ج. ~pV~q

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين فإكتب قيم جدول الصواب للجملة المركبة:

pV(~pΛq)

الحل:

p	q	~p	~pΛq	pV(~pΛq)
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

مثال: إذا كانت p, q, r ثلاث جمل منطقية فإكتب قيم جدول الصواب للعبارة:

$p \wedge (\sim q \vee r)$

الحل:

p	q	r	~q	~q ∨ r	p ∧ (~q ∨ r)
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F

(2-2-3) أداة الربط "إذا كان ... فإن .... "

وهي أداة شرط conditional statement تربط بين جملتين p و q ويكون نتيجتها الجملة المنطقية 'إذا كانت p فإن q' وتكتب (p→q) ونسمي p الشرط ونسمي q جواب الشرط وأما قيمة صواب الجملة المركبة p→q فإنها تكون خاطئة فقط إذا كان الشرط صحيح والجواب خاطئ وتكون صحيحة في غير ذلك كما يوضح جدول الصواب التالي:

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال: ضع الجمل التالية بدلالة الرموز:

أ. إذا إستلمت المكافئة فسوف أشتري سيارة جديدة.

ب. إذا لم أستلم المكافئة فسوف أشتري سيارة جديدة.

ج. إذا لم أستلم المكافئة فلن أشتري سيارة جديدة.

الحل:

نضع الجملة البسيطة 'إستلمت المكافئة' بإستخدام p والجملة 'أشترى سيارة جديدة' بإستخدام q وبالتالي:

أ. $p \to q$

ب. $\sim p \to q$

ج. $\sim p \to \sim q$

مثال: إحسب قيمة الصواب في الجملة المركبة:إذا كانت 2 عدد فردي فإن 9 تكون عدد أولي

الحل:

نضع الجملة البسيطة "2 عدد فردي" بإستخدام p والجملة "9 تكون عدد أولي" بإستخدام q وبالتالي جدول الصواب هو:

p	q	$p \to q$
F	F	T

وبالتالي فهي جملة صائبة لأن الشرط فيها مستحيل (خاطئ) .

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين فإكتب قيم جدول الصواب للجملة المركبة:

$(p \wedge q) \to (p \vee q)$

الحل:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين فإكتب قيم جدول الصواب للجملة المركبة:

$(p \wedge q) \to (\sim p \wedge q)$

الحل:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$(p \wedge q) \to (\sim p \wedge q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين إكتب ثم جدول الصواب للجملة المركبة:

$((p \to q) \to p) \to p$

الحل:

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\to p$	$((p\to q)\to p)\to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

(2-2-4) أداة الربط "... إذا وفقط إذا ...."

وهي أداة شرط مذدوجة تربط بين جملتين p وq ويكون نتيجتها الجملة المنطقية "p إذا وفقط إذا q" وتكتب $(p\leftrightarrow q)$ وهي تكون صحيحة عندما تكون الجملتان p و q صحيحتان معاً أو خاطئتان معاً وعدا ذلك تكون خاطئة.

وأما قيمة صواب الجملة المركبة $p\leftrightarrow q$ فإنها تساوي $(p\to q)\wedge(q\to p)$ كما يوضح ذلك جدول الصواب التالي:

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\to q$	$q\to p$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

مثال: ضع الجمل التالية بدلالة الرموز:

أ. سوف أشتري سيارة جديدة إذا وفقط إذا استلمت المكافئة.

ب. سوف لن أشتري سيارة جديدة إذا وفقط إذا استلمت المكافئة.

ج. سوف لن أشتري سيارة جديدة إذا وفقط إذا لم استلم المكافئة.

الحل:

نضع الجملة البسيطة "أشتري سيارة جديدة" باستخدام p والجملة "استلمت المكافئة" باستخدام q وبالتالي:

أ. $p\leftrightarrow q$

ب. $\sim p\leftrightarrow q$

ج. $\sim p\leftrightarrow \sim q$

ملاحظة: إذا كانت $q \leftrightarrow p$ جملة صحيحة فإننا في هذه الحالة نقول أن p تكافئ q وتكتب

$p = q$

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين فإكتب قيم جدول الصواب للجملة المركبة

$(\sim p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

الحل:

p	q	~p	~q	~p→~q	~pV~q	(~p→~q)↔ (~pV~q)
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين فبإستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$p \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$

الحل:

p	q	p→q	(p→q)→p	p↔ (p→q)→p
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

من العمود الخامس نجد أن $p \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow p$.

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين فبإستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$

الحل:

p	q	p→q	~p	~pVq	(p → q) ≡ ~p V q
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

من العمود السادس نجد أن $(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$.

مثال: ليكن p وq جملتين منطقيتين فبإستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

الحل:

p	q	p↔q	~p	~q	~p↔~q
T	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

من العمود الثالث والعمود السادس نجد أن $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ صحيحة منطقيا مع ملاحظة إننا إكتفينا بالصفين المكتوبين فقط لأن $p \leftrightarrow q$.

مثال: إذا كانت p و q و r ثلاث جمل منطقية فإكتب قيم جدول الصواب للجملة المركبة

$(r \vee q) \wedge p \leftrightarrow (r \wedge p) \vee (q \wedge p)$

الحل:

p	q	r	q∨r	p∧q	p∧r	p∧(q∨r)	(p∧q)∨(p∧r)	(r ∨ q) ∧ p ↔ (r ∧ p) ∨ (q ∧ p)
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

(2-2-5) اداة الربط "XOR" "إحداهما وليس كلاهما"

وهي تستخدم كعلاقة شرطية تعرف على أن إذا كان p, q تقريرين فإن p XOR q تكون صحيحة T إذا كانت p, q مختلفان وتكون خاطئة F إذا كانت p, q متشابهان ويرمز لها بالرمز ⊕ ويمكن تعريف XOR بجدول الصواب الآتي:

p	q	p ⊕ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال: إثبت أن:

1. $p \oplus p \equiv p \wedge \sim p$
2. $p \oplus \sim p \equiv p \vee \sim p$
3. $p \oplus q \equiv \sim p \wedge \sim q$
4. $p \oplus q \equiv (p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow p)$
5. $p \oplus q \equiv [\sim(p \wedge q)] \wedge (p \vee q)$

الحل:

أولاً: بإستخدام جدول الصواب:

p	~p	p ⊕ p	p∧~p
T	F	F	F
F	T	F	F

من العمود الثالث والرابع ينتج التكافؤ.

ثانياً: بإستخدام جدول الصواب:

p	~p	p ⊕ (~ p)	p∨~p
T	F	T	T
F	T	T	T

من العمود الثالث والرابع ينتج التكافؤ.

ثالثاً: بإستخدام جدول الصواب:

p	q	~p	~q	p ⊕ q	~p ⊕ ~q
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T

من العمود الخامس والسادس ينتج التكافؤ.

رابعا: بإستخدام جدول الصواب:

p	q	~p	~q	p ⊕ q	p→~q	~q→p	(p→~q)∧(~q→p)
T	T	F	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F	F

من العمود الخامس والثامن ينتج التكافؤ.

خامسا: من الفقرة الرابعة:

$$p \oplus q \equiv (p \to \sim q) \land (\sim q \to p) \equiv (\sim p \lor \sim q) \land (q \lor p)$$

$$\equiv [\sim(p \land q)] \land (p \lor q)$$

(2-3) الجمل الصحيحة والمتناقضة

يقال للجملة المنطقية بأنها صحيحة منطقياً إذا أخذت القيمة T لجميع الإحتمالات الممكنة التي تظهر في جدول الصواب لهذه الجملة ويقال أنها متناقضة أو خاطئة منطقياً إذا أخذت القيمة F لجميع الإحتمالات الممكنة التي تظهر في جدول الصواب لهذه الجملة وفي العادة نرمز بالرمز U للجملة الصحيحة منطقيا وبالرمز O للجملة المتناقضة منطقيا.

مثال: صنف الجمل الأتية من حيث أنها صحيحة منطقياً أم خاطئة منطقياً أم غير ذلك:

1. محمد غني أو فقير.
2. محمد غني وفقير.

الحل:

نضع الجملة البسيطة "محمد غني" بالرمز p ثم نكون جدول الصواب للجملة الأولى:

p	~p	p∨~p
T	F	T
F	T	T

إذن الجملة الأولى صحيحة منطقيا.

ثم نكون جدول الصواب للجملة الثانية:

p	~p	p∧~p
T	F	F
F	T	F

إذن الجملة الثانية غير صحيحة منطقيا (متناقضة).

مثال: صنف الجمل الأتية من حيث كونها صحيحة منطقيا أو متناقضة:

1. $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

2. $\sim p \rightarrow p \vee q$

الحل:

نكون جدول الصواب لكلا الجملتين:

P	q	~p	p∧q	p∨q	p∧q→p∨q	~p→p∨q
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F

وبالتالي تكون الجملة الأولى صحيحة منطقيا بينما تكون الجملة الثانية ليست صحيحة منطقيا و لا متناقضة.

مثال: صنف الجمل الأتية من حيث كونها صحيحة منطقيا أو متناقضة:

1. $p \wedge \sim p \rightarrow q$

2. $\sim [p \wedge \sim p \rightarrow q]$

الحل:

نكون جدول الصواب:

p	q	~p	p∧~p	p∧~p→q	~[p∧~p→q]
T	T	F	F	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F

وبالتالي تكون الجملة الأولى صحيحة منطقيا بينما تكون الجملة الثانية متناقضة منطقيا.

مثال: صنف الجملة الأتية من حيث كونها صحيحة منطقياً أو متناقضة:

$\sim p \rightarrow (p \vee q)$

الحل:

نكون جدول الصواب:

p	q	~p	pVq	~p→(pVq)
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

وبالتالي تكون الجملة ليست صحيحة منطقياً ولا خاطئة منطقيا .

مثال: إثبت أن $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

الحل:

نكون جدول الصواب

p	q	~p	~ q	p→q	(p→q)∧~q	[(p→q)∧~q]→~p
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

من العمود السابع نجد أن الجملة $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ تكون صحيحة منطقياً.

مثال: إثبت أن

$[p \wedge \sim q] \rightarrow [\sim p \vee \sim q]$

الحل:

نكون جدول الصواب

p	q	~p	~ q	p∧~q	~pV~q	[p∧~q]→[~pV~q]
T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

من العمود السابع نجد أن الجملة $[p \wedge \sim q] \rightarrow [\sim p \vee \sim q]$ تكون صحيحة منطقياً.

مثال: إثبت أن:

$q \rightarrow (p \vee \sim p)$

الحل:

نكون جدول الصواب:

p	q	~p	pV~p	q→(pV~p)
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

وبالتالي تكون الجملة صحيحة منطقياً.

ملاحظة: الجملة المنطقية p تكافئ منطقيا الجملة q ونرمز لذلك ب $p \Leftrightarrow q$ أو $p \equiv q$ إذا كانت الجملة الشرطية المذدوجة $p \leftrightarrow q$ صحيحة منطقيا ويتحقق ذلك إذا كانت الجملتان p وq صائبتان معا أو خاطئتان معا وفي هذه الحالة يكون جدول الصواب القضية p ينطبق مع جدول صواب القضية q .

مثال: إثبت أن $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

الحل:

نكون جدول الصواب

p	q	~p	p→q	~pVq	(p→q)↔(~pVq)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

من العمود السادس نجد أن الجملة $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ تكون صحيحة منطقيا و كذلك نلاحظ أن العمود الرابع يطابق العمود الخامس.

مثال: إثبت أن العبارتان التاليتان متكافئتان:

- السلع الجيدة تكون غالية.
- السلع الرخيصة تكون رديئة.

الحل:

نسمي الجملة البسيطة "السلع الجيدة" بالرمز p والجملة البسيطة "السلع الرخيصة" بالرمز q وبالتالي تكون العبارة الأولى هي: $p\to\sim q$ بينما تكون العبارة الثانية هي: $q\to\sim p$ ثم نكون جدول الصواب التالي:

p	q	~p	~q	p→~q	q→~p
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

من العمود (5) والعمود (6) ينتج التكافؤ.

مثال: إثبت أن:

$$(p \wedge q) \to (\sim q \vee p)$$

الحل:

نكون جدول الصواب:

p	q	p∧q	~q	~q∨p	(p∧q)→(~q∨p)
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	T

إذن من العمود الأخير نجد أن $(p\wedge q)\to(\sim q\vee p)$ هي عبارة صحيحة منطقيا.

مثال: إثبت أن:

$$[(p \to (q \wedge r)) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \to \sim p$$

الحل:

نأخذ X هي الجملة $(p \to (q \wedge r)) \wedge (\sim q \vee \sim r)$ ثم نكون جدول الصواب:

p	q	r	~p	~q	~r	q∧r	p→(q∧r)	~q∨~r	X	X→~p
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T	T	T

إذن من العمود الأخير نجد أن $[(p \to (q \land r)) \land (\sim q \lor \sim r)] \to \sim p$ هي عبارة صحيحة منطقيا.

مثال: إثبت أن

$$[(p \land \sim q) \to r] \equiv [p \to (q \lor r)]$$

الحل:

نأخذ X هي الجملة $(p \land \sim q) \to r$ و نأخذ Y هي الجملة $[p \to (q \lor r)]$ ثم نكون جدول الصواب:

p	q	r	q∨r	~q	p∧~q	p → (q ∨ r)	(p ∧ ~q) → r	X≡Y
T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	T	T	T

إذن من العمود الأخير نجد أن $[(p \land \sim q) \to r] \equiv [p \to (q \lor r)]$ هي عبارة صحيحة منطقياً.

مثال: إثبت أن

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to [p \to r]$$

الحل:

نضع X هي $(p \to q) \land (q \to r)$ ثم نكون جدول الصواب:

p	q	r	p→q	q→r	X	p→r	X→(p→r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

إذن من العمود الأخير نجد أن $[(p \to q) \land (q \to r)] \to [p \to r]$ هي عبارة صحيحة منطقيا.

(2.3.1) **نظرية:** إذا كانت p جملة منطقية فإن:

1. $p \land p = p$
2. $p \lor p = p$
3. $\sim p \land p \equiv 0$
4. $\sim p \lor p \equiv U$
5. $p \lor U \equiv U$
6. $p \land U \equiv p$
7. $p \land 0 \equiv 0$
8. $p \lor 0 \equiv p$

البرهان:

بإستخدام جدول الصواب:

p	~p	O	U	p∧p	p∨p	~p∧p	~p∨p	p∨U	p∧U	p∧O	p∨O
T	F	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	F	F	T	T	F	F	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

1. من العمود (1) و العمود (5) نجد أن $p \land p \equiv p$
2. من العمود (1) و العمود (6) نجد أن $p \lor p \equiv p$
3. من العمود (3) و العمود (7) نجد أن $\sim p \land p \equiv 0$
4. من العمود (4) و العمود (8) نجد أن $\sim p \lor p \equiv U$
5. من العمود (4) و العمود (9) نجد أن $p \lor U \equiv U$
6. من العمود (1) و العمود (10) نجد أن $p \land U \equiv p$
7. من العمود (3) و العمود (11) نجد أن $p \land 0 \equiv 0$
8. من العمود (1) و العمود (12) نجد أن $p \lor 0 \equiv p$

(2.3.2) نظرية دي مورجان: إذا كانت p و q جملتين منطقيتين فإن:

1. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

البرهان:

بإستخدام جدول الصواب:

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p∨~q	p∨q	~(p∨q)	~p∧~q
T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	F	T	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

من العمود (6) و (7) نجد أن $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

ومن العمود (9) و (10) نجد أن $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(2.3.3) نظرية: إذا كانت p و q و r ثلاث جمل منطقية فإن:

1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
2. $p \vee q \equiv q \vee p$
3. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
5. $(r \wedge p) \vee (q \wedge p) \equiv (r \vee q) \wedge p$
6. $(r \vee p) \wedge (q \vee p) \equiv (r \wedge q) \vee p$

البرهان:

إثبات (3): بإستخدام جدول الصواب:

p	q	r	p∧q	q∧r	p∧(q∧r)	(p∧q) ∧ r
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

من العمود (6) و (7) نجد أن $p\wedge(q\wedge r) \equiv (p\wedge q) \wedge r$

إثبات (5): بإستخدام جدول الصواب:

p	q	r	qVr	pΛq	pΛr	pΛ(qVr)	(pΛq) V (pΛr)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

من العمود (7) و (8) نجد أن $(p\wedge q) \vee (p\wedge r) \equiv p\wedge(q\vee r)$

والباقي متروك كتمرين.

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$$(p \wedge q) \vee [\sim p \wedge (\sim q \vee p \vee q)] \equiv q \vee \sim p$$

الحل:

$$(p \wedge q) \vee [\sim p \wedge (\sim q \vee p \vee q)] \equiv (p \wedge q) \vee [\sim p \wedge (U \vee p)]$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee [\sim p \wedge U] \equiv (p \wedge q) \vee [\sim p] \equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)$$

$$\equiv U \wedge (q \vee \sim p) \equiv q \vee \sim p$$

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$$(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv r$$

الحل:

$$(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$$\equiv \big((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r)\big) \vee (q \wedge r)$$

$$\equiv \big(U \wedge (\sim q \wedge r)\big) \vee (q \wedge r) \equiv (\sim q \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv (\sim q \vee q) \wedge r$$

$$\equiv U \wedge r \equiv r$$

ملاحظة: لقد أثبتنا فيما سبق العبارة المنطقية $(p\to q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ وسوف نستخدم هذه النتيجة في المثال القادم:

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv q \leftrightarrow p$$

الحل:

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv [(p \wedge q) \vee \sim p] \wedge [(p \wedge q) \vee \sim q]$$

$$\equiv [(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)] \wedge [(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q)]$$

$$\equiv [U \wedge (q \vee \sim p)] \wedge [(p \vee \sim q) \wedge U]$$

$$\equiv (q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$$

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \rightarrow s \equiv [\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)] \vee s$$

الحل:

$$[\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)] \vee s \equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r)] \vee s$$

$$\equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r)] \vee s \equiv \sim[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \vee s$$

$$\equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \rightarrow s$$

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب بسط $\sim(p \wedge \sim q)$

الحل:

$$\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim(\sim q) \equiv \sim p \vee q$$

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب بسط $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$

الحل:

بما أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

إذن:

$$\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \equiv \sim(\sim(\sim p) \vee \sim q) \equiv \sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim q) \equiv \sim p \wedge q$$

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب بسط $\sim(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

الحل:

بما أن

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

إذن:

$\sim(p\wedge q)\wedge(\sim p\vee q)\equiv(\sim p\vee\sim q)\wedge(\sim p\vee q)\equiv\sim p\vee(\sim q\wedge q)\equiv\sim p\vee O\equiv O$

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب بسط $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)$

الحل:

$\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv\sim p\wedge(\sim q\vee q)\equiv\sim p\wedge U\equiv\sim p$

مثال: بدون إستخدام جدول الصواب بسط $\sim(\sim p\rightarrow\sim q)$

الحل:

$\sim(\sim p\rightarrow\sim q)\equiv\sim[\sim(\sim p)\vee\sim q]\equiv\sim[p\vee\sim q]\equiv\sim p\wedge\sim(\sim q)\equiv\sim p\wedge q\equiv\sim(p\vee\sim q)\equiv\sim(q\rightarrow p)$

(2-4) البراهين الرياضية

المبرهنة الرياضية هي عبارة عن جملة منطقية بسيطة أو جملة منطقية مركبة وفي العـادة هي تتكون من فرض صحيح (متحقق) p مما يؤدي إلى حصول النتيجة q والبرهان الرياضي هو إثبات أن الجملة المنطقية $p \rightarrow q$ تكون صحيحة منطقيا وهذا يحصل إذا كانت q يجب أن تكون صحيحة منطقيا ولإثبات ذلك فإننا من الممكن أن نستخدم أساليب البراهين التالية:

(2-4-1) البرهان المباشر Direct proof

وفيه نفرض صحة الفرض p مما يؤدي بالتتابع إلى صحة النتيجة q.

مثال: برهن أنه إذا كانت $xy = 3$ فإن $(x+y)^2-(x-y)^2 = 12$

الحل:

$(x+y)^2-(x-y)^2=[x^2+2xy+y^2]-[x^2-2xy+y^2]=4xy$

وبوضع $xy = 3$ نحصل على:

$(x+y)^2-(x-y)^2=(4)(3)=12$

مثال: إثبت أنه إذا كانت x و y عددان حقيقيان بحيث $x<1$ و $y<1$ فإن $x+y<2$؟

الحل:

وبالجمع المباشر للمتباينتين $x<1$ و $y<1$ نحصل على $x+y<2$.

مثال: برهن أن مربع أي عدد فردي يكون أيضا عدد فردي؟

الحل:

إذا كانت n عدد فردي فإن $n=2k+1$ و $k\in\mathbb{Z}$ فإن:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

وبوضع $2k^2 + 2k = m$ نحصل على $n^2 = 2m + 1$ و $m\in\mathbb{Z}$

إذن n^2 عدد فردي.

مثال: إثبت أن $n^2 + n$ هي عدد زوجي لكل عدد صحيح $n \geq 0$

الحل:

إذا كانت n عدد صحيح فإنه يوجد لدينا حالتان:

الحالة الأولى: n عدد فردي إذن n+1 عدد زوجي وبالتالي $n^2 + n = n(n+1)$ يكون عدد زوجي.

الحالة الثانية: n عدد زوجي إذن n+1 عدد فردي وبالتالي $n^2 + n = n(n+1)$ يكون عدد زوجي.

مثال: برهن أنه إذا كان n عدد أولي فإن n+7 عدد غير أولي.

البرهان:

يوجد لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كانت n عدد أولي زوجي فإن n=2 وبالتالي n+7=9 هو عدد غير أولي.

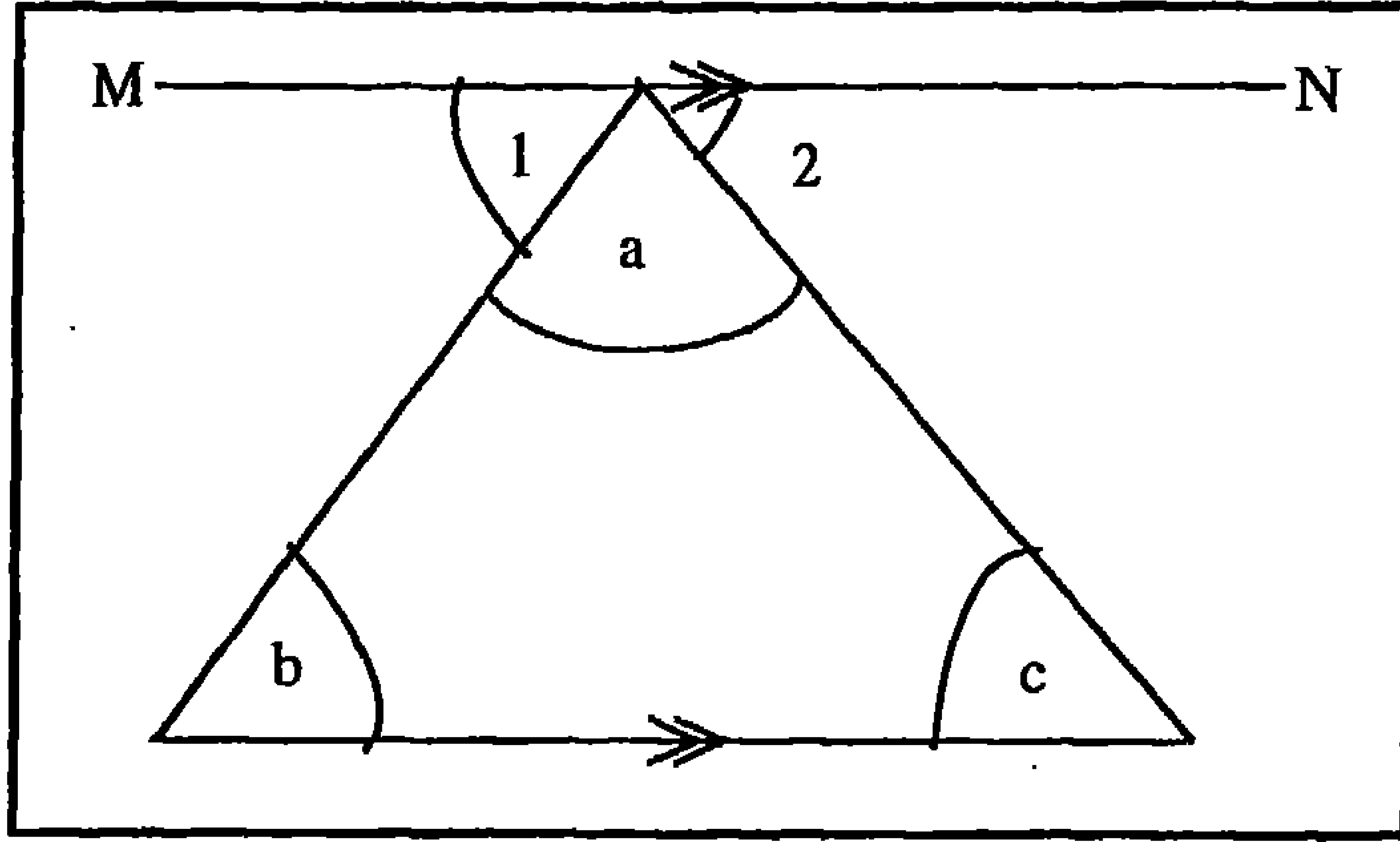
الحالة الثانية: إذا كانت n عدد أولي فردي فإن n+7 عدد زوجي أكبر من 2 وبالتالي n+7 هو عدد غير أولي.

مثال: برهن أن مجموع زوايا المثلث الداخلية يساوي $180°$

البرهان:

نفرض أن لدينا مثلث له الزوايا a, b, c ونرسم خط مستقيم يوازي القاعدة كما هو مبين بالرسم:

الزاوية 1 تساوي الزاوية b بالتبادل.



كذلك الزاويه 2 تساوي الزاويه c بالتبادل.

إذن مجموع الزوايا $1 + a + 2 = a + b + c$.

لكن مجموع الزوايا $1 + a + 2 = 180^{\circ}$ لإنها زاوية مستقيمة.

إذن مجموع الزوايا $b+a+c=180^{\circ}$.

مثال: إذا كانت x, y عددان صحيحان زوجيان وكان k أي عدد صحيح فبرهن أن:

أ. kx يكون عدد زوجي.

ب. $x + y$ يكون عدد زوجي.

ج. $x - y$ يكون عدد زوجي.

د. x^k يكون عدد زوجي.

البرهان:

نفرض أن x عدد زوجي وبالتالي يمكن كتابة $x = 2m, m \in \mathbb{Z}$

ونفرض أن y عدد زوجي وبالتالي يمكن كتابة $y = 2n, n \in \mathbb{Z}$

أولاً:

$$kx = k(2m) = 2(km), \qquad km \in \mathbb{Z}$$

إذن العدد kx عدد زوجي.

ثانياً:

$$x + y = 2m + 2n = 2(m + n), \qquad m + n \in \mathbb{Z}$$

إذن العدد $x + y$ عدد زوجي.

ثالثاً:

$$x - y = 2m - 2n = 2(m - n), \qquad m - n \in \mathbb{Z}$$

إذن العدد $x + y$ عدد زوجي.

رابعاً:

$$x^k = (2m)^k = 2(2^{k-1}m^k), \qquad 2^{k-1}m^k \in \mathbb{Z}$$

إذن العدد x^k عدد زوجي.

(2-4-2) البرهان العكسي The Proof by contraposition

إذا كان صعب علينا برهان $p \to q$ فإننا يمكن أن نلجأ إلى برهان $\sim q \to \sim p$ إذا كان ذلك ممكن وهذا الأسلوب يسمى البرهان العكسي وهو يعتمد على المبرهنة التالية:

مبرهنة (2.4.1): ليكن p و q جملتين منطقيتين فإن:

$$(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$$

البرهان: نكون جدول الصواب كما يلي:

p	q	~p	~q	p→q	~q→~p
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

بمقارنة العمود الخامس مع العمود السادس ينتج أن:

$$(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$$

مثال: إثبت أنه إذا كانت n^2 عدد فردي فإن n تكون عدد فردي؟

الحل:

من الصعب أن نبرهن مباشرة السؤال لذا سوف نلجأ إلى إستخدام البرهان العكسي كما يلي:

نفرض أن: العبارة n^2 عدد فردي هي p وأن العبارة n تكون عدد فردي هي q والمطلوب هو إثبات أن $p \to q$ وبإستخدام إسلوب البرهان العكسي فإننا سوف نبرهن أن $\sim q \to \sim p$ ؟

لذا نريد أن نبرهن أنه إذا كانت n عدد زوجي فإن n^2 تكون عدد زوجي؟

لذا نفرض أن $n = 2m, m \in \mathbb{Z}$ وبالتربيع نحصل على

$$n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$$

وبوضع $2m^2 = k$ نحصل على $n^2 = 2k$ و $k \in \mathbb{Z}$

إذن n^2 تكون عدد زوجي.

مثال: إثبت أنه إذا كانت x و y عددان حقيقيان بحيث $x + y \geq 2$ فإن $x \geq 1$ أو $y \geq 1$.

الحل:

من الصعب أن نبرهن مباشرة السؤال لذا سوف نلجأ إلى إستخدام البرهان العكسي كما يلي:

نفرض أن: العبارة $x + y \geq 2$ هي p وأن العبارة $x \geq 1$ أو $y \geq 1$ هي q والمطلوب هو إثبات أن $p \to q$ وبإستخدام إسلوب البرهان العكسي فإننا سوف نبرهن أن $\sim q \to \sim p$ ؟

لذا نريد أن نبرهن أنه إذا كانت $x < 1$ و $y < 1$ فإن $x + y < 2$ ؟

وبالجمع المباشر للمتباينتين $x < 1$ و $y < 1$ نحصل على $x + y < 2$.

مثال: برهن أنه إذا كانت x, y, z أعداد صحيحة تمثل حل للمعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ فإنه يجب أن يكون واحد على الأقل من المتغيرات x أو y أو z يكون عدد زوجي.

الحل:

من الصعب أن نبرهن مباشرة السؤال لذا سوف نلجأ إلى إستخدام البرهان العكسي كما يلي:

نفرض أن العبارة $x^2 + y^2 = z^2$ هي p والعبارة واحد على الأقل من المتغيرات x أو y أو z يكون عدد زوجي هي q والمطلوب هو إثبات أن $p \to q$ وبإستخدام إسلوب البرهان العكسي فإننا سوف نبرهن أن $\sim q \to \sim p$ ؟

لذا نريد أن نبرهن لكل x, y, z أعداد صحيحة فردية فإن المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الصحيحة؟

نفرض أن x عدد فردي وبالتالي $x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$

ونفرض أن y عدد فردي وبالتالي $y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$

ونفرض أن z عدد فردي وبالتالي $z = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$

إذن الطرف الأيسر هو:

$$x^2 + y^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 2(2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1)$$

إذن الطرف الأيسر عدد زوجي ....(1)

الأن نحسب الطرف الأيمن:

$$z^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

إذن الطرف الأيمن عدد فردي ....(2)

من (1) و (2) نحصل على أن الطرف الأيمن لا يساوي الطرف الأيسر

إذن x, y, z لا تحقق المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$

إذن المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الصحيحة.

(2-4-3) البرهان بالتناقض Proof by contradiction

إذا كانت p جملة منطقية صحيحة ونريد إثبات أن الجملة المنطقية q تكون أيضاً صحيحة أي أننا نريد إثبات أن $p \to q$ أي نريد إثبات أن الجملة المنطقية $p \to q$ لها قيمة الصواب تساوي T ....(1)

لذا نفرض صحة التقرير p=T ولكن ننقض النتيجة بمعنى نفرض أن q=F إذن قيمة صواب الجملة المنطقية $p \to q$ هي F حيث:

$(p \to q) \equiv (\sim p \vee q) = F \vee F = F$ .... (2)

إذن من (1) و (2) نحصل على تناقض ولحل هذا التناقض يجب أن تكون q=T .

مثال: إثبت أنه إذا كانت $a + b\sqrt{2} = 0$ حيث a و b أعداد صحيحة فإن $a = b = 0$

الحل:

نفرض أن $b \neq 0$

إذن $b\sqrt{2} = -a$

إذن $\sqrt{2} = \frac{-a}{b}$

إذن $\sqrt{2}$ عدد كسري (عدد نسبي) وهذا يناقض كون $\sqrt{2}$ عدد غير كسري (غير نسبي)

إذن لحل هذا التناقض يجب أن يكون $b = 0$ وبالتعويض في المعادلة $a + b\sqrt{2} = 0$ ينتج لنا أيضا أن $a = 0$

مثال: إثبت أنه إذا كان لدينا مثلث أطوال أضلاعه هي $a = 3, b = 4, c = 7$ فإثبت أن هذا المثلث يكون مثلث غير قائم الزاوية.

الحل:

نفرض جدلاً أن المثلث قائم الزاوية إذن يجب أن يحقق قانون فيثاغورث

مربع الوتر = مربع الضلعين الأخرين

ولكن $c^2 = 49 \neq 16 + 9 = 25$

إذن المثلث لا يحقق قانون فيثاغورث

إذن المثلث غير قائم الزاوية.

مثال: إثبت أن العدد $\sqrt{2}$ عدد غير كسري

البرهان:

نفرض جدلاً أن العدد $\sqrt{2}$ عدد كسري

إذن $\sqrt{2} = \frac{m}{n}, n \neq 0$ بحيث يكون القاسم المشترك الأعظم يساوي 1

وبالتربيع نحصل على $2 = \frac{m^2}{n^2}$ إذن $m^2 = 2n^2$

إذن العدد m^2 عدد زوجي وبالتالي يكون أيضا m عدد زوجي

إذن $m = 2m_1$ وبالتالي $2m_1^2 = n^2$

إذن العدد n^2 عدد زوجي وبالتالي العدد n عدد زوجي

إن العدد 2 هو قاسم مشترك للعددين m و n وهذا يناقض الفرض أن القاسم المشترك الأعظم لهما يساوي 1 وبالتالي يكون العدد $\sqrt{2}$ عدد غير كسري.

مثال: إثبت أن حاصل ضرب عدد كسري غير صفري مع عدد أخر غير كسري هو عدد غير كسري

البرهان:

نفرض جدلا أن حاصل ضرب عدد كسري غير صفري مع عدد أخر غير كسري هو عدد كسري وبالتالي إذا كان x عدد كسري غير صفري و y عدد غير كسري و z عدد كسري غير صفري بحيث xy=z

إذن $x=\frac{a}{b}, b\neq 0$ و $z=\frac{m}{n}, n\neq 0$

وبالتالي $\left(\frac{a}{b}\right)y=\frac{m}{n}$

وبالتالي $y=\frac{bm}{an}, an\neq 0$

إذن y عدد كسري وهذا يناقض الفرض وبالتالي لحل هذا التناقض لحصل على أن حاصل ضرب عدد كسري غير صفري مع عدد أخر غير كسري هو عدد غير كسري.

مثال: برهن أن العدد 2 هو عدد أولي.

البرهان:

نفرض جدلاً أن العدد 2 ليس أولي

إذن $xy=2$ حيث $x>1, y>1$ و x, y أعداد صحيحة

وبالتالي إذا كانت $x>1$ فإن المعادلة $xy=2$ تؤدي إلى $x=2, y=1$

وبالتالي هذا يناقض كون $y>1$

إذن لحل هذا التناقض يجب أن يكون العدد 2 عدد أولي.

مثال: مبدأ برج الحمام **(Pigeonhole Principle)**

إذا وضعنا n حمامة في برج حمام عدد عيونه m بحيث يكون $n>m$ فبرهن أن عينا واحدة على الأقل من البرج يجب أن تحتوي على حمامتين أو أكثر.

الحل:

نفرض جدلاً أن كل عين في برج الحمام تحتوي على حمامة على الأكثر وبالتالي يجب أن يكون عدد الحمام على الأكثر هو m وهذا يناقض كون عدد الحمام n هو أكبر تماما من m.

(2-4-4) البرهان بإعطاء مثال معاكس Proof by counter example

إن النظرية الصحيحة تكون صحيحة في جميع الحالات وإذا كان يوجد حالة تكون فيها النظرية التي هي محل الدراسة تكون غير صحيحة فهذا يكفي ببطلان صحة هذه النظرية.

مثال: ناقش صحة الإدعاء "إذا كانت $a+b=1$ فإن $a^2+b^2=1$".

الحل:

إذا أخذنا $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$ فإن:

$$a^2+b^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\neq 1$$

إذن الإدعاء غير صحيح.

مثال: ناقش صحة الإدعاء "$a-b=b-a$".

الحل:

إذا أخذنا $a=1, b=5$ فإن

$$a+b=-4\neq b-a=4$$

إذن الإدعاء غير صحيح.

مثال: ناقش صحة الإدعاء "$|a+b|=|a|+|b|$".

الحل:

إذا أخذنا $a=-5, b=3$ فإن

$$|a+b|=|-2|=2\neq |a|+|b|=8$$

إذن الإدعاء غير صحيح.

مثال: ناقش صحة الإدعاء : إذا كان n عدد صحيح موجب أكبر من الواحد فإن n^2+n+41 يكون عدد أولي.

الحل:

إذا أخذنا $n=41$ فإن:

$$\begin{aligned} n^2+n+41 &= (41)^2+41+41 \\ &= 1681+41+41=1768=(41)(43) \end{aligned}$$

إذن الإدعاء غير صحيح.

(2-4-5) البرهان بالإستقراء (الإستنتاج الرياضي)

Proof by Mathematical induction

الإستقراء الرياضي وسيلة سهلة رياضية فعالة لبرهان كثير من مبرهنات الرياضيات وسوف نقدم ملخص لمبدأ الإستقراء الرياضي كما يلي:

نفرض أن $p(n)$ عبارة ما تعتمد على العدد الصحيح الغير سالب n ونفرض أن q عدد صحيح غير سالب معطى ولبرهان أن العبارة $p(n)$ تكون صحيحة لكل $n \geq q$ يكفي إثبات خطوتين:

الخطوة الأولى: إثبات أن $p(q)$ تكون عبارة صحيحة.

الخطوة الثانية: إثبات أن إذا كانت $k \geq q$ وكانت $p(k)$ عبارة صحيحة فإن $p(k+1)$ تكون أيضا صحيحة.

ملاحظة: لمعرفة أهمية الشرطين (1) و (2) تابع المثالين التالين (1) و (2):

مثال (1) : ناقش صحة العبارة:

$$2+4+6+\cdots+2n = n^3-5n^2+12n-6$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$2+4+6+\cdots+2n = n^3-5n^2+12n-6$$

أولاً: $p(1)$ صحيحة لأن:

الطرف الأيسر $\text{L.H.S.} = 2$

الطرف الأيمن $\text{R.H.S.} = 1-5+12-6 = 2$

ثانياً: $p(2)$ صحيحة لأن:

$\text{L.H.S.} = 2+4 = 6$

$\text{R.H.S.} = 8-20+24-6 = 6$

ثالثاً: $p(3)$ صحيحة لأن:

$\text{L.H.S.} = 2+4+6 = 12$

$\text{R.H.S.} = 27-45+36-6 = 12$

رابعاً: $p(4)$ لا تكون صحيحة لأن:

$\text{L.H.S.} = 2+4+6+8 = 20$

$$R.H.S. = 64 - 80 + 48 - 6 = 26$$

ملاحظة: من المثال السابق نلاحظ أن الشرط الأول من مبدأ الإستقراء الرياضي لا يكفي وذلك لأن $p(1)$ عبارة صحيحة ولكن إذا حاولنا إثبات أن $p(k+1)$ عبارة صحيحة فلن نستطيع.

مثال (2): ناقش صحة العبارة:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}(n)(n+1) + 1$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}(n)(n+1) + 1$$

نفرض صحة العبارة عندما $n = k$ أي أن $p(k)$ صحيحة وندرس ذلك من أجل $n = k + 1$ ولعمل ذلك نضيف $k + 1$ إذن:

$$p(k+1) = \frac{1}{2}(k)(k+1) + 1 + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + 1$$

إذن $p(k+1)$ صحيحة ولكن إذا أخذنا $n = 1$ سنجد أن:

$$L.H.S. = 1$$

$$R.H.S. = \frac{1}{2}(2) + 1 = 2$$

إذن العبارة غير صحيحة لأن الشرط الأول من مبدأ الاستقراء الرياضي غير متحقق.

ملاحظة: مما سبق نجد أنه من الضروري أن نثبت الشرطين:

الشرط الأول: صحة العبارة عند أصغر عدد صحيح يحقق العبارة.

الشرط الثاني: نفرض صحة العبارة عند $n = k$ ونحاول إثبات ذلك عند $n = k + 1$

مثال: إثبت أنه لكل $n \geq 1$ فإن:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

أولاً: $p(1)$ صحيحة لأن:

$$L.H.S. = 1 = R.H.S. = 1$$

ثانياً: نفرض صحة العبارة $p(k)$ صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل $n = k + 1$ ولعمل ذلك نضيف الحد التالي من العبارة والذي هو $2(k+1) - 1$ إذن:

$$p(k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

إذن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$

مثال: إثبت أنه لكل $n \geq 1$ فإن:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

أولاً: $p(1)$ صحيحة لأن:

$$L.H.S. = 1 = R.H.S. = 1$$

ثانياً: نفرض صحة العبارة $p(k)$ صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل $n = k + 1$ ولعمل ذلك نضيف الحد التالي من العبارة والذي هو $k + 1$ إذن:

$$p(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

إذن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$.

مثال: إثبت أنه لكل $n \geq 2$ فإن:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

أولاً: $p(2)$ صحيحة لأن:

$$L.H.S. = \frac{1}{2} = R.H.S. = \frac{1}{2}$$

ثانياً: نفرض صحة العبارة $p(k)$ صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل $n = k + 1$ ولعمل ذلك نضيف الحد التالي من العبارة والذي هو $\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{k+1}$ إذن:

$$p(k+1) = \left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$$

إذن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$

مثال: إثبت أنه إذا كان $q \neq 1$ فإن لكل $n \geq 0$ فإن:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{(1 - q^{n+1})}{(1 - q)}$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{(1 - q^{n+1})}{(1 - q)}$$

أولاً: $p(0)$ صحيحة لأن:

$$L.H.S. = 1 = R.H.S. = 1$$

ثانياً: نفرض صحة العبارة $p(k)$ صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل $n = k + 1$ ولعمل ذلك نضيف الحد التالي من العبارة والذي هو q^{k+1} إذن:

$$p(k+1) = \frac{(1 - q^{k+1})}{(1 - q)} + q^{k+1} = \frac{(1 - q^{k+1}) + q^{k+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{(1 - q^{k+2})}{(1 - q)}$$

إذن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$

مثال: إثبت أنه لكل $n \geq 1$ فإن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

أولاً: $p(1)$ صحيحة لأن:

$L.H.S. = 1 = R.H.S. = 1$

ثانياً: نفرض صحة العبارة $p(k)$ صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل $n = k + 1$
ولعمل ذلك نضيف الحد التالي من العبارة والذي هو $(k+1)^2$ إذن:

$$p(k+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + 7k + 6]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k+3)(k+2)$$

إذن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$

مثال: إثبت أنه لكل $n \geq 1$ فإن:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

أولاً: $p(1)$ صحيحة لأن:

$L.H.S. = 2 = R.H.S. = 2$

ثانياً: نفرض صحة العبارة $p(k)$ صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل $n = k + 1$
ولعمل ذلك نضيف الحد التالي من العبارة والذي هو $(k+1)(k+2)$إذن:

$$p(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)[k^2 + 5k + 6]$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

إذن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$.

مثال: إثبت أنه لكل $n \geq 1$ فإن:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

الحل:

نفرض أن $p(n)$ هي العبارة:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

أولاً: $p(1)$ صحيحة لأن:

$$L.H.S. = \frac{1}{2} = R.H.S. = \frac{1}{2}$$

ثانياً: نفرض صحة العبارة $p(k)$ صحيحة ولحاول إثبات ذلك من أجل $n = k + 1$ ولعمل ذلك نضيف الحد التالي من العبارة والذي هو $\frac{k+1}{(k+2)!}$ إذن:

$$\begin{aligned} p(k+1) &= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\ &= 1 - \frac{k+2}{(k+2)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(k+2)!} \end{aligned}$$

إذن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$.

(2-5) المحاورات The Arguments

إذا كانت $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ مجموعة من القضايا المنطقية فإن القضية الشرطية:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge p_n \to q$$

تسمي محاورة أو مناظرة أو حجة بينما $p_1, p_2, \ldots, p_n$ تسمي المقدمات premises و q تسمي النتيجة conclusion وبالتالي فإننا نقول أن المحاورة تكون متحققة valid إذا وفقط إذا كان التعبير المنطقي:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge p_n \to q$$

صحيح منطقياً وغير ذلك فإن المحاورة تكون غير متحققة ويمكن إثبات صحة المحاورة وذلك بإستخدام جدول الصواب أو بتطبيق قوانين جبر القضايا.

مثال: هل المحاورة الأتية متحققة أم لا:

"إذا نمت الأن فسوف تصادفك صعوبات دراسية، لم يسبق أن صادفتك صعوبات دراسية، وبالتالي فأنت لن تنام الأن"

الحل:

لتكن p هي العبارة "تنام الأن" و q هي العبارة "تصادفك صعوبات دراسية"

وبالتالي تكون صيغة المحاورة كما يلي:

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p \equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

$\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee 0] \rightarrow \sim p$

$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p \equiv \sim(p \vee q) \rightarrow \sim p \equiv p \rightarrow (p \vee q)$

$\equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv U \vee q \equiv U$

إذن المحاورة صادقة (متحققة).

مثال: هل المحاورة الأتية متحققة أم لا:

"إذا ذهبت إلى المدرسة اليوم فإنك سوف تحصل على الجائزة، ولكنك لم تذهب اليوم للمدرسة ، إذا أنت لم تحصل على الجائزة"

الحل:

لتكن p هي العبارة "تذهب للمدرسة" و q هي العبارة "تحصل على الجائزة"

وبالتالي تكون صيغة المحاورة كما يلي:

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$

ثم نكون جدول الصواب:

p	q	~p	~q	p→q	(p→q)∧~p	[(p→q)∧~p]→~q
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T

إذن المحاورة غير متحققة.

مثال: هل المحاورة الأتية صائبة متحققة أم كاذبة: إذا كان الطقس معتدل فإن أحمد سيذهب للعمل، ولكنه لم يذهب للعمل، إذا الطقس لم يكن معتدل"

الحل:

لتكن p هي العبارة "الطقس معتدل" و q هي العبارة "يذهب للعمل"

وبالتالي تكون صيغة المحاورة كما يلي:

$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$

ثم نكون جدول الصواب:

p	q	~p	~q	p→q	(p→q)∧~q	[(p→q)∧~p]→~q
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

إذن المحاورة صائبة.

(2-6) الجمل المفتوحة

إذا كانت $x^2 - 4 = 0$ فإن $(x+2)(x-2) = 0$ مما يؤدي إلى أما x=-2 أو x=2 فلو عوضنا عن x=2 أو x=-2 فإن العبارة تكون صحيحة (صائبة) بينما إذا كانت x أي قيمة تختلف عن x=2 أو x=-2 فإن العبارة تكون خاطئة لذا فإن قيمة صواب الجملة $x^2 - 4 = 0$ تتوقف على القيم التي يأخذها المتغير x وبالتالي نقول أن الجملة $x^2 - 4 = 0$ بأنها جملة مفتوحة ومجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة التعويض التي تقابل الجملة المفتوحة ومجموعة الحل هي $\{-2,2\}$ هي قيم المتغير x التي تجعل الجملة المفتوحة تكون صائبة وبالتي نسميها مجموعة الحل للجملة المفتوحة.

تعريف (2.6.1):

الجملة المفتوحة هي جملة خبرية ذات متغير واحد أو عدة متغيرات وتتحول إلى جملة بسيطة عندما نعوض عن كل متغير فيها بعنصر من مجموعة التعويض التي تقابلها ونرمز عادة للجمل المفتوحة بالرمز P(x) و P(x,y) و P(x,y,z) و... حيث x و y و z هي المتغيرات بينما نرمز لمجموعات التعويض التي تقابلها بالرمز X و Y و Z و....

مثال: x عدد طبيعي أكبر تماما من 7 وفي هذه الحالة فإن $x>7$ هي جملة مفتوحة وفيها المتغير هو x ويمكن كتابتها كما يلي:

$$P(x) = \{x > 7, \quad x \in \mathbb{N}\}$$

إذن : مجموعة التعويض هي $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

إذن: مجموعة الحل هي $\{8,9,10,\dots\}$

مثال: $x+y=3$ حيث x وy عددين طبيعين. في هذه الحالة فإن $x+y=3$ تكون جملة مفتوحة وفيها المتغيرات هي x وy حيث $x\in\mathbb{N}$ و $y\in\mathbb{N}$ وبالتالي يمكن كتابتها كما يلي:

$$P(x,y) = \{(x,y): x + y = 3, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$$

وبالتالي مجموعة التعويض هي كل الأزواج المرتبة (x, y) حيث $x\in\mathbb{N}$ و $y\in\mathbb{N}$.

إذن: مجموعة الحل هي $\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$

تعريف (2.6.2):

ليكن P(x) و H(x) جملتين مفتوحتين لهما نفس مجموعة التعويض فإننا نقول أن P(x) و H(x) متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحل.

مثال: إعتبر الجملتين المفتوحتين:

$$P(x) = \{x: 2x = 10, x \in \mathbb{R}\}$$

$$H(x) = \{x: x - 1 = 4, x \in \mathbb{R}\}$$

إذن الجملتين P(x) و H(x) متكافئتان لأن لهما نفس مجموعة الحل $\{5\}$

مثال: إعتبر الجملتين المفتوحتين:

$$P(x) = \{x: 2 + x = 10, x \in \mathbb{R}\}$$

$$H(x) = \{x: x^2 - 1 = 8, x \in \mathbb{R}\}$$

إذن الجملتين P(x) و H(x) غير متكافئتان لأن مجموعة الحل للجملة الأولى H(x) هي $\{8\}$ بينما مجموعة الحل للجملة الثانية G(x) هي $\{-3, 3\}$.

تعريف (2.6.3):

ليكن P(x) جملة مفتوحة و X هي مجموعة التعويض التي تقابلها فإننا نقول أن P(x) متحققة كلياً إذا تطابقت مجموعة الحل مع مجموعة التعويض وفي هذه الحالة تكون الجملة المفتوحة P(x) صائبة لجميع عناصر x من X وفي هذه الحالة نكتب:

$\forall x \in X: P(x)$

حيث الرمز ∀ (for all) يعني متحقق لكل ويسمى متحقق كلي.

مثال: إذا كانت

$P(x) = \{\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0 \}$

فإن مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ وحيث أن الجملة المفتوحة P(x) تكون دائما صائبة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ وبالتالي تكون مجموعة الحل هي $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الجملة المفتوحة P(x) تكون متحققة كلياً.

مثال: إذا كانت

$P(x) = \{\forall x \in \mathbb{R}: (x+4)^2 = x^2 + 4x + 16 \}$

فإن مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ وحيث أن الجملة المفتوحة P(x) تكون دائما صائبة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ وبالتالي تكون مجموعة الحل هي $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الجملة المفتوحة P(x) تكون متحققة كلياً.

مثال: إذا كانت

$P(x) = \{\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \}$

فإن مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ وحيث أن الجملة المفتوحة P(x) تكون دائما صائبة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ وبالتالي تكون مجموعة الحل هي $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الجملة المفتوحة P(x) تكون متحققة كلياً.

مثال: إذا كانت

$P(x) = \{\forall x \in \mathbb{R}: |x| \geq 0\}$

فإن مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ وحيث أن الجملة المفتوحة P(x) تكون دائما صائبة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ وبالتالي تكون مجموعة الحل هي $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الجملة المفتوحة P(x) تكون متحققة كلياً.

مثال: التعبير

$P(x) = \{\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 \geq 16\}$

إذن التعبير كاذب منطقيا لأنه إذا أخذنا مثلا $x=3$ فإن $x \in \mathbb{Z}$ وبالتالي $x^2=9$ لا تحقق $x^2 \geq 16$.

تعريف (2.6.4):

ليكن $P(x)$ جملة مفتوحة و X هي مجموعة التعويض التي تقابلها فإننا نقول أن $P(x)$ متحققة جزئيا إذا كانت مجموعة الحل لها غير خالية ولكنها جزء فعلي من X أي أن يوجد عنصر على الأقل $a \in X$ بحيث تكون الجملة $P(x)$ صائبة وتكتب:

$\exists x \in X: P(x)$

حيث الرمز $\exists$ (there exist) يعني يوجد ويسمى محقق جزئي.

مثال: صنف الجملة المفتوحة:

$P(x) = \{\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 = 0\}$

الحل:

مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ بينما مجموعة الحل للجملة المفتوحة هي $\{-1, 1\}$

إذن الجملة المفتوحة $P(x)$ متحققة جزئيا .

مثال: صنف الجملة المفتوحة:

$P(x) = \{\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0\}$

الحل:

مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ بينما مجموعة الحل للجملة المفتوحة هي φ المجموعة الخالية.

إذن الجملة المفتوحة $P(x)$ ليست متحققة جزئيا .

مثال: صنف الجملة المفتوحة:

$P(x) = \{\exists x \in \mathbb{R}: |x| < 0\}$

الحل:

مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ بينما مجموعة الحل للجملة المفتوحة هي φ المجموعة الخالية.

اذن الجملة المفتوحة $P(x)$ ليست متحققة جزئيا .

مثال: صنف الجملة المفتوحة:

$P(x) = \{\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0\}$

الحل:

مجموعة التعويض هي $\mathbb{R}$ بينما مجموعة الحل للجملة المفتوحة هي φ "المجموعة الخالية"

إذن الجملة المفتوحة $P(x)$ ليست متحققة جزئيا .

ملاحظات:

1. لنفي الجملة المفتوحة المتحققة كليا "لكل $x \in X$ تكون الجملة المفتوحة $P(x)$ دائما صائبة" فإننا نقول "يوجد عنصر على الأقل $x \in X$ تكون الجملة المفتوحة $P(x)$ غير متحققة (خاطئة)" وتكتب:

$\sim(\forall x \in X: P(x)) \equiv (\exists x \in X: \sim P(x))$

2. لنفي الجملة المفتوحة المتحققة جزئيا "يوجد عنصر واحد على الأقل $x \in X$ بحيث تكون الجملة المفتوحة $P(x)$ صائبة" فإننا نقول "لكل $x \in X$ فإن الجملة المفتوحة $P(x)$ تكون دائما غير متحققة (خاطئة)" وتكتب:

$\sim(\exists x \in X: P(x)) \equiv (\forall x \in X: \sim P(x))$

والمبرهنة التالية تثبت ذلك.

مبرهنة (2.6.5): ليكن $P(x)$ جملة مفتوحة فإن:

1. $\sim(\forall x \in X: P(x)) \equiv (\exists x \in X: \sim P(x))$
2. $\sim(\exists x \in X: P(x)) \equiv (\forall x \in X: \sim P(x))$

البرهان:

لبرهان (1):

الجملة المفتوحة $\sim(\forall x \in X: P(x))$ تكون صحيحة

إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in X: P(x))$ تكون خاطئة

إذا وفقط إذا كان يوجد x بحيث تكون $P(x)$ خاطئة

إذا وفقط إذا كان يوجد x بحيث تكون $\sim P(x)$ صحيحة

إذا وفقط إذا كان $\exists x \in X: P(x)$ تكون صحيحة

بالمثل يمكن برهان (2)

مثال: إنفي الجملة

$\forall x \in \mathbb{R}: x < 3$

الحل:

$\exists x \in \mathbb{R}: x \geq 3$

مثال: إنفي الجملة

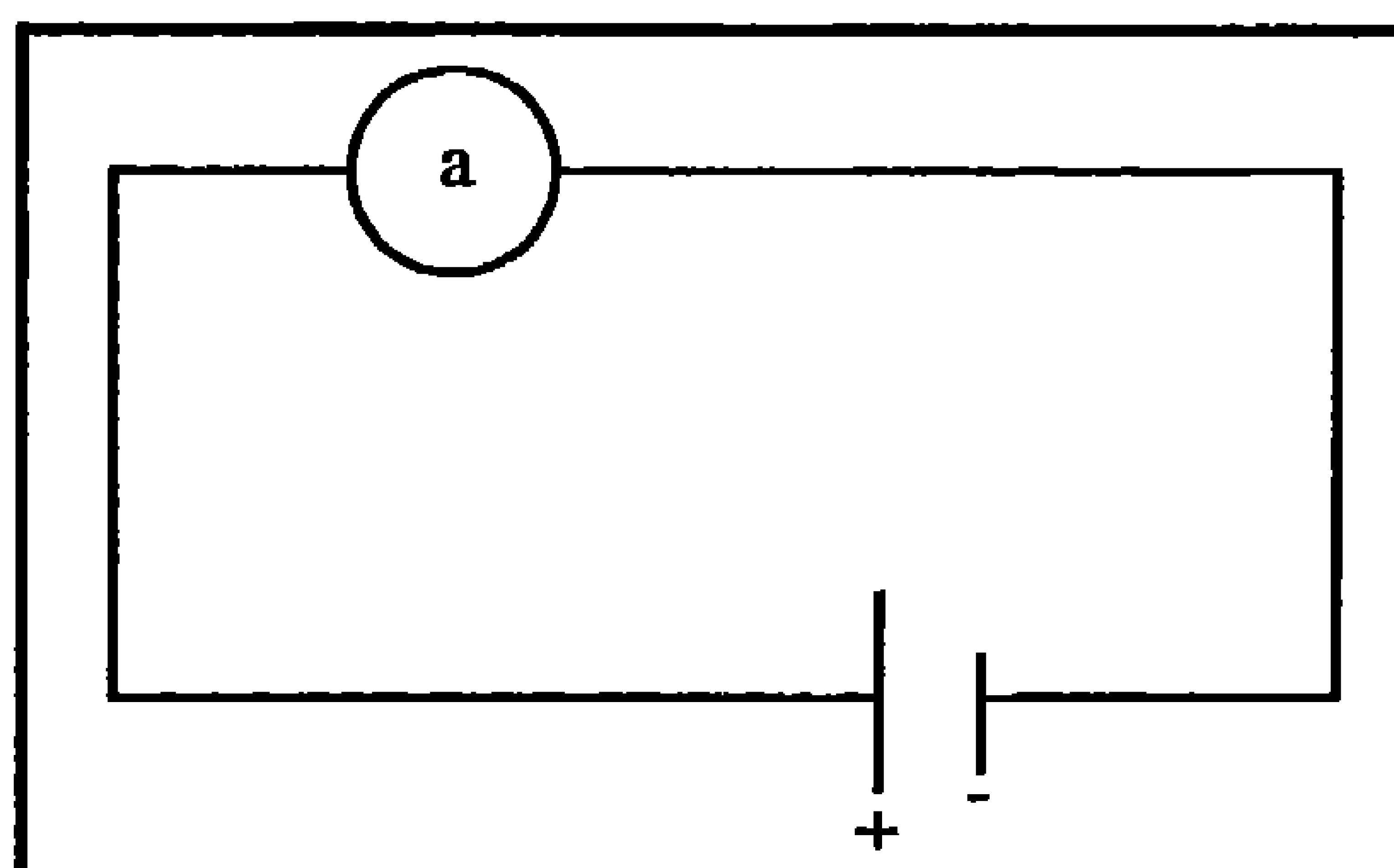
$\exists x, y \in \mathbb{R}: x + y = 7$

الحل:

$\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y \neq 7$

(2-7) دوائر المفاتيح الكهربائية

المفتاح الكهربائي يستعمل في توصيل وفصل التيار الكهربائي ويكون في أحد الوضعين أما مفتوح (ON) وفي هذه الحالة يمر التيار الكهربائي بالدائرة أو يأخذ الوضع (OFF) وفي هذه الحالة لا يمر التيار الكهربائي بالدائرة فمثلاً إذا رمزنا للمفتاح الكهربائي بالرمز a فإننا نعطي له قيمة الصواب 1 إذا كان مفتوح ونعطيه قيمة الصواب 0 إذا كان مغلق.

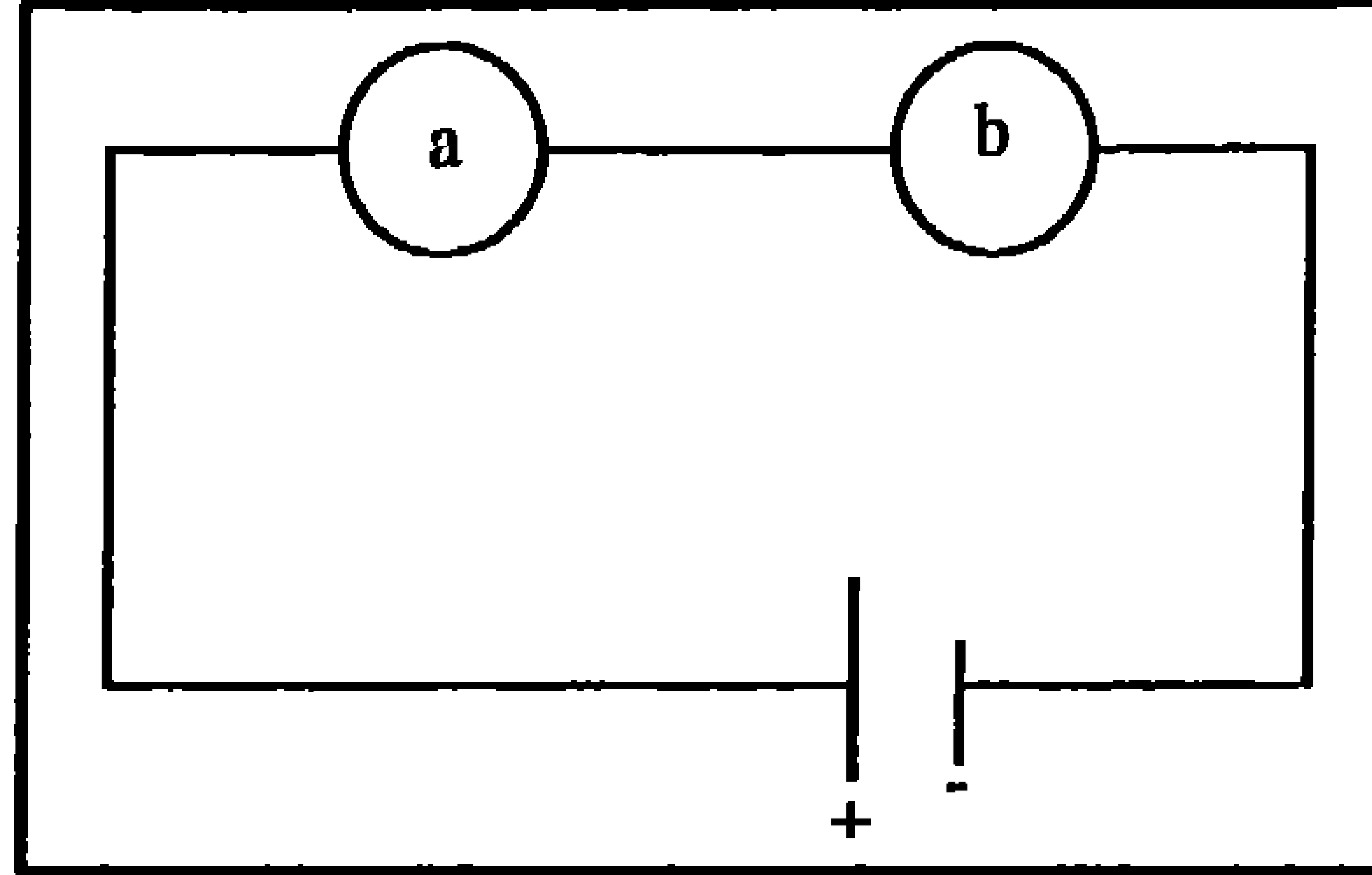


والمفتاح العاكس هو مفتاح كهربائي يأخذ وضع مخالف للمفتاح الكهربائي الأساسي فمثلاً بالنسبة للمفتاح a فإن المفتاح العاكس هو a' ويكون مفتوح عندما يكون a مغلق ويكون مغلق عندما يكون a مفتوح ويمكن وصفه بالجدول التالي:

a	a′
1	0
0	1

وإذا كانت الدائرة تحتوي على مفتاحين a وb فهناك طريقتين للتوصيل:

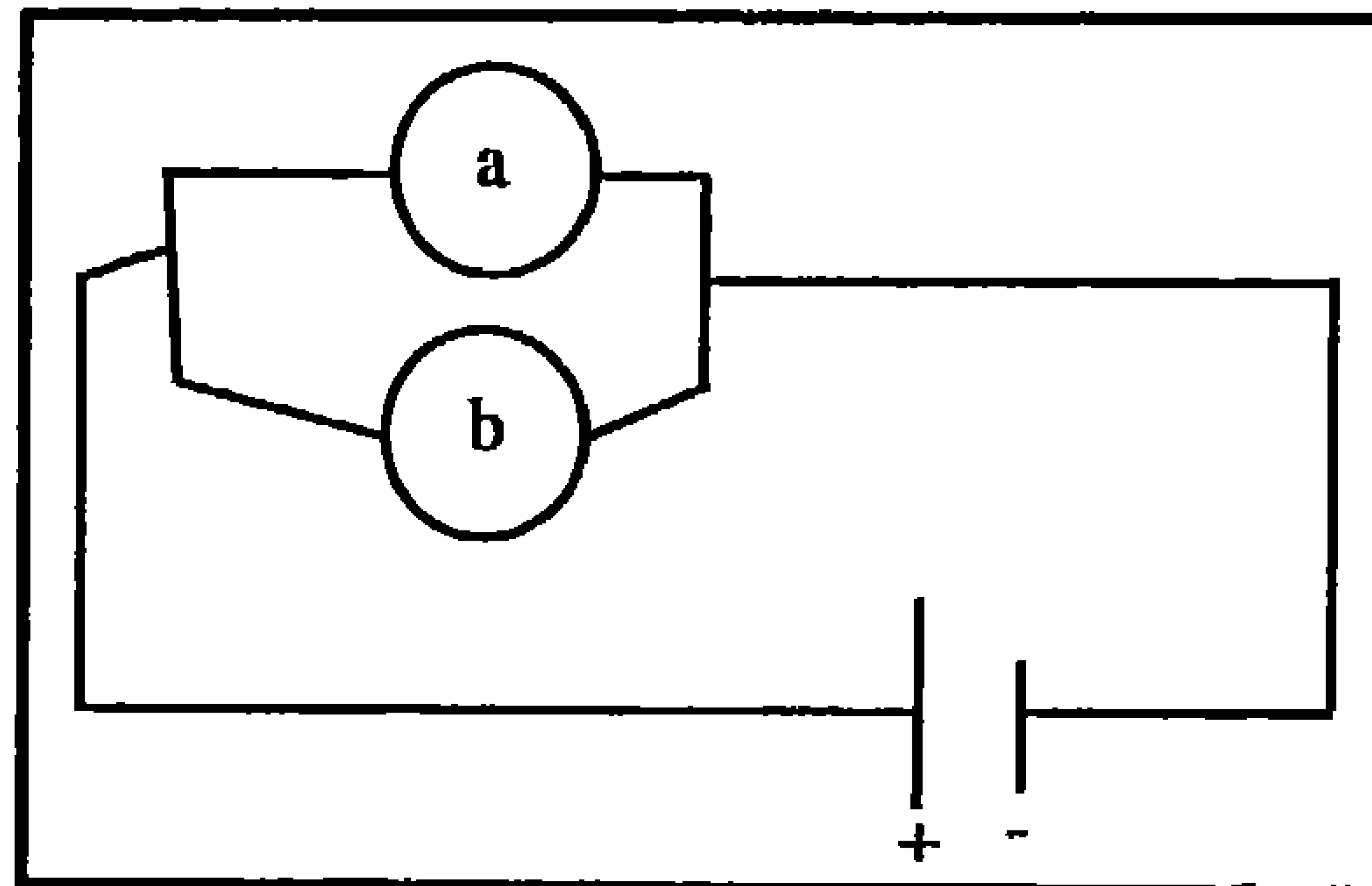
1. التوصيل على التوالي:



ويمكن تمثيلها منطقيا على شكل جدول الصواب $a \wedge b$ كما يلي:

a	**b**	**a ∧ b**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

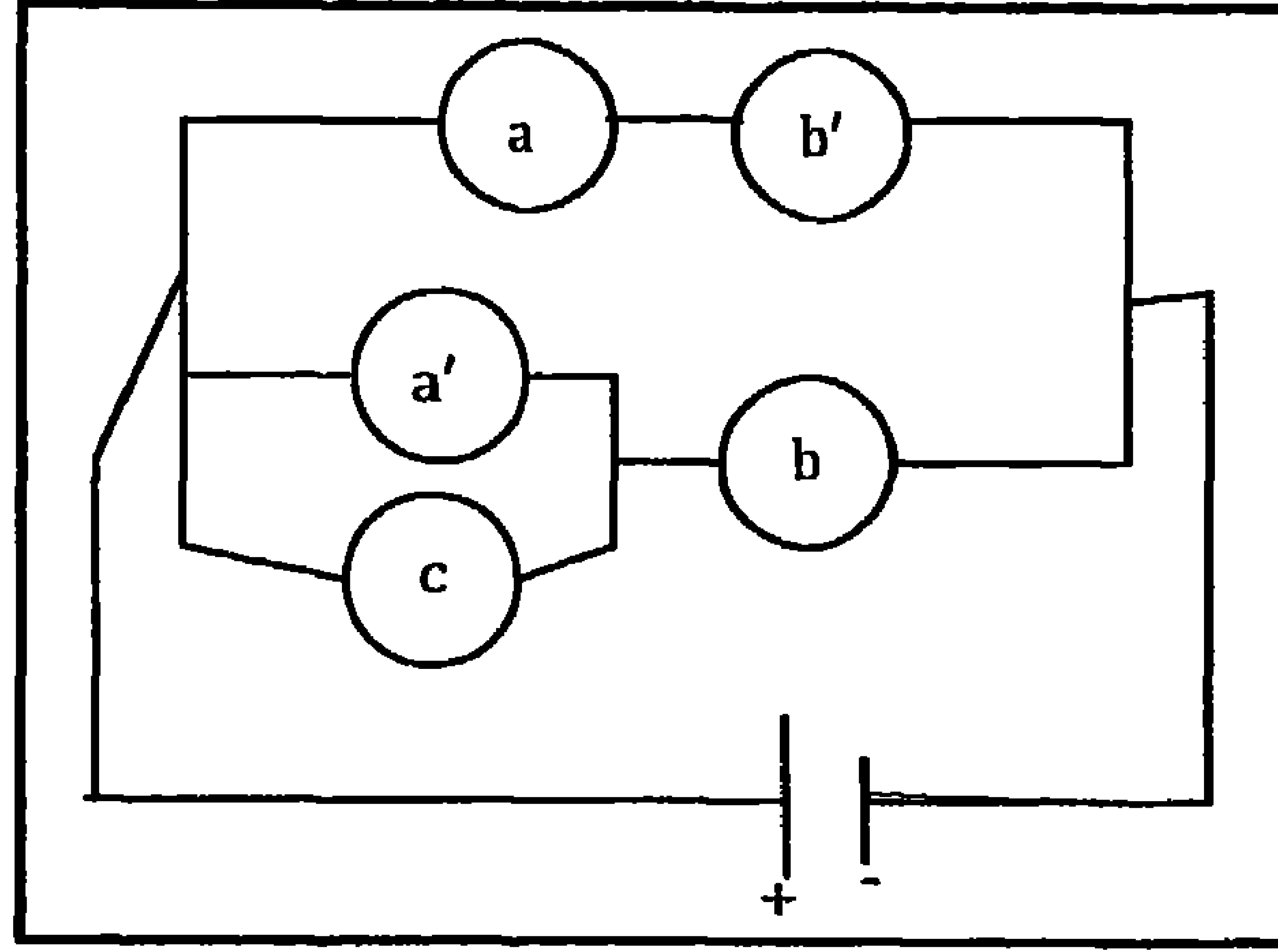
2. التوصيل على التوازي:



ويمكن تمثيلها منطقيا على شكل جدول الصواب $a \vee b$ كما يلي:

a	**b**	**a ∨ b**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

مثال: عبر منطقيا عن الدائرة الكهربائية

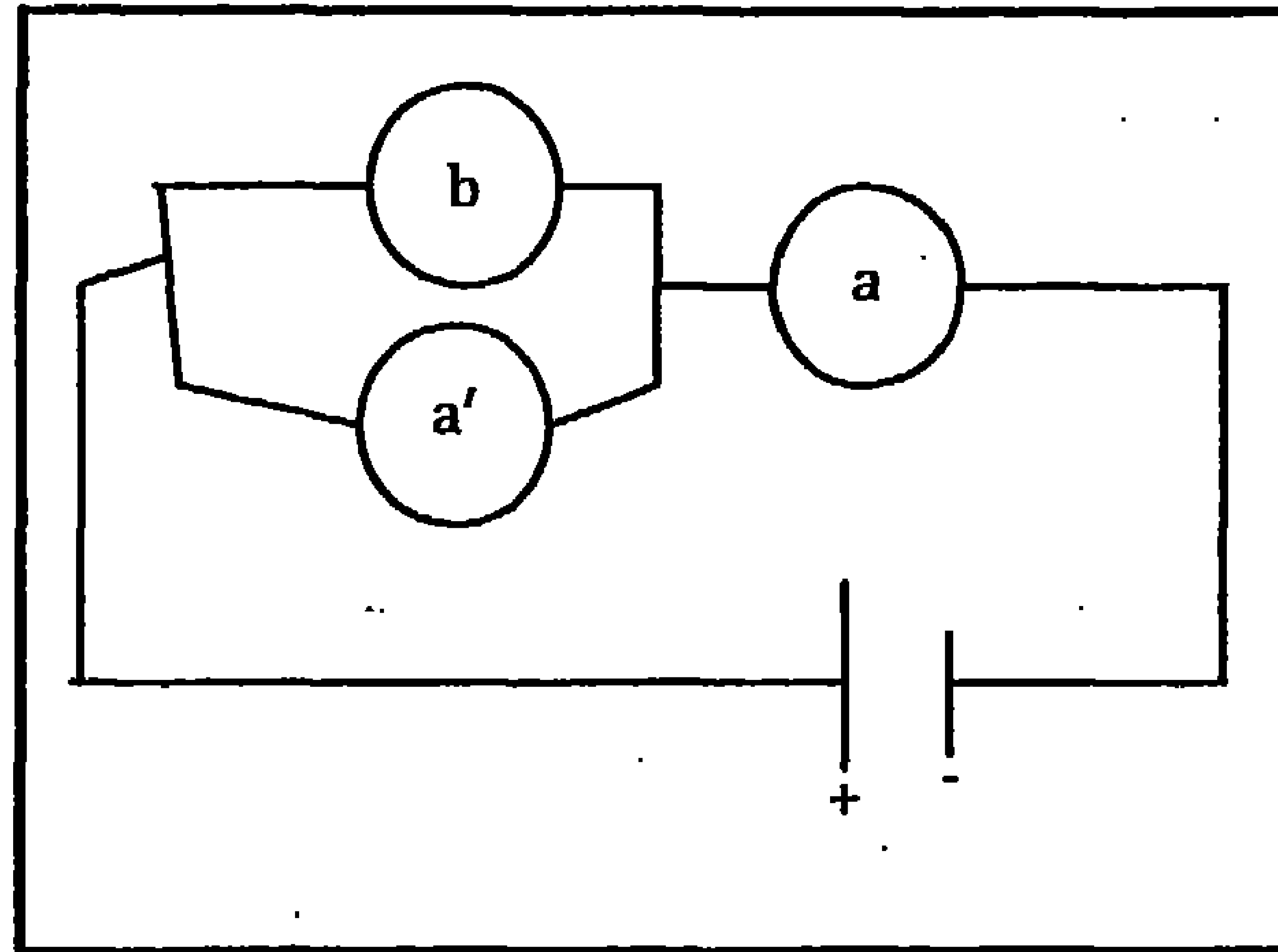


الحل:

يمكن أن نعبر عن الدائرة الكهربائية بالتعبير المنطقي:

$(a \wedge b') \vee ((a' \vee c) \wedge b)$

مثال: إكتب جدول الصواب بالنسبة للدائرة الكهربائية ثم حدد الوضع المناسب للمفاتيح الكهربائية لكي يمر التيار الكهربائي بالدائرة؟



الحل:

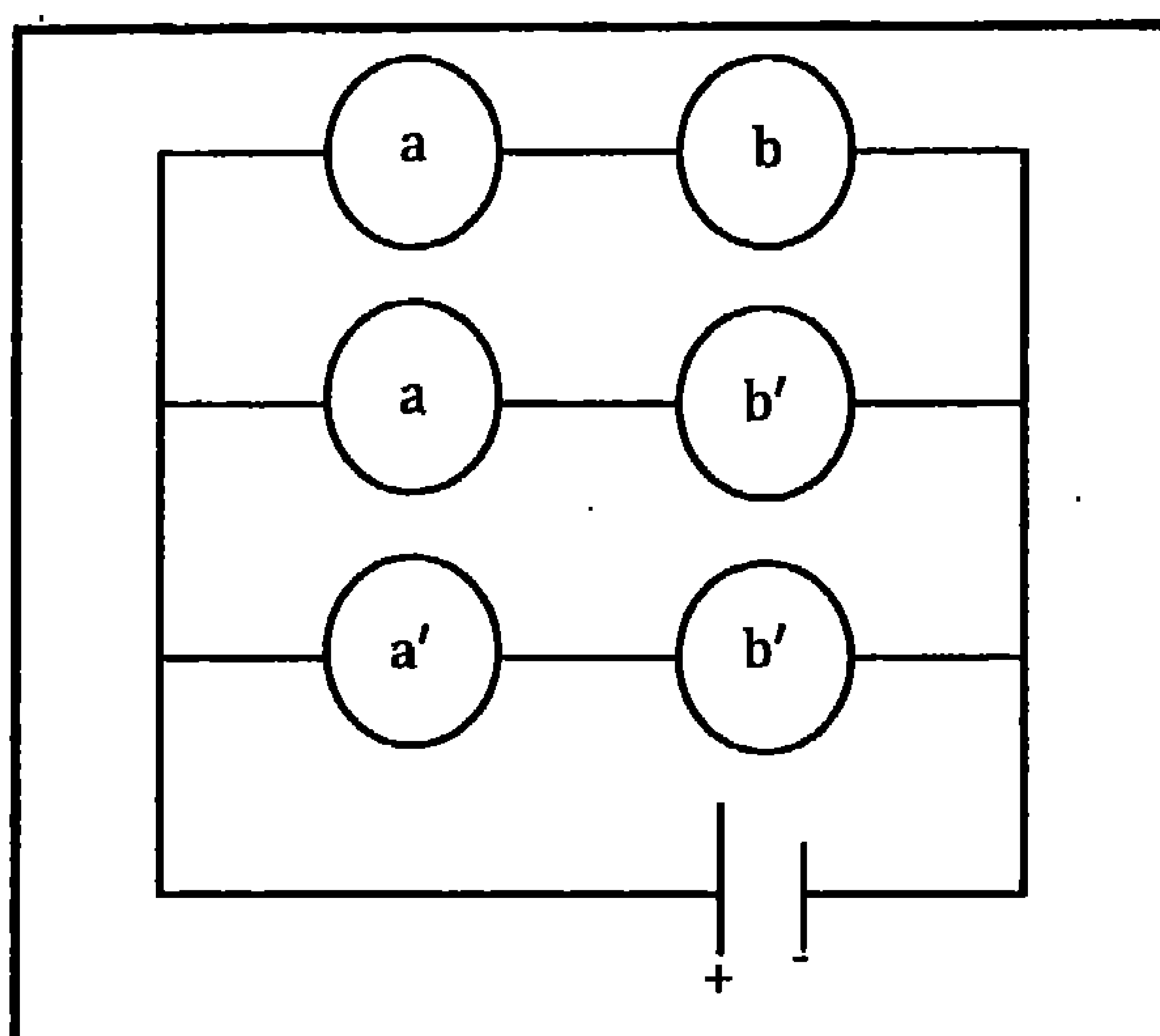
يمكن أن نعبر عن الدائرة الكهربائية بالتعبير المنطقي:

$a \wedge (b \vee a')$

a	b	a′	b ∨ a′	a ∧ (b ∨ a′)
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

ومن الجدول يتضح لنا أن التيار الكهربائي يمر في الدائرة عندما يكون المفاتيح a و b في الوضع ON

مثال: بسط الدائرة الكهربائية



الحل:

يمكن أن نعبر عن الدائرة الكهربائية بالتعبير المنطقي:

$(a \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a' \wedge b')$

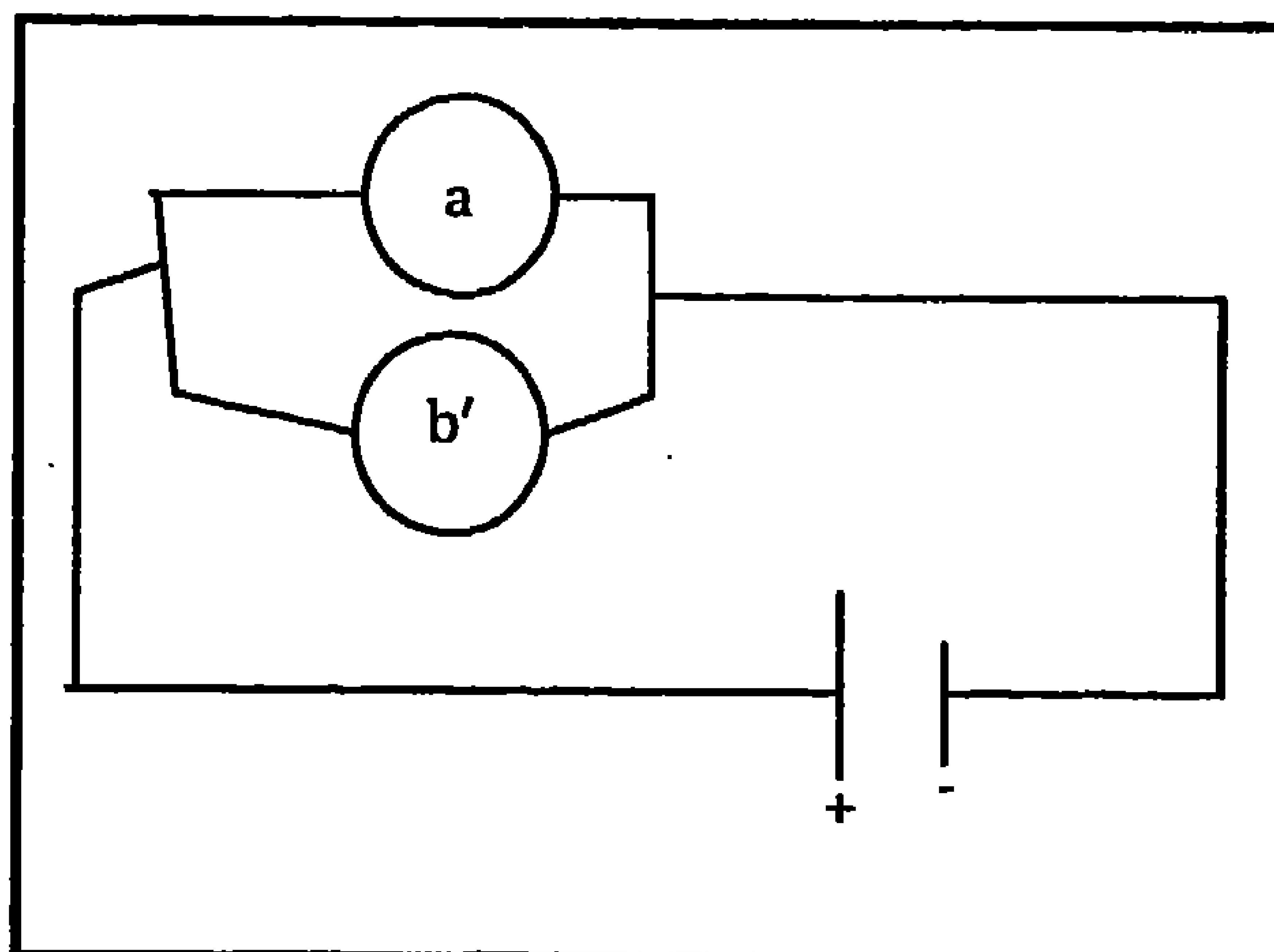
ثم نبسطها كما يلي:

$(a \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a' \wedge b') \equiv [a \wedge (b \vee b')] \vee (a' \wedge b')$

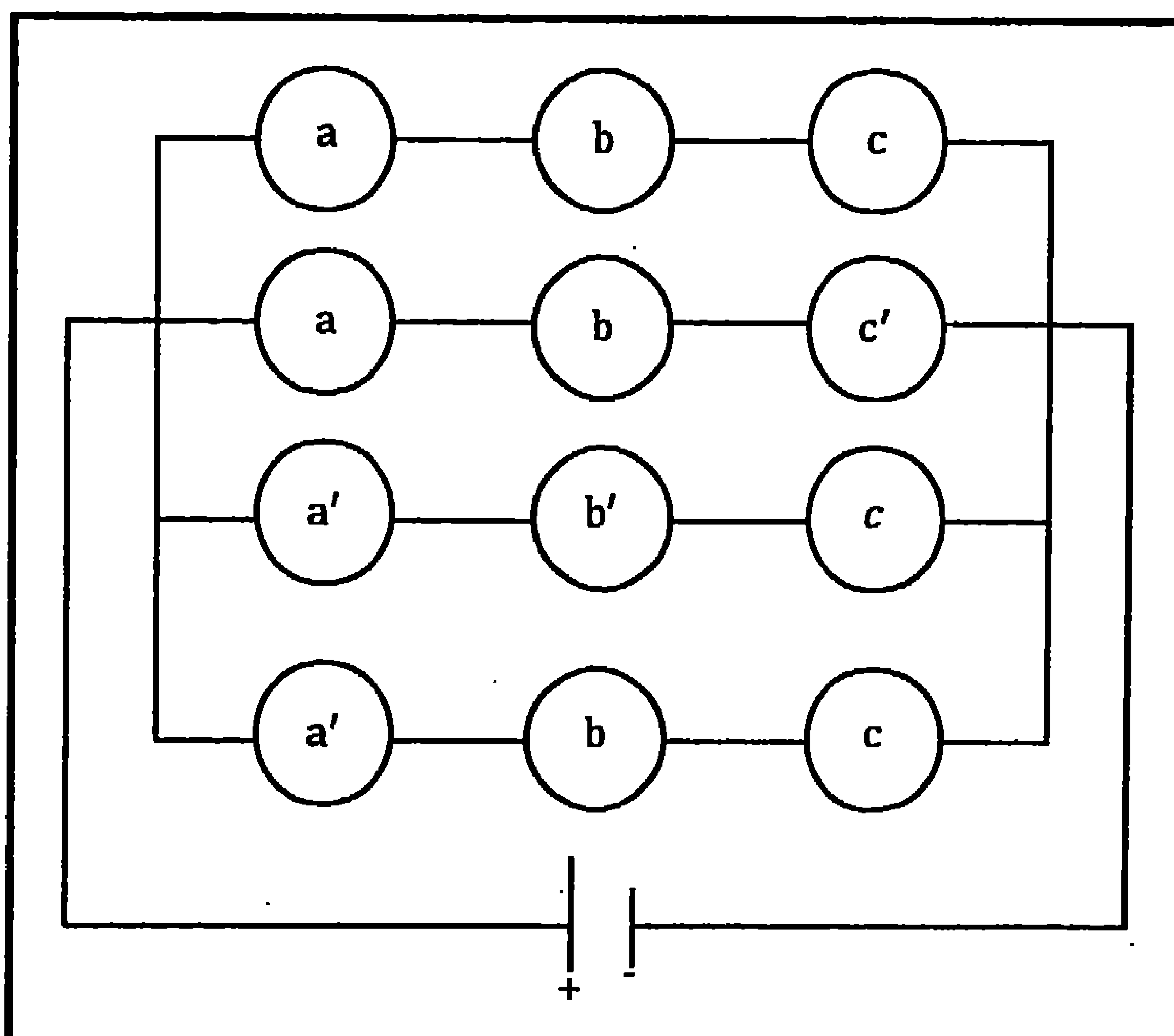
$\equiv [a \wedge U] \vee (a' \wedge b') \equiv a \vee (a' \wedge b') \equiv (a \vee a') \wedge (a \vee b')$

$\equiv U \wedge (a \vee b') \equiv a \vee b'$

إذن الدائرة تأخذ الشكل التالي:



مثال: بسط الدائرة الكهربائية



يمكن أن نعبر عن الدائرة الكهربائية بالتعبير المنطقي:

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c)$$

ثم نبسطها كما يلي:

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \equiv (a \wedge b) \wedge (c \vee c') \equiv (a \wedge b) \wedge U \equiv a \wedge b$$

وكذلك:

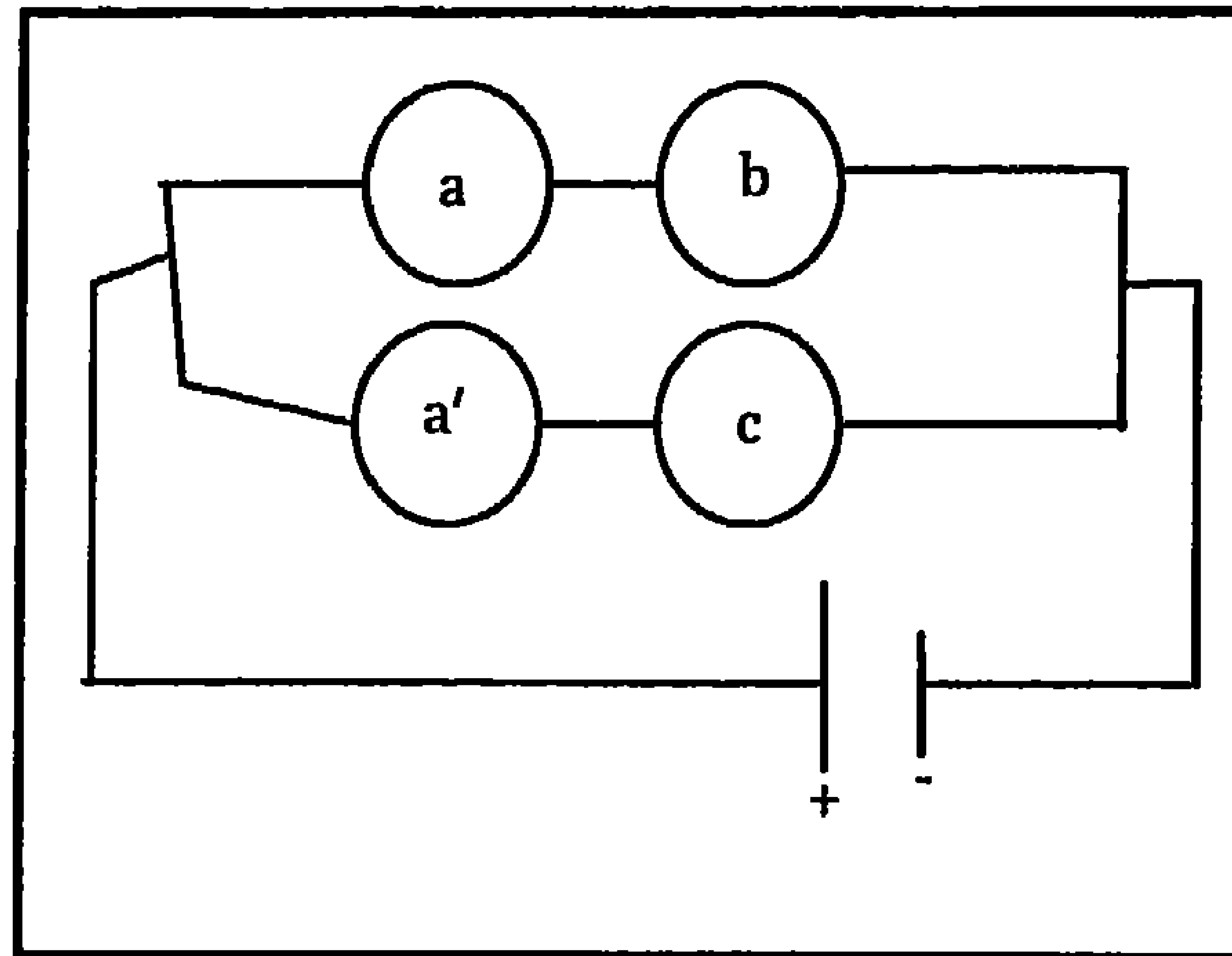
$$(a' \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c) \equiv [(a' \wedge b') \vee (a' \vee b)] \wedge c \equiv [a' \wedge (b' \vee b)] \wedge c$$

$$\equiv [a' \wedge U] \wedge c \equiv a' \wedge c$$

وبالتالي:

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \vee (a' \wedge c)$$

إذن الدائرة تأخذ الشكل التالي:



تمارين

1. أي من الجمل التالية تمثل جملاً منطقية (تقرير):

- الفيل أسرع حيوان.
- $x + 7 =$
- الشمس تشرق في الصباح.
- اليوم 48 ساعة.
- القمر يظهر في الصباح.
- القاهرة عاصمة اليمن.
- 5=3+2
- 7=8+2
- السعودية تصدر النفط.
- إذهب إلى المدرسة حالا.
- المدرسة قريبة من البيت.
- يستخدم الماء كوقود للطائرات.
- رجع سعيد من المصنع.
- ما أجمل سباحة الغوص.
- تدور الأرض حول الشمس.
- في أي مرحلة دراسية أنت؟
- أركان الإسلام خمسة.
- المربع هو حالة خاصة من المستطيل.
- $\frac{2}{3}$ عدد صحيح.
- $\frac{2}{3}$ عدد حقيقي.
- $x + 7 = 0$ حيث x عدد حقيقي.
- لا تكذب.

- 7 عدد زوجي.
- تعلم السباحة.
- لا تترك الكتاب على الأرض.
- هل السيارة غالية؟
- الفحم مصدر للطاقة الحرارية.
- المال غير مفيد.
- ماذا حفظت من سور القران الكريم؟

2. في السؤال الأول إذا كان التعبير المذكور يمثل تقرير (جملة منطقية) فحدد قيمة الصواب ثم إنفية.
3. ضع الجمل الأتية بدلالة الرموز ثم إذا علمت أن أحمد وفؤاد كلاهما غني فأي من الجمل الأتية تكون صحيحة:

- أحمد غني وفؤاد فقير.
- أحمد وفؤاد كلاهما غني.
- لا أحمد ولا فؤاد غني.
- أما أحمد غني أو فؤاد غني.
- أحمد ليس غني ولكن فؤاد غني.
- ليس صحيحا أن أحمد وفؤاد كلاهما غني.

4. إذا كانت p ترمز للجملة المنطقية البسيطة "الجو بارد" و q ترمز إلى الجملة المنطقية البسيطة "السماء تمطر" فعبر إنشائيا عن الجمل الأتية:

- $\sim p$
- $\sim q$
- $p \rightarrow q$
- $p \wedge q$
- $p \wedge \sim q$
- $\sim(p \wedge q)$

- $\sim p \wedge \sim q$
- $p \vee q$
- $p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q)$

5. عبر عن التقارير الأتية بصورة رمزية:

- إذا إجتهد الطالب فإنه سوف ينجح.
- تكون أطوال أضلاع المثلث متساوية إذا وإذا فقط كانت زوايا المثلث متساوية.
- الشمس مشرقة والمطر غزير.
- محمد يحب مجالسة الأطباء و المعلمين.
- محمد يحب مجالسة الأطباء أو المعلمين.
- محمد لا يحب مجالسة الأطباء و المعلمين.
- محمد يحب مجالسة الأطباء ولكنه لا يحب مجالسة المعلمين.

6. إذا كانت p ترمز للجملة المنطقية البسيطة "نزل المطر" و q ترمز إلى الجملة المنطقية البسيطة "إخضرت الأرض" فعبر إنشائيا عن الجمل الأتية:

- $p \wedge q$
- $p \vee q$
- $\sim p \wedge q$
- $\sim p \wedge \sim q$
- $p \rightarrow q$
- $p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q)$
- $p \leftrightarrow q$
- $\sim p \rightarrow q$
- $\sim p \rightarrow \sim q$

7. إذا كانت p هي العبارة (أحمد تاجر) و q هي العبارة (أحمد غني) عبر عن التقارير الآتيـة بصورة رمزية:

- أحمد تاجر وغني.
- أحمد تاجر وليس غني.
- ليس صحيح أن أحمد فقير أو تاجر.
- أحمد ليس تاجر ولا فقير.
- أحمد غني أو فقير وتاجر.
- ليس صحيحا أن أحمد فقير أو ليس تاجر.
- إذا كان أحمد تاجر فإنه فقير.
- أحمد تاجر إذا وفقط إذا كان غني.
- إذا كان أحمد غني فإنه تاجر.
- ليس صحيح إن أحمد فقير إذا كان أحمد تاجر.
- أحمد فقير إذا وفقط إذا كان أحمد تاجر.

8. صنف الجمل الآتية من حيث كونها صحيحة منطقيا أو متناقضة أو غير ذلك:

- $p \wedge \sim q$
- $p \vee \sim(p \vee q)$
- $p \rightarrow (p \wedge q)$
- $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
- $\sim(p \vee q)$
- $\sim(p \wedge q)$
- $\sim (p \vee \sim q)$
- $p \rightarrow \sim q$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

- $p \wedge q \rightarrow p$
- $(p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$
- $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $(p \vee \sim q) \wedge r$
- $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r)$
- $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$
- $p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
- $(p \wedge q) \wedge r \rightarrow \sim((p \rightarrow q) \rightarrow r)$
- $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge \sim p)$

9. إثبت أن:

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv p \wedge \sim q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
- $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)]$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$
- $[r \rightarrow p \vee q] \equiv [\sim p \wedge \sim q \rightarrow \sim r]$
- $[p \vee q \rightarrow r] \equiv [\sim r \rightarrow \sim p \wedge \sim q]$
- $[p \rightarrow q \wedge r] \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$
- $[p \leftrightarrow q] \equiv [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \equiv [q \leftrightarrow p]$
- $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$
- $p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$
- $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

10. بسط ما يلي:

- $(p \vee q) \wedge \sim p$
- $p \vee (p \wedge q)$
- $\sim (\sim p \wedge \sim q)$
- $p \wedge (\sim p \vee q)$
- $(p \wedge \sim p) \vee [(q \wedge \sim q) \wedge p]$
- $p \vee [q \vee (p \wedge \sim p)]$
- $[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$
- $\sim p \rightarrow p \vee q$
- $(\sim p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
- $\sim p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
- $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
- $[(p \vee q) \wedge \sim p] \wedge [\sim p \rightarrow \sim q]$
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim p)$

11. إكتب الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الأتية:

- $x - 6 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^2 - x - 6 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 + 8 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^2 - 2x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^2 + 4x + 5 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $2x^2 + 3x - 2 = 0, x \in \mathbb{R}$

- $2x^2 + x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $4x^2 + 28x + 49 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 + x - 2 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 - 27 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 - 3x^2 + 4 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 + x^2 + x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^3 - 3x^2 + 4 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^4 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$
- $x^4 + 3x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{R}$

12. إدرس تكافؤ كلاً من أزواج الجمل المفتوحة التالية:

- $x - 1 = 0,\ 2x + 1 = 3,\ x \in \mathbb{R}$
- $x - 1 = 0,\ x^3 - 1 = 0,\ x \in \mathbb{Z}$
- $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0,\ x^3 - 8 = 0,\ x \in \mathbb{Z}$
- $x^3 - x^2 + x - 1 = 0,\ 2x - 8 = -6,\ x \in \mathbb{Z}$
- $x^2 - x - 6 = 0,\ x + 2 = 0,\ x \in \mathbb{R}$
- $x^3 + 8 = 0,\ x + 2 = 0,\ x \in \mathbb{R}$
- $x^2 - 3x + 2 = 0,\ x - 2 = 0,\ x \in \mathbb{R}$
- $x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$
- $x^2 + 4x + 5 = 0,\ x + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$
- $2x^2 + 3x - 2 = 0,\ x + 2 = 0,\ x \in \mathbb{Z}$

13. برهن بطريقة البرهان المباشر ما يلي:

- إذا كان a وb عددان فرديان فإن $a^2 + b^2$ يكون عدد زوجي.
- إذا كان x=1 فإن $x^2 = 1$.
- إذا كانت $ax = 0, a \neq 0$ فإن $x = 0$.
- إذا كانت $x^2 + y^2 = 3$ فإن $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 6$.
- إذا كانت x عدد فردي فإن x^3 تكون أيضا عدد فردي.

14. برهن بطريقة البرهان العكسي ما يلي:

- إذا كانت $a^2 + b^2$ عدد فردي فإن a أو b يكون عدد فردي.
- إذا كانت x عدد فردي فإن x^3 تكون أيضا عدد فردي.
- إذا كان a وb عددان فرديان فإن $a + b$ يكون عدد زوجي.

15. برهن بطريقة التناقض ما يلي:

- حاصل ضرب عددين فردين هو عدد فردي.
- $\sqrt{3}$ عدد نسبي.

16. برهن بطريقة المثال العكسي خطأ الإدعاء في كلا مما يلي:

- حاصل ضرب عددين فردين هو عدد زوجي.
- $4x + 5 = 0, \ x \in \mathbb{Z}$
- $x^2 + 4x + 5 = 0, \ x \in \mathbb{Z}$
- $(x+2)^2 = x^2 + 4, \ x \in \mathbb{Z}$
- مجموع العددين الفردين يكون عدد فردي.

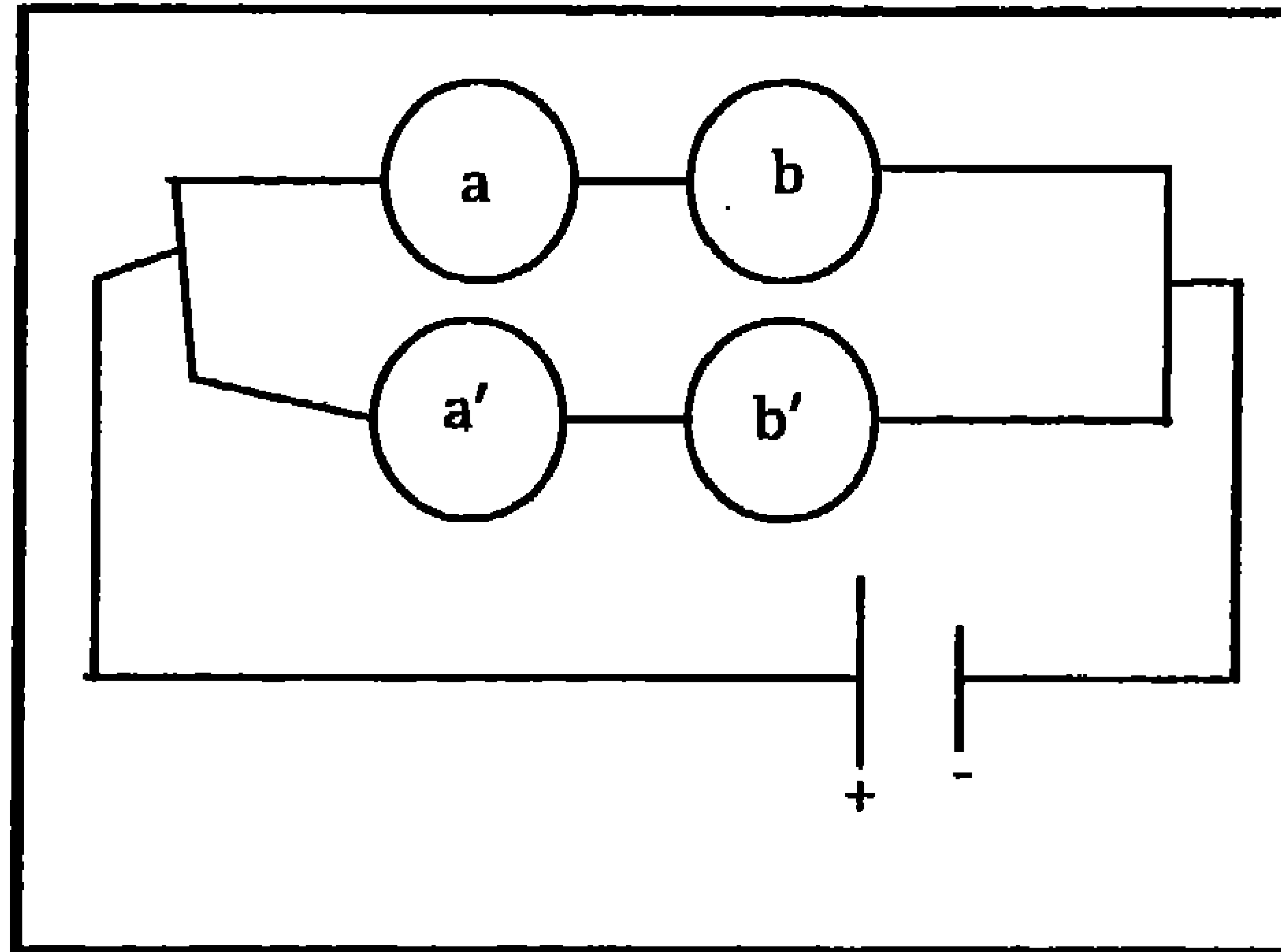
17. بإستخدام مبدأ الإستقراء الرياضي إثبت صحة التقارير التالية:

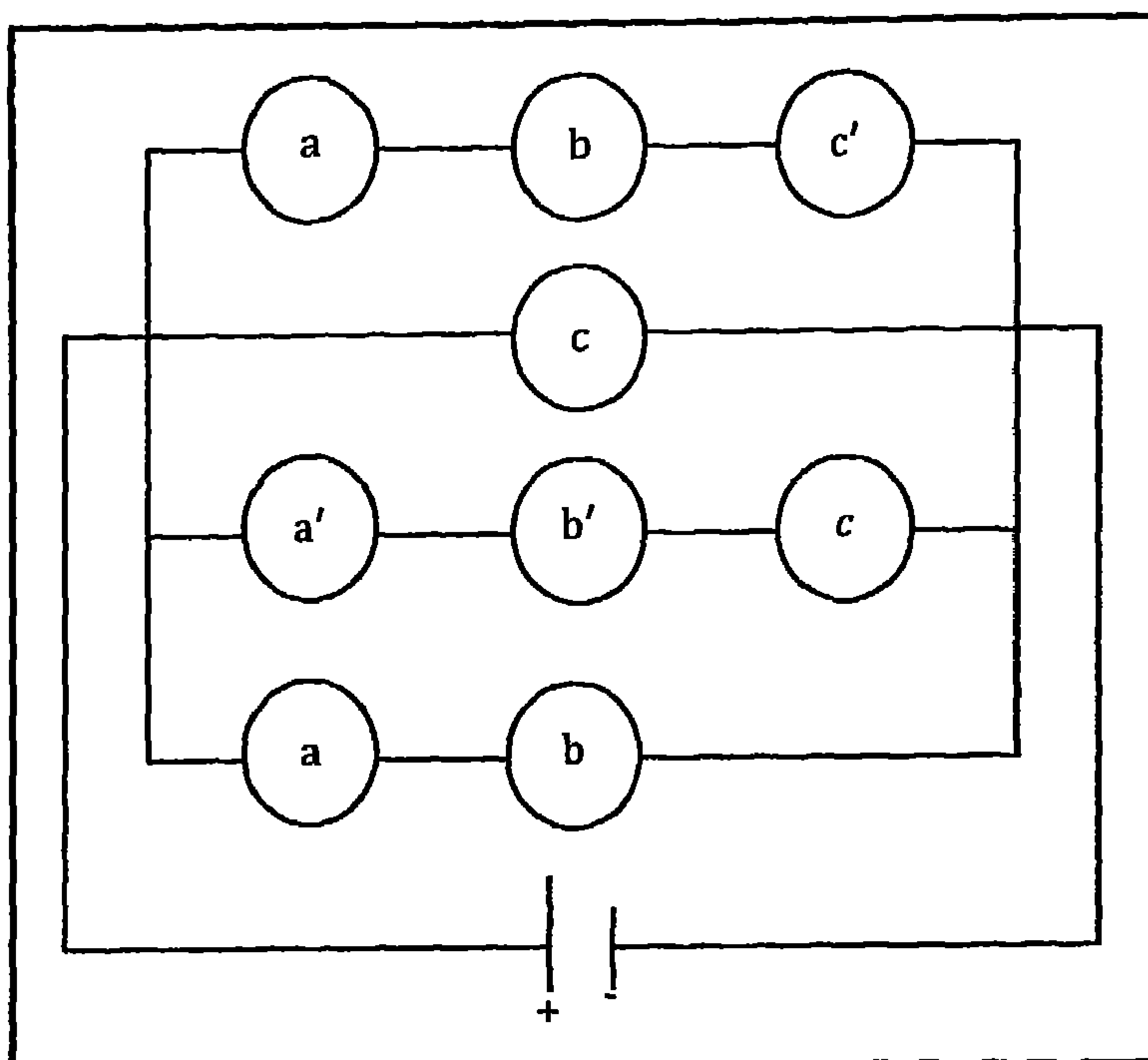
- $\forall n \geq 1, \quad 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$;
- $\forall n \geq 1, \quad 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \frac{1}{2}n(3n+1)$;
- $\forall n \geq 1, \quad 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$;
- $\forall n \geq 1, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

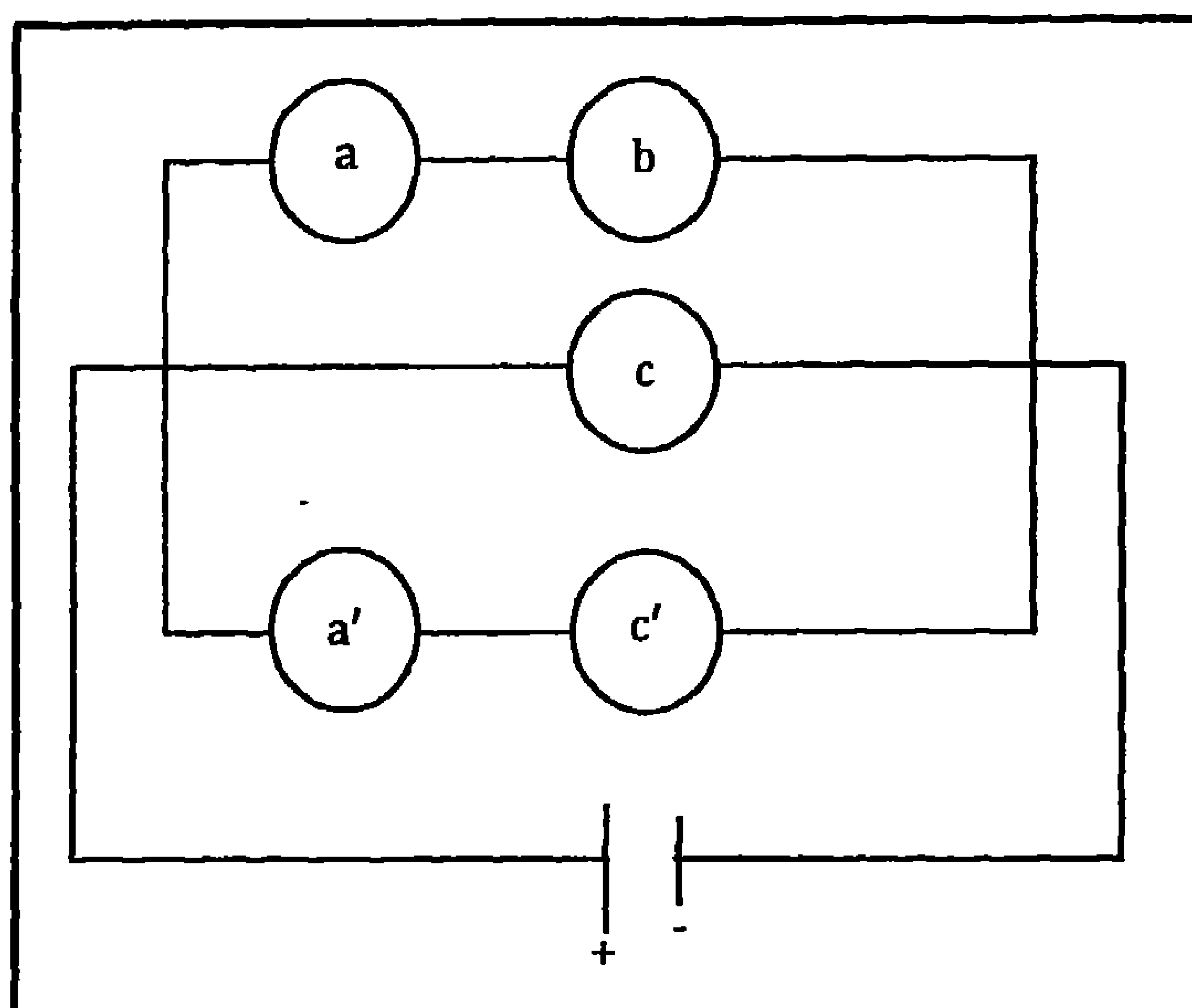
- $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
- $\forall n \geq 1, \quad 1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$
- $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$
- $\forall n \geq 1, \quad 3+5+7+\cdots+(2n+1)=n(n+2)$
- $\forall n \geq 1, \quad 1.2.3+2.3.4+\cdots+n(n+1)(n+2)$

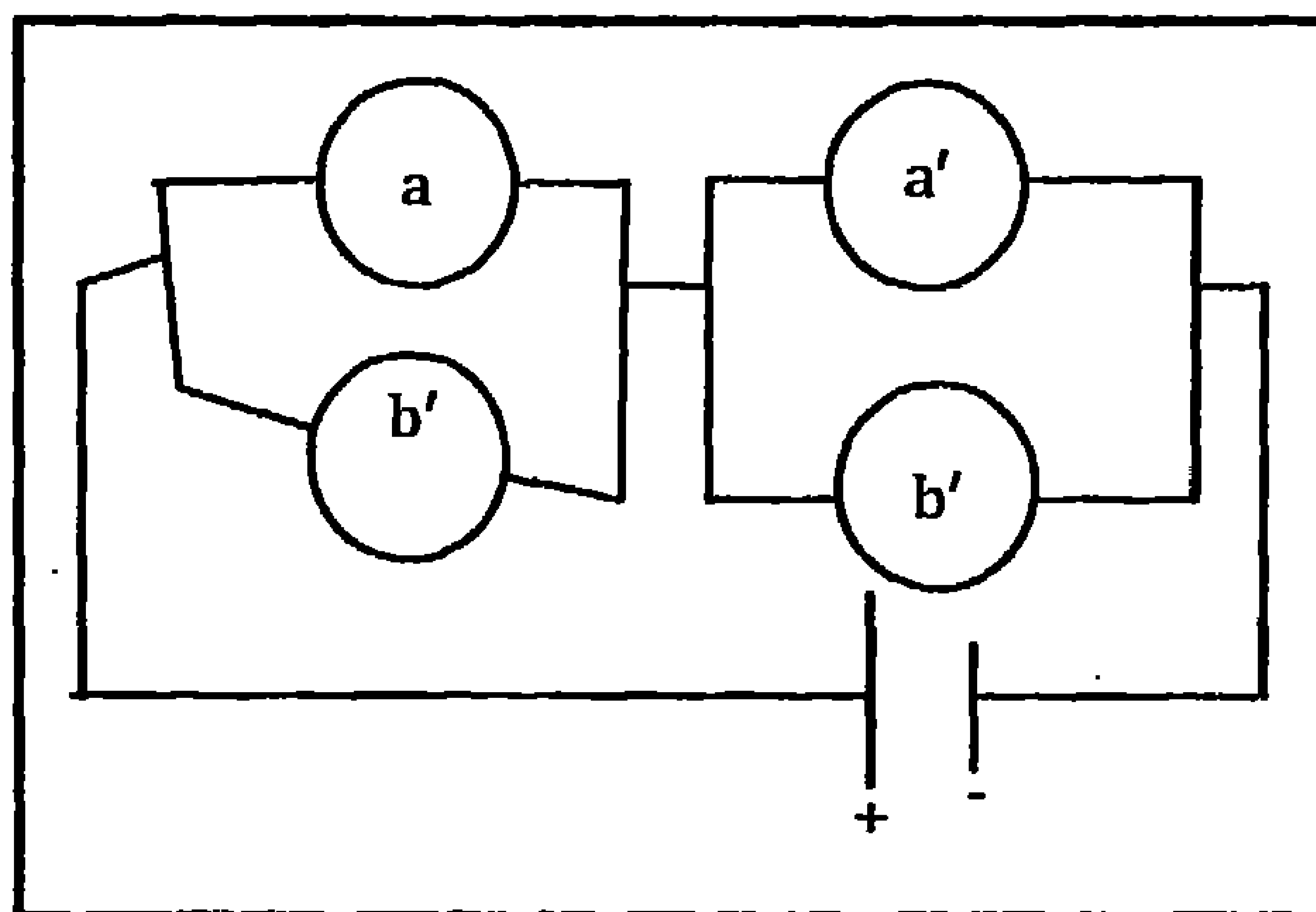
  $=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$
- $\sum_{n=1}^{m}(3n-2)=\frac{1}{2}(m)(3m-1)$
- $\sum_{n=1}^{m}(2n+1)^3=m(2m^3+8m^2+11m+6)$
- $\sum_{n=1}^{m}(2n-1)^2=\frac{1}{3}(m)(2m-1)(2m+1)$

18. هل المجادلة الأتية صائبة أم لا "إذا كان الجو ممطرا فإنك لن تذهب للمدرسة ولكن الجو لم يكن ممطرا وبالتالي فانت ذهبت للمدرسة".
19. عبر بإستخدام رموز المنطق عن الدوائر الكهربائية:




a
b
c′
c
a′
b′
c
a
b
+
-


a
b
c
a′
c′
+
-



20. إرسم الدائرة الكهربائية التي تنطبق مع التعابير المنطقية التالية:

- $(a \vee b) \wedge c$
- $(a \wedge b) \wedge (a \vee b')$
- $a \wedge (b \wedge c')$
- $(a \vee b) \wedge [a' \vee (c \wedge b')]$
- $[(a \vee b) \vee c'] \wedge [a' \vee (c \wedge b')]$

الفصل الثالث

المجموعات

Sets

(3-1) المجموعات (الفئات)

(3-2) المجموعة الشاملة

(3-3) إتحاد المجموعات

(3-4) تقاطع المجموعات

(3-5) الفرق بين مجموعتين

(3-6) الفرق التناظري بين مجموعتين

(3-7) حاصل الضرب الكارتيزي

تمارين

الفصل الثالث

المجموعات

(3-1) المجموعات (الفئات)

لا يوجد تعريف دقيق للمجموعة (الفئه) فمثلاً إذا قلنا أن المجموعة هي تجمع (تكتل) من الأشياء فسيكون السؤال ما هو المقصود بالتجمع أو التكتل ولهذا إتفق علماء الرياضيات على أن يكون مفهوم المجموعة (الفئه) هو مفهوم أولى نستخدمه ولا يمكن الإستغناء عنه في الرياضيات؛ فمثلاً نقول "مجموعة كل الأعداد الحقيقية" أو نقول "مجموعة كل طلاب الصف الأول في المدرسة" أو نقول "مجموعة الألوان" ... الخ

ولكننا سوف نعتبر التعريف التالي هو تعرف المجموعة (الفئة) لكي نستطيع إستخدامه بشكل رياضي عملي مبسط.

> تعريف (3.1.1): المجموعة (الفئة) هي عبارة عن تجمع أشياء(عناصر) معرفة تعريفا كاملاً بحيث:
>
> 1. يمكن التمييز بين هذه الأشياء (العناصر) داخل المجموعة.
> 2. يمكن الحكم بوجود الشيء داخل المجموعة من عدمه.

ملاحظات:

1. نرمز عادة للمجموعات بحروف كبيرة مثل $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ بينما نرمز لعناصر المجموعة بالرموز الصغيرة مثل $a, b, c, \ldots, x, y, z$.
2. إذا كانت S مجموعة تتكون من عناصر وكانت a أحد هذه العناصر فإن $a \in S$ أما إذا كان a ليس عنصر من عناصر المجموعة S فإن $a \notin S$.
3. المجموعة يجب أن تكون حسنة التعريف بمعنى إنه يجب أن يكون واضح جداً ما إذا كان أي عنصر x ينتمي إلى هذه المجموعة أو أنه لا ينتمي إلى هذه المجموعة .

4. عناصر المجموعة تكون متمايزة بمعنى أنه لا داعي لتكرار أي عنصر من عناصر المجموعة كما أن ترتيب العناصر داخل المجموعة ليس له أي تأثير عليها.
5. يمكن وصف المجموعة بطريقة الوصف (القاعدة) $S = \{x: p(x)\}$ ومثال لذلك $S = \{x \in \mathbb{Z}: 2 < x \leq 8\}$ أو بطريقة الجرد ويتم فيها كتابة جميع العناصر داخل قوسين وذلك إذا كانت المجموعة محدوده ومثال لذلك $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
6. المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد تسمى مجموعة أحادية (Singleton Set).
7. يوجد مجموعة واحده فقط لا يوجد فيها أي عنصر وتسمى المجموعة الخالية φ وهذه المجموعة تسمى مجموعة خالية (Empty Set) ويرمز لها عادة بالرمز φ وتقرأ "فاي" ويرمز لها أحيانا بالرمز { }.
8. من الممكن أن تكون عناصر المجموعة هي أيضا مجموعات فمثلا مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تتكون من مجموعة الأعداد الزوجية و مجموعة الأعداد الفردية وتكتب $\mathbb{Z}$={even numbers, odd numbers}.
9. يقال لمجموعة ما إنها منتهية (finite) إذا كانت تحتوي على عدد محدود من العناصر أو إنها تكون المجموعة الخالية φ وغير ذلك تكون المجموعة غير محدودة (infinite).
10. إذا كانت S مجموعة منتهية فإننا نرمز لعدد عناصر المجموعة S بالرمز $|S|$ فمثلا المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ عدد عناصرها هو $|S| = 5$ بينما المجموعة الخالية يكون عددها يساوي صفر أي أن $|\varphi| = 0$.

مثال: العبارات الآتية تمثل مجموعات:

1. كليات جامعة صنعاء.
2. طلاب كلية العلوم.
3. مجموعة الأعداد الطبيعية ... ,0, 1, 2
4. مجموعة الألوان : أحمر – أبيض – أسود – أزرق – أخضر – أصفر.
5. مجموعة الأعداد: 1, 7, 2, 9

مثال: من أمثلة عناصر المجموعة:

1. العدد 4 هو عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية.
2. كلية الهندسة هي أحد كليات الجامعة الوطنية.

3. العدد 2 هو أحد عناصر مجموعة الأعداد: 1, 7, 2, 9

4. اللون الأسود هو أحد عناصر مجموعة الألوان : أحمر – أبيض – أسود – أزرق – أخضر – أصفر.

مثال: من أمثلة الأشياء التي لا تمثل مجموعات:

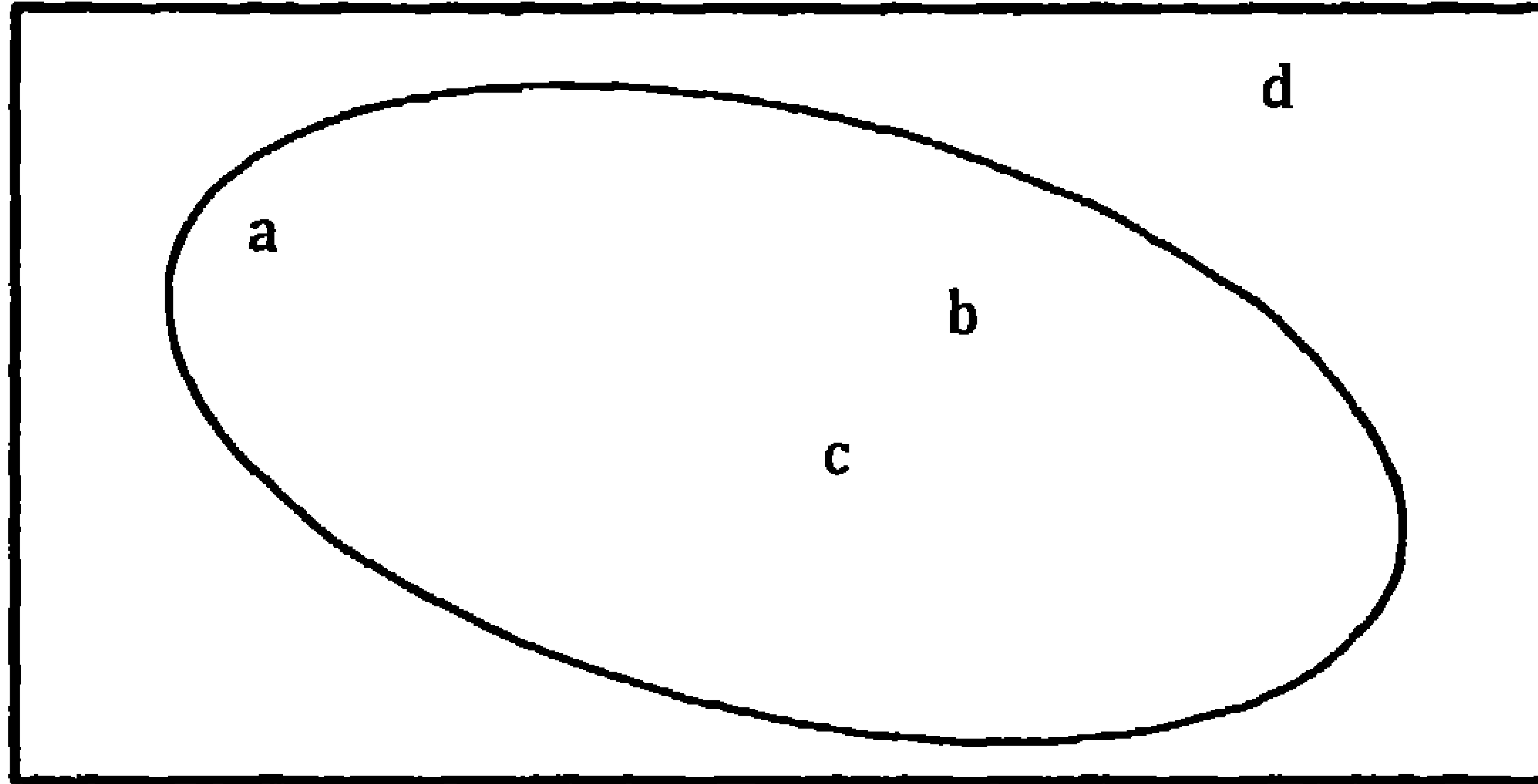
1. ألأعداد المهمة لإننا لا نستطيع أن نميز مثلا العدد 5 هل هو مهم أو غير مهم.
2. الأولاد الأذكياء لأن الذكاء هو نسبي بمعنى قد يكون الولد ذكي جدا في الدراسة ولكنه ليس كذلك في رياضة كرة القدم.
3. ألمدن الجميلة لأن صفة الجمال نسبية وتختلف من شخص لأخر فقد تكون أحد المدن القديمة جميلة جدا من وجهة نظر شخص ما ولكنها ليست كذلك من جهة شخص أخر.
4. ألطعام اللذيذ لأن صفة لذة الطعام نسبية وتختلف من شخص لأخر فقد يحب شخص مثلا أكل السمك وبالتالي يعتبره طعام لذيذ بينما شخص أخر لا يتقبل أكل السمك ولا رائحة السمك وبالتالي فهو يعتبره طعام ليس لذيذ.

مثال: الجموعات الأتية هي مجموعات خالية:

1. $\varphi = \{x: x \neq x\}$
2. $\varphi = \{x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}: 2|x\}$
3. $\varphi = \{x: |x| \leq -1\}$
4. $\varphi = \{x: \sin x \geq 2\}$
5. $\varphi = \{x \in \mathbb{Z}: x|2,\ x > 2\}$

ملاحظة: أشكال فن Venn diagrams وفيها نمثل المجموعة بنقاط في مستوى محاطة بخط مغلق كدائرة أو مربع أو مستطيل مما يساعد على تصور المجموعة ويسهل فهمها.

مثال: الجموعة $S=\{a, b, c\}$ وفيها $b \in S, d \notin S$ كما يلي:



حيث تمثل العناصر داخل الجموعة بنقاط داخل المخطط بينما العناصر التي لا تنتمي لهذه الجموعة فهي نقاط خارج المخطط .

ملاحظة: لا يمكن إعتبار أشكال فن برهان رياضي بل فقط يستفاد منها في توضيح الجموعة.

> **تعريف (3.1.2):** يقال أن الجموعتان A و B إنهما متساويتان إذا وإذا فقط كانتا تحتويان على نفس العناصر بالظبط أو بعبارة أخرى إذا كان كل عنصر من عناصر الجموعة A يكون موجود أيضا داخل الجموعة B وكذلك كل عنصر من عناصر الجموعة B يكون موجود أيضاً داخل الجموعة A وفي هذه الحالة نكتب
>
> $[A=B]\equiv[\forall x\in A\leftrightarrow x\in B]$
>
> بينما تكون الجموعتان A و B غير متساويتان إذا وجد عنصر واحد على الأقل من أحد الجموعتين لا ينتمي إلى الجموعة الأخرى وفي هذه الحالة نكتب $A\neq B$

مثال: لتكن

$A = \{5, 5, 2, 1, 6\},\ B = \{1, 6, 2, 5, 2\}$

إذن الجموعتان متساويتان ونكتب:

$A = B = \{5, 2, 1, 6\}$

مثال: لتكن

$A = \{x \in \mathbb{Z}:\ -1 \leq x < 4\},\ B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

إذن الجموعتان متساويتان ونكتب: $A = B$.

مثال: لتكن

$A = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 - 3x + 2 = 0\}, \qquad B = \{1,2\}, C = \{1,2,2,1\}$

إذن المجموعات متساوية ونكتب: $A = B = C$

مثال: لتكن

$A = \{x \in \mathbb{Z}: -1 \leq x < 4\}, \qquad B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$

إذن المجموعتان غير متساويتان لأن العنصر $-1 \in A, -1 \notin B$

كذلك العنصر $-2 \in B, -2 \notin A$ وفي هذه الحالة نكتب: $A \neq B$

تعريف (3.1.3): المجموعة A تكون مجموعة جزئيه من B إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B بمعنى إذا كان لكل $x \in A$ فإن $x \in B$ وفي هذه الحاله نكتب $A \subseteq B$ حيث

$A \subseteq B \equiv [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$

مثال: لنفرض أن $A = \{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x < 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 < x \leq 11\}$

اذن $A \subset B$.

ملاحظه:

- نقول أن المجموعة A ليست مجموعة جزئية من B ونكتب $A \not\subset B$ إذا وجد على الأقل عنصر واحد x من A لا ينتمي إلى B ويمكن كتابة ذلك ب

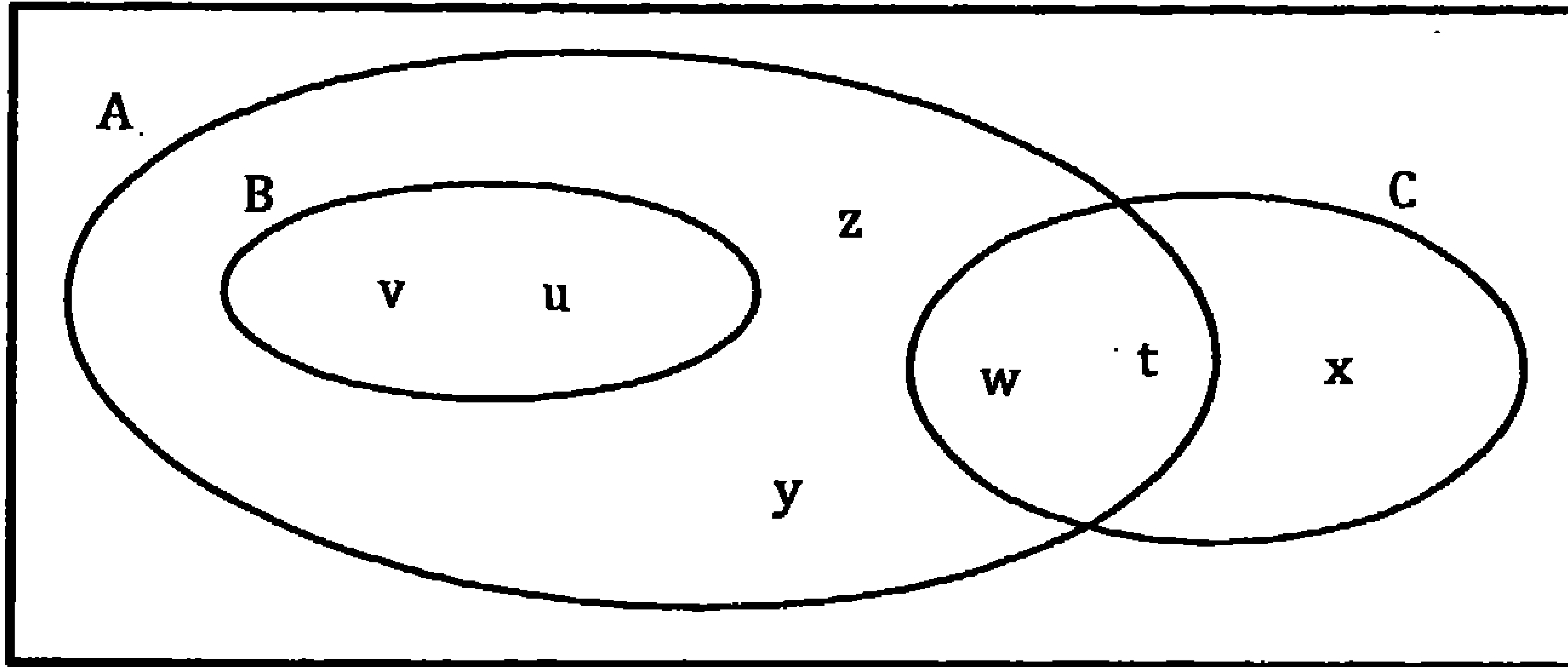
$A \not\subset B \equiv [\exists x \in A, x \notin B]$

- نقول أن المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (proper subset) من B وتكتب $A \subset B$ إذا كانت A مجموعة جزئية من B و $A \neq B$ وفي هذه الحالة يوجد على الأقل عنصر واحد من المجموعة B لا ينتمي إلى المجموعة A .
- المجموعتان A, B يقال أنهما مجموعات قابلة للمقارنة (Comparable Sets) إذا كانت أحد المجموعتان مجموعة جزئية من الأخرى وهذا يحدث إذا كانت $A \subset B$ أو $B \subset A$ وغير ذلك تكون المجموعتان غير قابلتان للمقارنة .

مثال: إعتبر المجموعات

$A = \{u, v, w, t, y, z\}, \qquad B = \{u, v\}, \qquad C = \{w, t, x\}$

بإستخدام أشكال فن:



إذن:

$B \subset A, \qquad C \not\subset A$

مثال: إعتبر المجموعات

$A = \{0,1,2,3,5\}, \qquad B = \{0,2,3,4\}, \qquad C = \{0,1,3\}$

إذن:

$C \subset A, \qquad B \not\subset A, \qquad A \not\subset B$

إذن المجموعات A, C قابلة للمقارنة بينما المجموعات A, B غير قابلة للمقارنة.

نظرية (3.1.4): إذا كانت A و B و C فإن:

1. $A \subseteq A$.
2. إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.
3. $A = B$ إذا وإذا فقط كان $B \subseteq A$, $A \subseteq B$.

البرهان:

أولاً: لكل $x \in A$ فإن $x \in A$ إذن: $A \subseteq A$.

ثانياً: إذا كانت $x \in A$ و $A \subseteq B$ فإن $x \in B$ وبما أن $B \subseteq C$ فإن $x \in C$ إذن $A \subseteq C$.

ثالثاً: $A = B$ إذا وإذا فقط كان:

$$[\forall x \in A \leftrightarrow x \in B] \equiv [\forall x \in A \rightarrow x \in B] \wedge [\forall x \in B \rightarrow x \in A]$$

$$\equiv [A \subseteq B] \wedge [B \subseteq A]$$

نظرية (3.1.5):

1. المجموعة الخالية φ تكون دائماً مجموعة جزئية من أي مجموعة أخرى.

2. المجموعة الخالية φ تكون دائما وحيدة.

البرهان:

أولاً: نفرض جدلا أن $\varphi \not\subset A$

إذن يوجد عنصر x بحيث $x \in \varphi$ ولكن $x \notin A$ وبالطبع هذا مستحيل أن يكون $x \in \varphi$

إذن $\varphi \subset A$

ثانياً: إذا إفترضنا أنه يوجد مجموعتين خاليتين φ_1 و φ_2 فمن الفقرة الأولى:

إذا كانت φ_1 مجموعة خالية فإن $\varphi_1 \subset \varphi_2$ ....(1)

وإذا كانت φ_2 مجموعة خالية فإن $\varphi_2 \subset \varphi_1$ ....(2)

إذن من (1) و (2) نجد أن $\varphi_1 = \varphi_2$

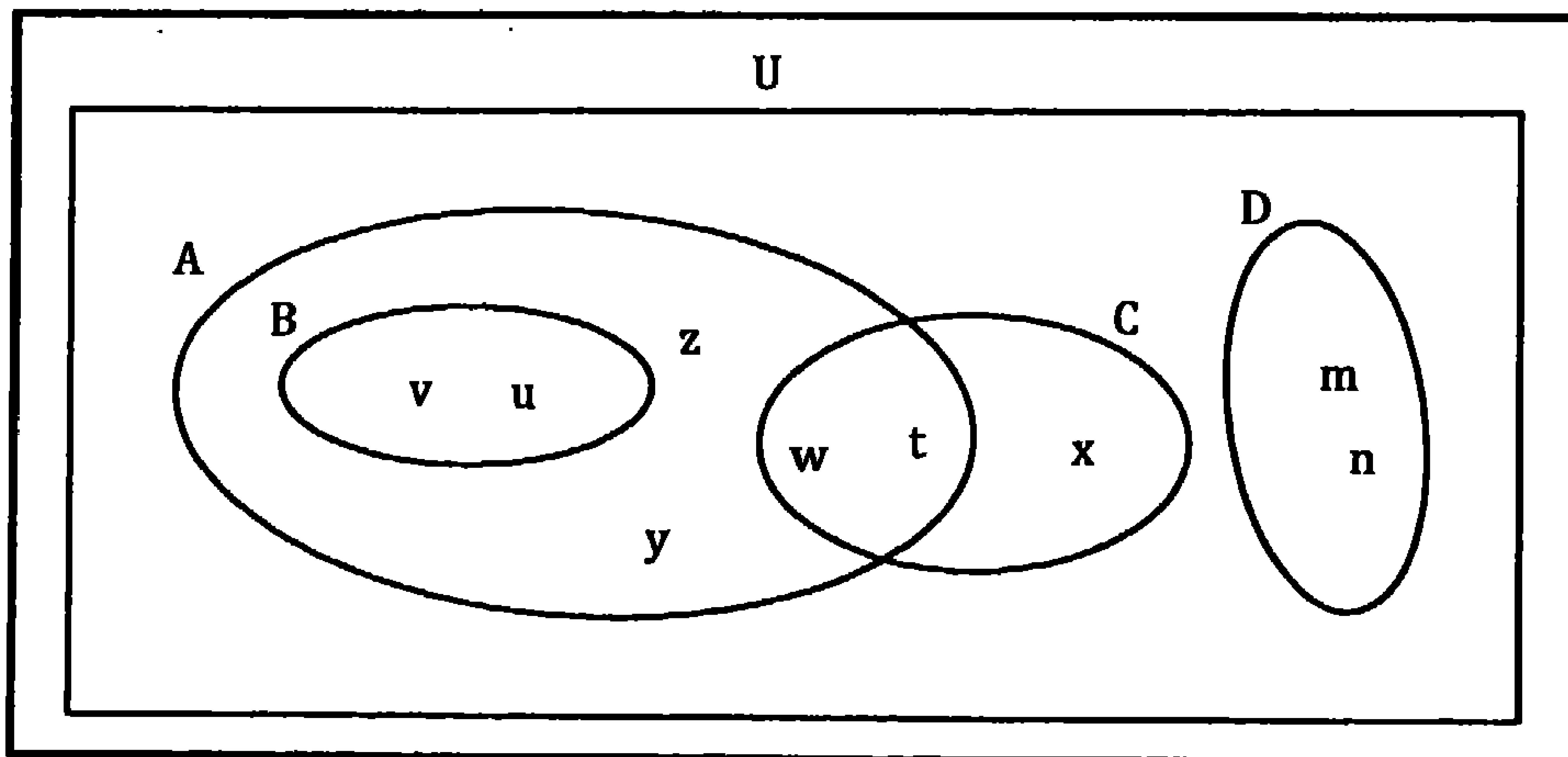
(3-2) المجموعة الشاملة Universal set

في أي مسألة من مسائل المجموعات لا بد من وجود مجموعة كاملة (شاملة) U بحيث تكون جميع المجموعات التي ندرسها تكون مجموعات جزئية من U أو بمعنى أخر يجب أن تكون جميع عناصر المجموعات الجزئية تنتمي جميعها إلى U وفي العادة عند إستخدام أشكال فن فإن المجموعة الشاملة تأخذ شكل المستطيل وبداخلها تقع المجموعات الجزئية.

مثال: إعتبر المجموعات

$A = \{u, v, w, t, y, z\}$, $B = \{u, v\}$, $C = \{w, t, x\}$, $D = \{m, n\}$

بإستخدام أشكال فن:



إذن:

$A \subset U, \quad B \subset U, \quad C \subset U, \quad B \subset A$

$U = \{u, v, w, t, y, z, x, m, n\}$

مثال: إذا كان:

$A = \{1,3,5,7,9\}, B = \{2,4,6,8\}, C = \{0,1,2,11\}$

إذن من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$U_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

أيضا من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$U_2 = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$

أيضا من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$U_3 = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{Z}$

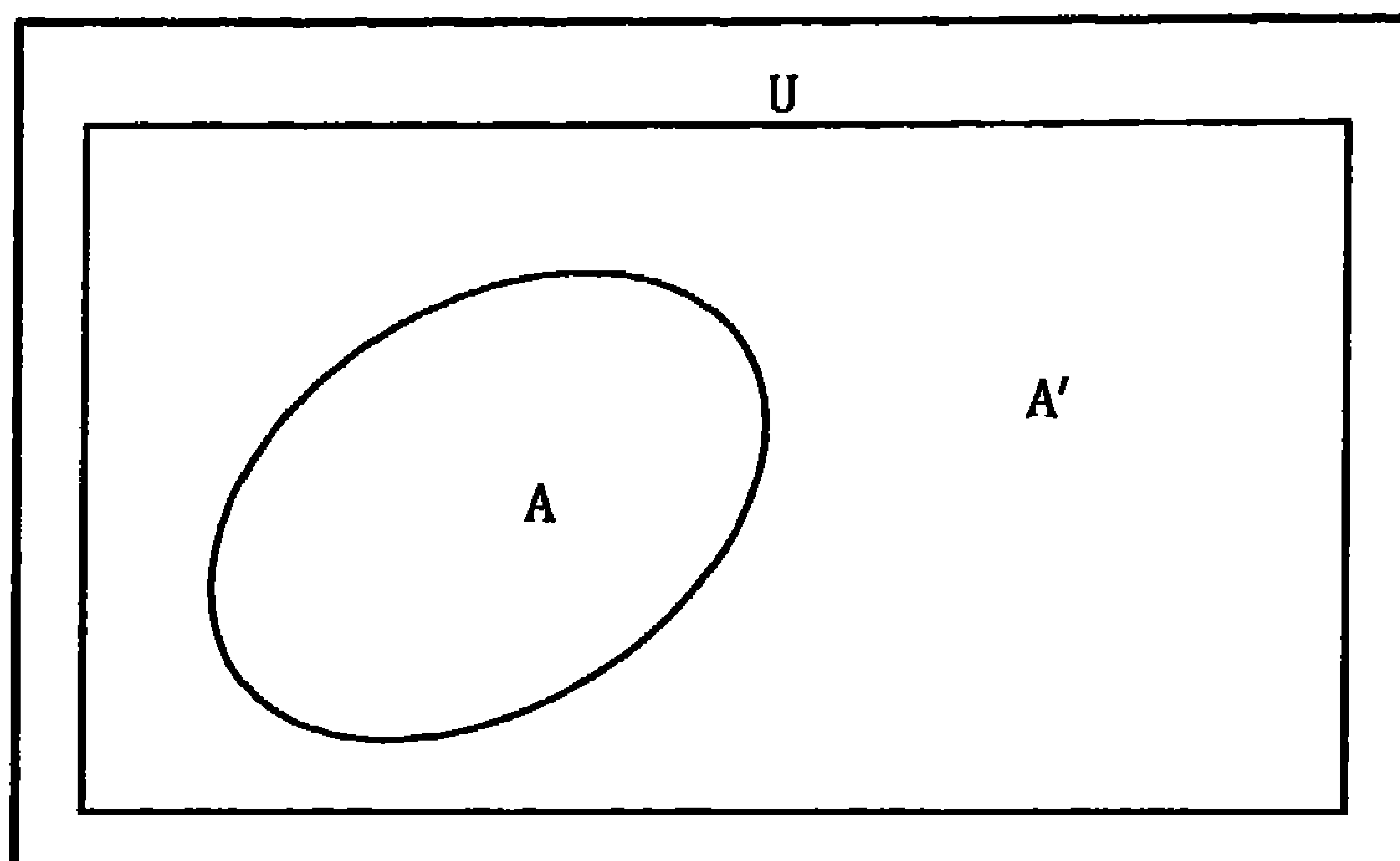
إذن المجموعة الشاملة على أرض الواقع من الممكن أن نختارها بأكثر من طريقة ولكن أتفق الرياضيون بأن تجاه أية مسألة من مسائل المجموعات لابد أولا من تحديد مجموعة U لا تتغير داخل المسألة بحيث كل المجموعات الجزئية تكون داخلها وهذه U هي المجموعة الشاملة وبالتالي فإن المجموعة الشاملة بهذا المفهوم تكون وحيدة .

تعريف (3.2.1): ليكن U تكون مجموعة شاملة و A مجموعة جزئية منها فإن المجموعة المتكونة من جميع عناصر U التي لا تنتمي إلى A تسمى متممة (مكملة) A ونرمز لها بالرمز A′ وبالتالي تكون:

$A' = \{x \in U, x \notin A\} = U - A = U \backslash A$

ملاحظات:

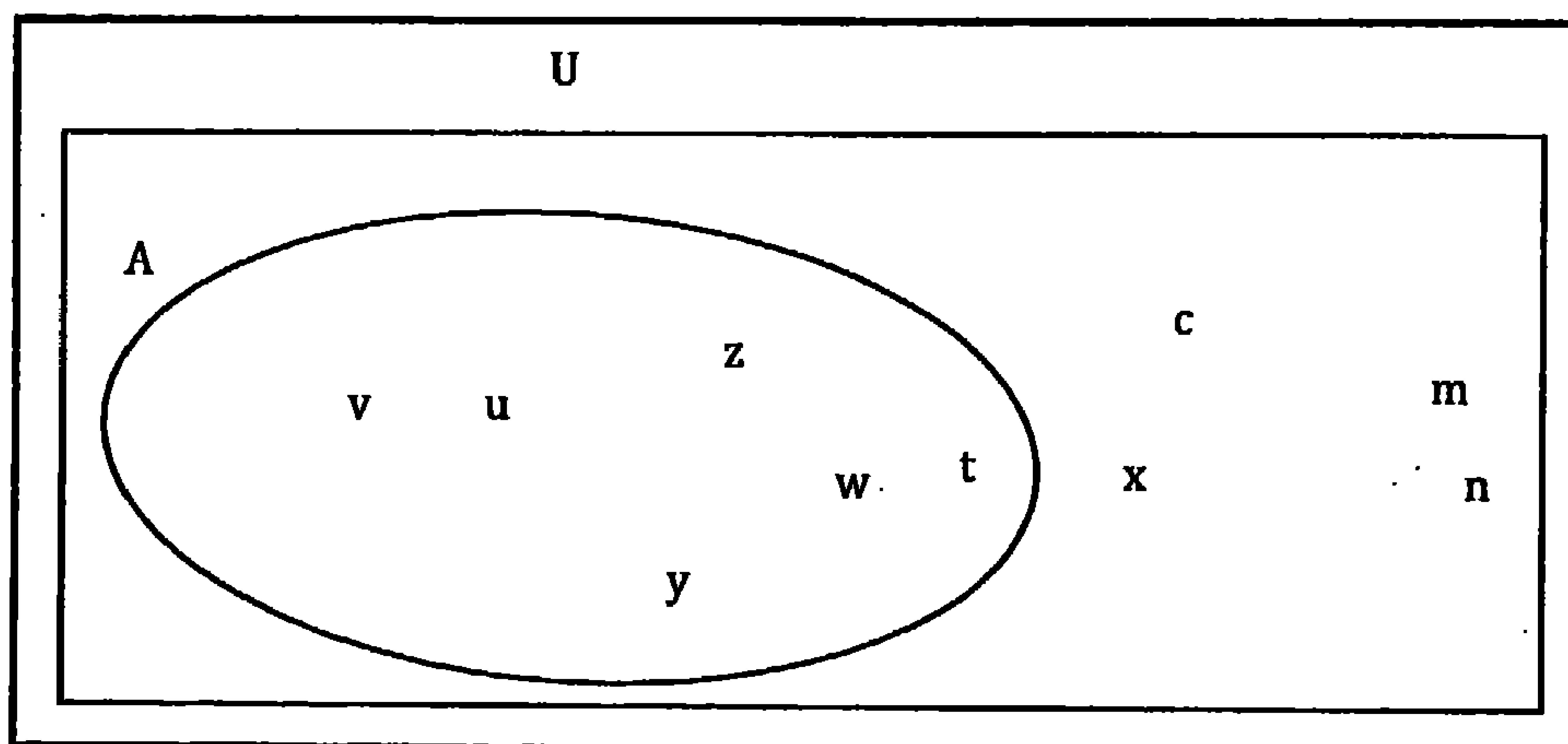
1. من الممكن أن نوصف المجموعة المتممة A' بإستخدام أشكال فن كما يلي:



2. دائما يكون $A \cup A' = U$
3. دائما يكون $A = U - A'$

مثال: إذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{u, v, y, z, w, t, x, c, m, n\}$

ولها المجموعة الجزئية $A = \{u, v, y, z, w, t\}$



فإن المجموعة المتممة للمجموعة A هي:

$A' = \{x, c, m, n\}$

مثال: إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z}: x \geq 0\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكون المجموعة المتممة لA هي:

$A' = \{x \in \mathbb{Z}: x < 0\}$

مثال: إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكون المجموعة المتممة لA هي مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية أي أن:

$A' = \{x \in \mathbb{Z}: x \text{ is odd}\}$

مثال: إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z}: x \leq -3,\ x > 5\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكون المجموعة المتممة لA هي:

$A' = \{x \in \mathbb{Z}: -3 < x \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

مثال: إذا كانت $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 4\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

المجموعة المتممة لA هي:

$A' = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$

نظرية (3.2.2): ليكن U هي المجموعة الشاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:

1. $(A')' = A$
2. $\varphi' = U$
3. $U' = \varphi$
4. $A \subseteq B \leftrightarrow B' \subseteq A'$

5. $A = B \leftrightarrow B' = A'$

6. if $A \subseteq B$ then $A' \cap B = \varphi$

7. if $A \subseteq B$ then $A' \cup B = U$

البرهان:

أولاً: بما أن

$$x \in A \leftrightarrow x \notin A' \leftrightarrow x \in (A')'$$

إذن:

$$(A')' = A$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$(A')' = U - A' = A$$

ثانياً:

بما أن:

$$x \notin \varphi \leftrightarrow x \in \varphi' = U$$

إذن:

$$\varphi' = U$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$\varphi' = U - \varphi = U$$

ثالثاً:

بما أن:

$$x \in U \leftrightarrow x \notin U' = \varphi$$

إذن:

$$U' = \varphi$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$U' = U - U = \varphi$$

أو من الممكن أن نبرهنها بإسلوب أخر:

$$\varphi = (\varphi')' = (U)' = U'$$

رابعاً:

$$A \subseteq B \leftrightarrow [x \in A \rightarrow x \in B] \leftrightarrow [x \notin A' \rightarrow x \notin B'] \leftrightarrow A' \subseteq B'$$

خامساً:

$A = B \leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A] \leftrightarrow [A' \subseteq B' \wedge B' \subseteq A'] \leftrightarrow A' = B'$

سادساً:

$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A' \rightarrow A \cap B' \subseteq A \cap A' \rightarrow A \cap B' \subseteq \varphi$

ولكن: $Q \subseteq A \cap B'$

إذن: $A \cap B' = \varphi$

سابعاً:

$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A' \rightarrow B \cup B' \subseteq B \cup A' \rightarrow U \subseteq B \cup A'$

ولكن: $B \cup A' \subseteq U$

إذن: $B \cup A' = U$

تعريف (3.2.1): ليكن A مجموعة فإن P(A) هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من A وتسمى مجموعة قوى A (power set of A) ويمكن كتابتها ب:

$P(A) = \{X: X \subseteq A\}$

مثال: إذا كانت $A=\{1, 2, 3\}$ فإن

$P(A)=\{\varphi,\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

ملاحظات:

1. عناصر المجموعة P(A) هي فئة كل المجموعات الجزئية من A .
2. $A \not\subset P(A)$ ولكن $A \in P(A)$ بمعنى أنه إذا كانت $X \in P(A)$ فإن $X \subseteq A$.
3. دائما تكون المجموعات A و φ مجموعات جزئية من A لذا فإن مجموعة القوى P(A) هي مجموعة غير خالية.
4. إذا كانت A=φ فإن $P(A)=\{\varphi\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^0 = 1$.

وإذا كانت $A=\{a\}$ فإن $P(A)=\{\varphi, A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^1 = 2$.

وإذا كانت $A=\{a, b\}$ فإن $P(A)=\{\varphi,\{a\}, \{b\},A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^2 = 4$.

وإذا كانت $A=\{a, b, c\}$ فإن $P(A)=\{\varphi,\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^3 = 8$.

مبرهنة (3.2.4): إذا كانت A هي مجموعة عدد عناصرها يساوي n عنصر فإن $|P(A)| = 2^n$

البرهان:

إذا كانت A هي مجموعة عدد عناصرها يساوي n عنصر فإن $P(A)$ تحتوي على:

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ مجموعة جزئية تتكون من 0 عنصر وهي بالفعل المجموعة الخالية φ .
2. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!}$ مجموعة جزئية فردية.
3. $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ مجموعة جزئية ثنائية.
4. $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ مجموعة جزئية ثلاثية.
5. ...
6. $\binom{n}{n} = 1$ مجموعة جزئية تتكون من n عنصر وهي بالفعل المجموعة A .

وبالتالي يكون عدد عناصر العدد الكلي لعناصر المجموعة $P(A)$ هو:

$$|P(A)| = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1 = (1+1)^n = 2^n$$

ملاحظة: لقد إستخدمنا في برهان المبرهنة السابقة مفكوك ذات الحدين:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

مبرهنة (3.2.5): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \subseteq B$ إذا وفقط إذا كان $P(A) \subseteq P(B)$.
2. $A = B$ إذا وفقط إذا كان $P(A) = P(B)$.

البرهان:

:(1)

أولا: نفرض أن $A \subseteq B, x \in P(A)$ فإن $x \in A$

وبما أن $A \subseteq B$ فإن $x \in B$ وبالتالي $x \in P(B)$

إذن:

$$P(A) \subseteq P(B)$$

ثانيا: إذا كان $P(A) \subseteq P(B)$ وبما أن $A \in P(A)$ فإن $A \in P(B)$ إذن:

$A \subseteq B$

:(2)

$$A = B \leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)] \leftrightarrow [(P(A) \subseteq P(B)) \wedge (P(B) \subseteq P(A))] \leftrightarrow P(A) = P(B)$$

ملاحظة: فيما يلي سوف ندرس بالتفصيل العمليات الجبرية على المجموعات:

(3-3) إتحاد المجموعات

> **تعريف (3.3.1):** إذا كانت A و B مجموعتين فإن الإتحاد $A \cup B$ هوالمجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين A أو B أي أن:
>
> $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

ملاحظات:

1. $A \cup B$ هي المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في A أو موجودة في B أو موجودة في كلا من A و B معا.
2. $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
3. $x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
4. من الممكن أن نعمم تعريف الإتحاد على n مجموعة كما يلي:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$

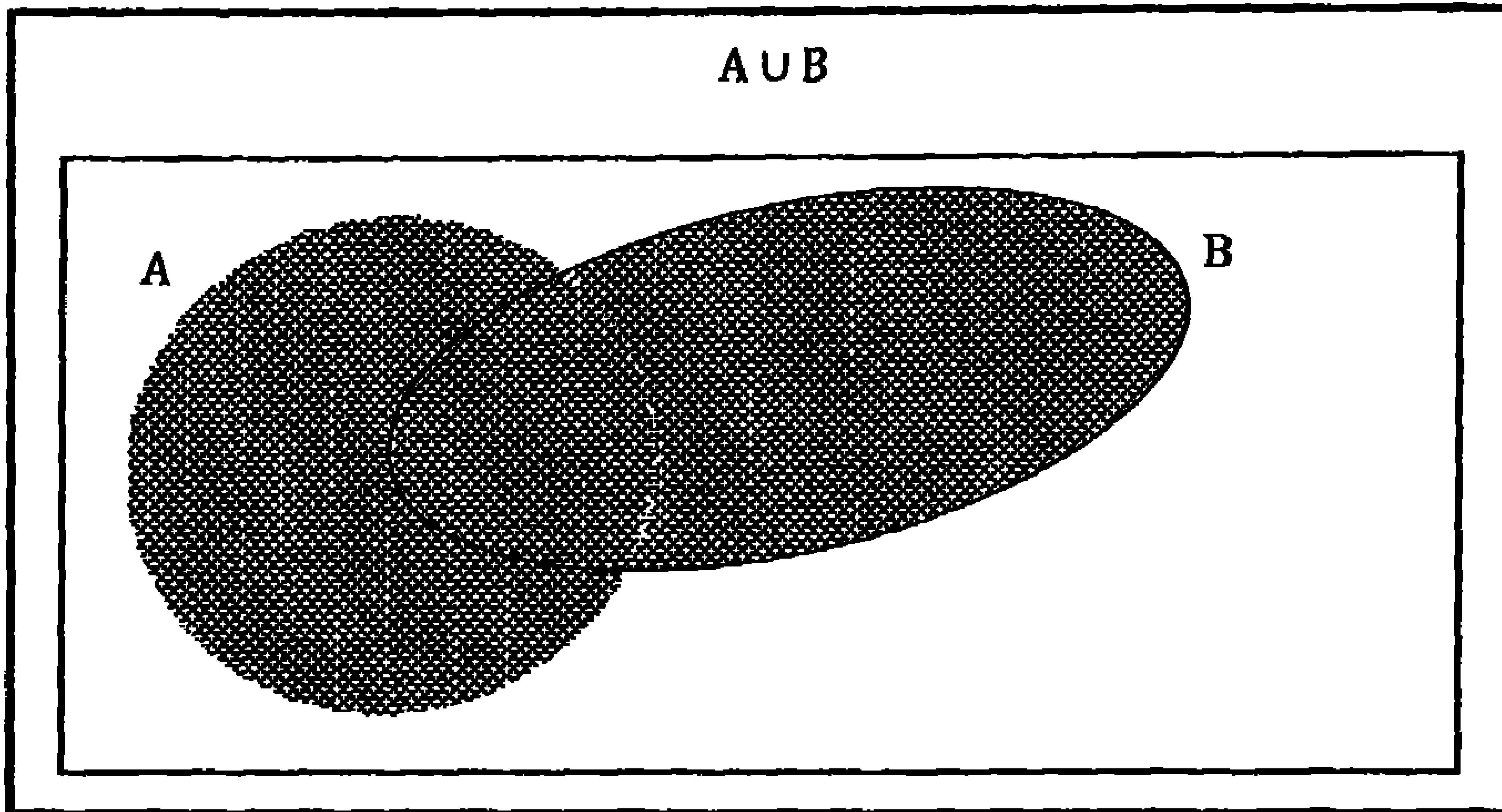
5. من الممكن أن نستخدم جدول الإنتماء لإتحاد A و B وهو يشابه جدول الصواب للتقرير OR فنرمز بالحرف T في الحالة التي يكون فيها $x \in A$ وبالحرف F عندما يكون $x \notin A$ وبالتالي يكون الجدول كما يلي:

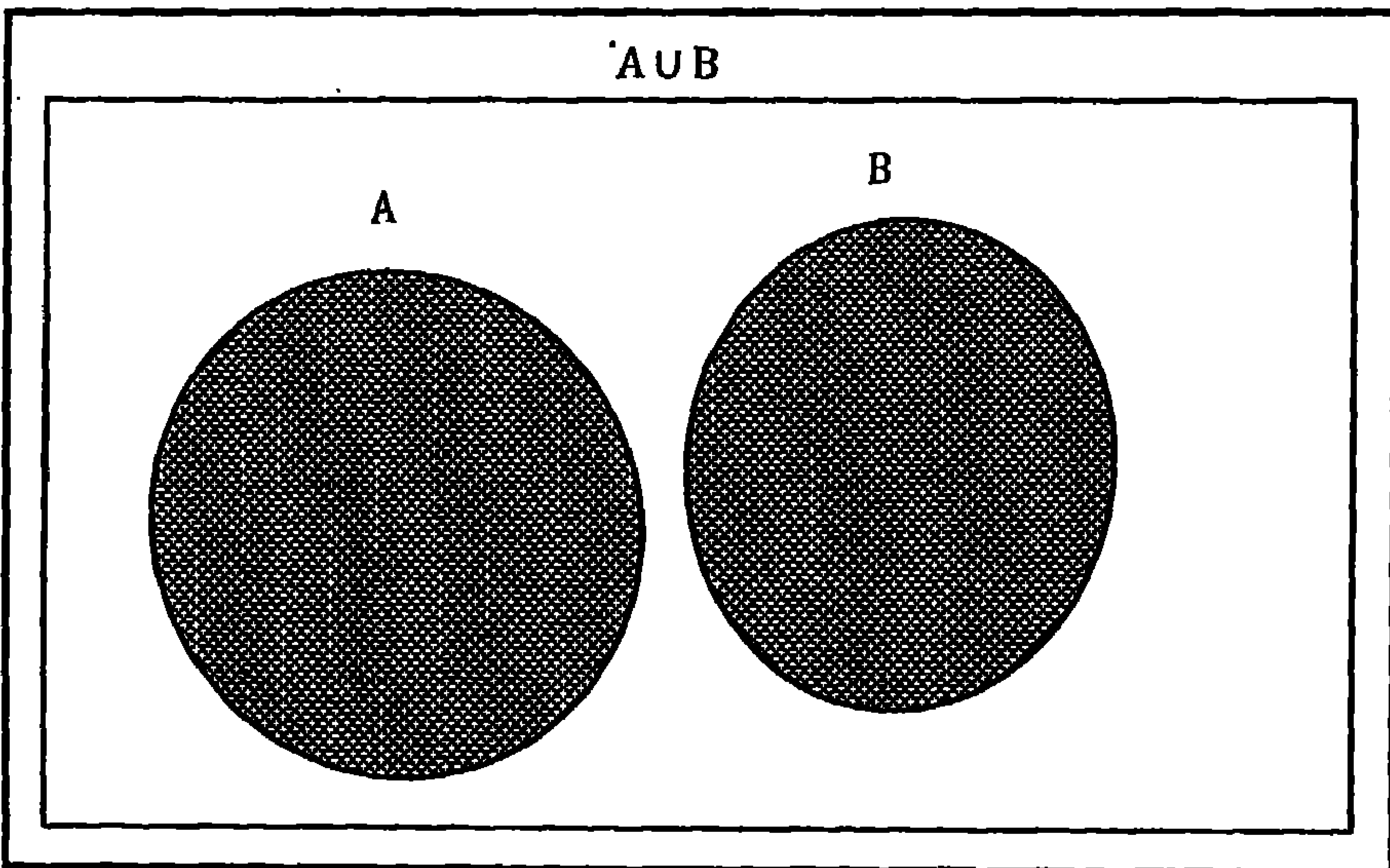
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

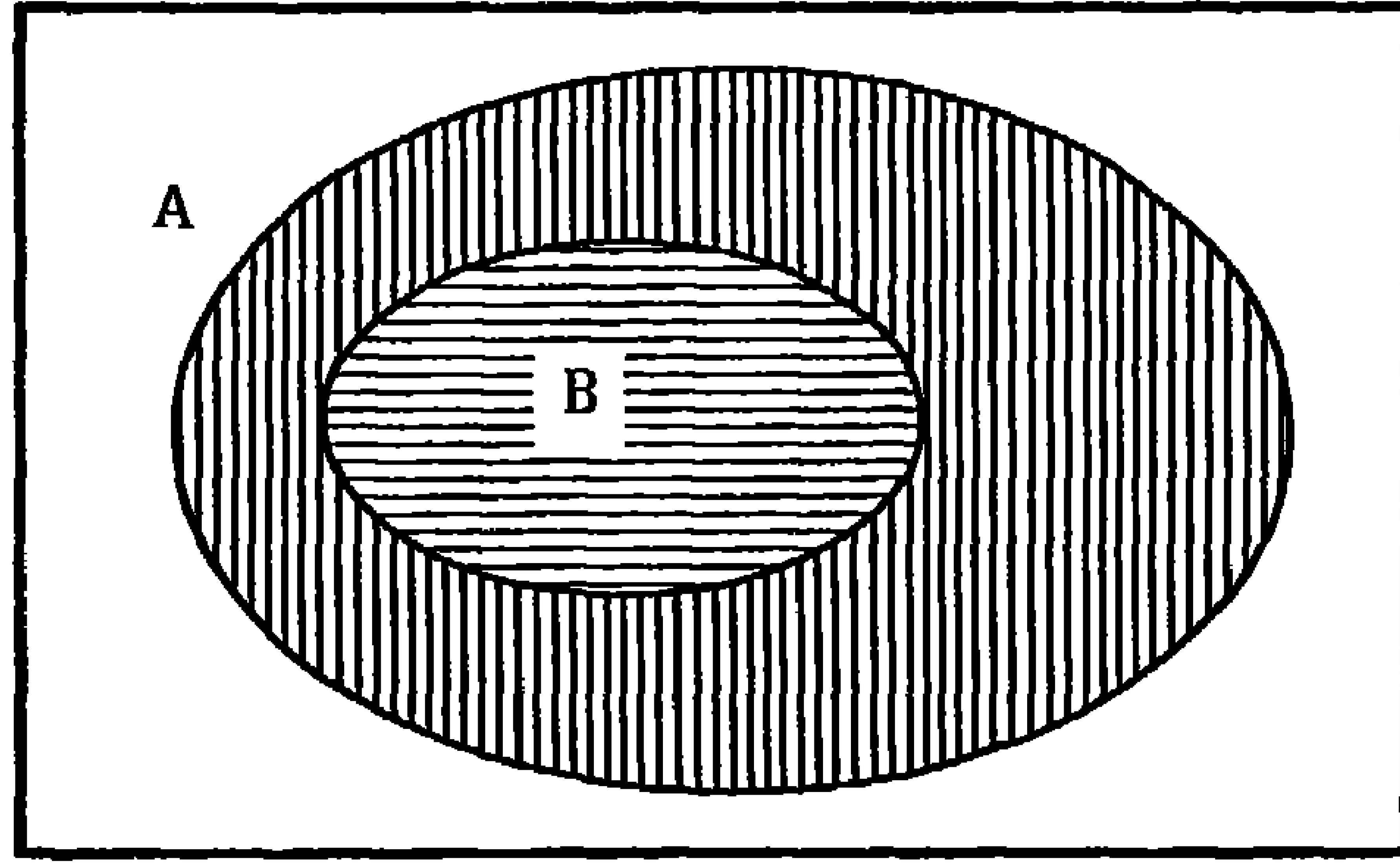
واضح من الجدول أن:

- $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- $x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

6. بإستخدام أشكال فن يمكن وصف إتحاد المجموعتين A و B كما يلي:







مثال: إذا كانت A مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية و B هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية فإن $A \cup B = \mathbb{Z}$.

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ فإن:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

نظرية (3.3.2): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \cup A = A$
2. $A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B$
3. $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$
4. $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2 \rightarrow A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$
5. $A \cup \varphi = A$
6. $A \cup U = U$

البرهان:

أولاً: بما أن:

$$x \in A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A$$

إذن:

$$A \cup A = A$$

ثانياً: بما أن:

$x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$

إذن:

$A \subseteq A \cup B$

بالمثل يمكن إثبات أن $B \subseteq A \cup B$

ثالثاً: نفرض أولاً أن $x \in A,\ A \cup B = B$ وبالتالي نحصل على $x \in B$

إذن $A \subseteq B$

عكسياً: نفرض أن $x \in A \cup B,\ A \subseteq B$ فإن $x \in A \vee x \in B$ ولكن $A \subseteq B$

إذن $x \in B$ وبالتالي نحصل على $A \cup B \subseteq B$ .... (1)

ولكن في الأصل يكون $B \subseteq A \cup B$ .... (2)

إذن من (1) و (2) ينتج $B = A \cup B$

رابعاً: نفرض أن $A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2,\ x \in A_1 \cup A_2$

وبالتالي يكون $x \in A_1 \vee x \in A_2$ وبما أن $A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2$

إذن نحصل على $x \in B_1 \vee x \in B_2$ وبالتالي تكون $x \in B_1 \cup B_2$

إذن $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$

خامساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cup B = A \leftrightarrow B \subseteq A$ وبوضع $B = \varphi$ نحصل مباشرة على $A \cup \varphi = A$

سادساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$ وبوضع $B = U$ نحصل مباشرة على $A \cup U = U$

نظرية (3.3.3): إذا كانت A و B و C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

البرهان:

أولاً:

$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$

إذن: $A \cup B = B \cup A$

ثانياً:

$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C$

$x \in A \vee x \in B \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

إذن: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(3-4) تقاطع المجموعات

تعريف (3.4.1): إذا كانت A و B مجموعتين فإن التقاطع $A \cap B$ هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين A و B معا.

أي أن:

$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

ملاحظات:

1. $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
2. $x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$
3. من الممكن أن نعمم تعريف التقاطع على n مجموعة كما يلي:

$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x: x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$

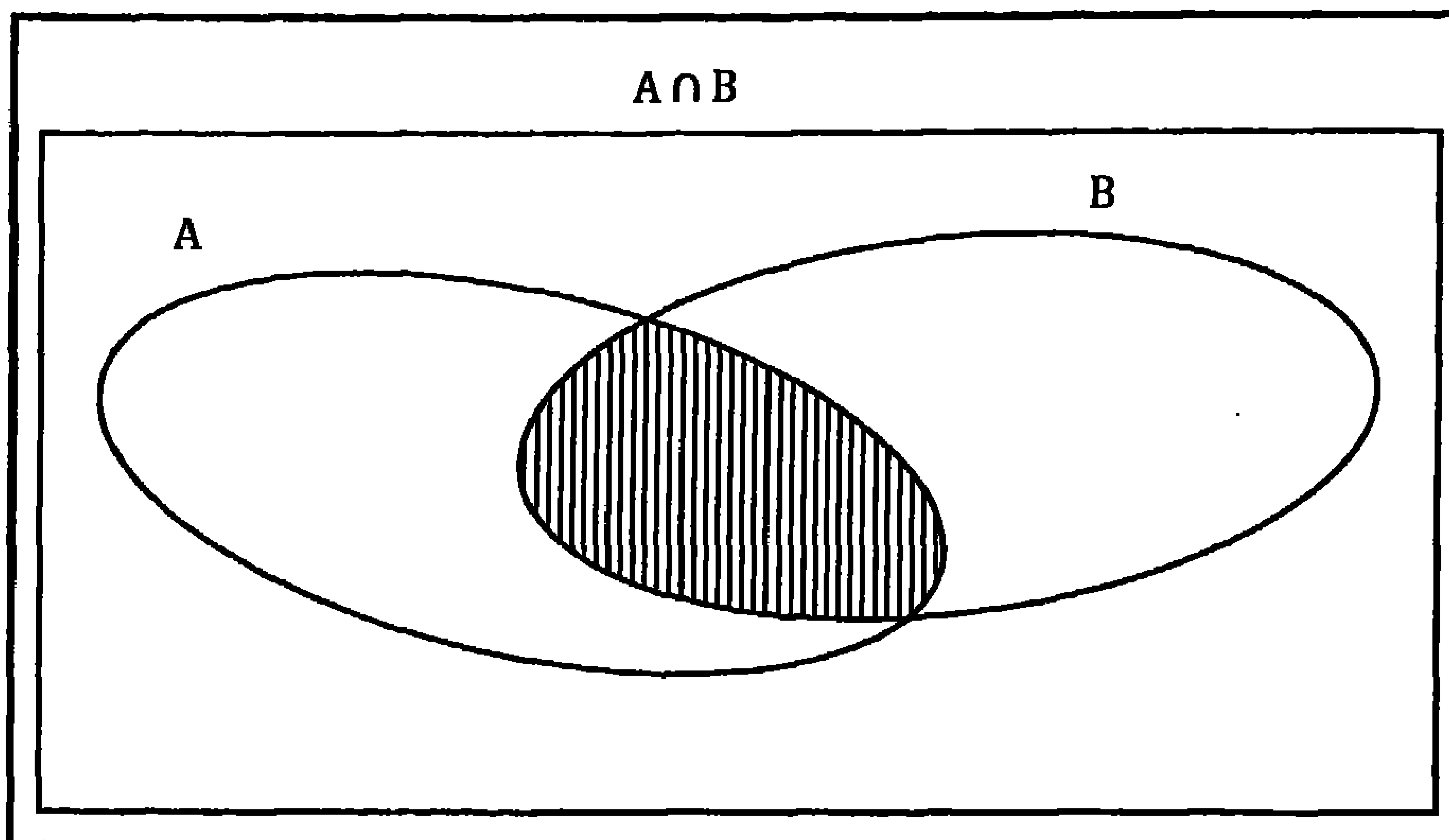
4. من الممكن أن نستخدم جدول الإنتماء لتقاطع A و B وهو يشابه جدول الصواب للتقرير AND فنرمز بالحرف T في الحالة التي يكون فيها $x \in A$ وبالحرف F عندما يكون $x \notin A$ وبالتالي يكون الجدول كما يلي:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

واضح من الجدول أن:

- $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
- $x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

5. بإستخدام أشكال فن يمكن وصف إتحاد المجموعتين A و B كما يلي:



مثال: إذا كانت $A = \mathbb{Z},\ B = \left\{\frac{4}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$ فإن $A \cap B = \{4, 2, 1, -1, -2, -4\}$

مثال: إذا كانت $A = \{x: x = 3n, n \in \mathbb{Z}\},\ B = \{x: x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$ فإن $A \cap B = \{x: x = 6n, n \in \mathbb{Z}\}$

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c\},\ B = \{b, c, d, e\},\ C = \{a, b, d\}$

فإن $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \{b\}$

مثال: لنفرض أن $A = \{x \in \mathbb{Z}: 3 \le x < 9\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z}: -1 < x \le 6\}$ فان

1. إتحاد المجموعتان A و B هو $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 \le x \le 8\}$
2. تقاطع المجموعتان A و B هو $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z}: 3 \le x \le 6\}$

نظرية (3.4.2): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$
3. $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$
4. $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2 \rightarrow A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$
5. $A \cap \varphi = \varphi$
6. $A \cap U = A$

البرهان:

أولاً: بما أن:

$$x \in A \leftrightarrow x \in A \land x \in A$$

إذن:

$$A \cap A = A$$

ثانياً: بما أن

$$x \in A \cap B \rightarrow x \in A \land x \in B$$

إذن:

$$A \cap B \subseteq A, \qquad A \cap B \subseteq B$$

ثالثاً: نفرض أولاً أن $x \in A,\ A \cap B = A$ وبالتالي نحصل على $x \in A \cap B$

فإن $x \in A \land x \in B$ إذن $x \in B$ إذن $A \subseteq B$

عكسياً: نفرض أن $x \in A \subseteq B$ إذن $x \in B$

وبالتالي نحصل على $x \in A \land x \in B$

إذن $x \in A \cap B$ إذن $A \subseteq A \cap B$ ....(1)

ولكن في الأصل يكون $A \cap B \subseteq A$ ....(2)

إذن من (1) و (2) ينتج $A = A \cap B$

رابعاً: نفرض أن $A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2,\ x \in A_1 \cap A_2$

وبالتالي يكون $x \in A_1 \land x \in A_2$ وبما أن $A_1 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2$

إذن نحصل على $x \in B_1 \land x \in B_2$ وبالتالي تكون $x \in B_1 \cap B_2$

إذن $A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$

خامساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cap B = B \leftrightarrow B \subseteq A$ وبوضع $B = \varphi$ نحصل مباشرة على $A \cap \varphi = \varphi$

سادساً: بإستخدام الخاصية الثالثة $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$ وبوضع $B = U$ نحصل مباشرة على $A \cap U = A$

نظرية (3.4.3): إذا كانت A و B و C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \cap B = B \cap A$

2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

البرهان:

أولاً:

$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A$

إذن: $A \cap B = B \cap A$

ثانياً:

$x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$

$x \in A \wedge x \in B \cap C \leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

إذن: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ثالثاً:

$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow [x \in A] \wedge [x \in B \cup C] \leftrightarrow [x \in A] \wedge [x \in B \vee x \in C]$

$\leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B] \vee [x \in A \wedge x \in C] \leftrightarrow [x \in A \cap B] \vee [x \in A \cap C]$

إذن: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

رابعاً:

$x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B \cap C] \leftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B \wedge x \in C]$

$\leftrightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge [x \in A \vee x \in C] \leftrightarrow [x \in A \cup B] \wedge [x \in A \cup C]$

إذن: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مبرهنة (3.4.4): إذا كانت $\{A_{i \in I}\}$ و $\{B_{j \in J}\}$ مجموعتان مفهرستان فإن:

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \left(A_i \cap B_j\right)$

2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} \left(A_i \cup B_j\right)$

البرهان:

سوف نبرهن الفقرة (1) ونترك الفقرة (2) كتمرين .

أولاً:

Let $y \in \left[\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)\right]$

$\Rightarrow \exists k \in I, y \in A_k \wedge \exists m \in J, y \in B_m$

$\Rightarrow \exists (k,m) \in I \times J: y \in (A_k \cap B_m)$

$\Rightarrow y \in \cup_{(i,j)} (A_i \cap B_j)$

$\Rightarrow (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) \subseteq \cup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$ ....(1)

ثانياً:

Let $y \in \cup_{(i,j)} (A_i \cap B_j)$

$\Rightarrow \exists (k,m) \in I \times J: y \in (A_k \cap B_m)$

$\Rightarrow \exists (k \in I \wedge m \in J): (y \in A_k \wedge y \in B_m)$

$\Rightarrow (\exists k \in I: y \in A_k) \wedge (\exists m \in J: y \in B_m)$

$\Rightarrow y \in \cup_{i\in I} A_i \wedge y \in \cup_{j\in J} B_j$

$y \in [(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)]$

$\Rightarrow \cup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \subseteq (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)$ ....(2)

من (1) و (2) ينتج:

$(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$

مبرهنة (3.4.5): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
2. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

البرهان:

أولاً: بما أن $A \cap B \subseteq A$ فإن $P(A \cap B) \subseteq P(A)$ ....(1)

و بما أن $A \cap B \subseteq B$ فإن $P(A \cap B) \subseteq P(B)$ ....(2)

إذن من (1) و (2) ينتج أن $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ ....(3)

عكسياً: إذا كان $x \in P(A) \cap P(B)$ فإن $x \in P(A) \wedge x \in P(B)$

وبالتالي يكون $x \subseteq A \wedge x \subseteq B$ إذن $x \subseteq A \cap B$

وبالتالي $x \in P(A \cap B)$ إذن $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$..........................(4)

إذن من (3) و(4) نحصل على $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

ثانياً: بما أن $B \subseteq A \cup B, A \subseteq A \cup B$

فإن $P(B) \subseteq P(A \cup B),\ P(A) \subseteq P(A \cup B)$

إذن $P(B) \cup P(A) \subseteq P(A \cup B) \cup P(A \cup B) = P(A \cup B)$

ملاحظة: ليس ضروري أن يكون

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

كما سنوضح في المثال التالي:

نفرض أن $A = \{a, b\},\ B = \{a, c\}\ ,\ b \neq c$

إذن $P(A) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},\ P(B) = \{\varphi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$

وبالتالي نحصل على:

$$P(A) \cup P(B) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ولكن $A \cup B = \{a, b, c\}$ إذن:

$$P(A \cup B) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) ينتج لنا أن:

$$P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$$

نظرية (2.4.6): نظرية دي مورجان

إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

البرهان:

أولاً:

$$x \in (A \cap B)' \leftrightarrow x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \leftrightarrow x \in A' \vee x \in B'$$

إذن: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ثانياً:

$$x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$

إذن: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

مبرهنة (3.4.7): إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

$A - B = A - (A \cap B)$

البرهان:

من قانون دي مرجان الأول:

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$\Rightarrow U - (A \cap B) = (U - A) \cup (U - B)$

فلو أخذنا U=A فإننا نحصل على:

$A - (A \cap B) = (A - A) \cup (A - B)$

$\Rightarrow A - (A \cap B) = \varphi \cup (A - B)$

$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$

مبرهنة (3.4.8): إذا كانت U المجموعة الشاملة و A مجموعة جزئية منها فإن:

$A \cup A' = U$

البرهان:

بما أن $A \cap A' = \varphi$

إذن $(A \cap A')' = \varphi'$

إذن $A \cup A' = U$

تعريف (3.4.1): نقول أن المجموعتين A و B مجموعتين منفصلتين إذا كان التقاطع $A \cap B = \varphi$ أي لا يوجد بينهما عنصر مشترك.

مبرهنة (3.4.10): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \cap A' = \varphi$
2. $A \cap B = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A' \wedge A \subseteq B'$

البرهان:

أولاً:

$x \in A \cap A' \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A' \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \leftrightarrow x \in \varphi \leftrightarrow A \cap A' = \varphi$

ثانيا:

$x \in A \cap B = \varphi \leftrightarrow (x \in A \to x \notin B) \wedge (x \in B \to x \notin A)$

$\leftrightarrow (x \in A \to x \in B') \wedge (x \in B \to x \in A')$

$\leftrightarrow A \subseteq B' \wedge A \subseteq B'$

نظرية (3.4.11): ليكن U هي الجموعة الشاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:

1. $A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \varphi$

2. $A \subset B \leftrightarrow A' \cup B = U$

البرهان:

أولا: نفرض جدلا أن $A \subset B,\ A \cap B' \neq \varphi$ معنى ذلك يوجد x بحيث:

$x \in A \cap B' \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B') \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.......................(1)

ولكن $A \subset B$ و $x \in A$ تقتضي أن تكون $x \in B$ وهذا يتعارض بالطبع مع ما حصلنا عليه في (1) وبالتالي لفك هذا التعارض يجب أن يكون $A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \varphi$.

ثانيا: $A \subset B$ إذا وفقط إذا كان $B' \subset A'$ ولكن دائما يكون $B \subseteq B$

إذن $B \cup B' \subseteq A' \cup B$ ولكن $B \cup B' = U$

إذن $U \subseteq A' \cup B$..(1)

ولكن دائما يكون $A' \cup B \subseteq U$...(2)

إذن من (1) و (2) نحصل على $A' \cup B = U$

إذن $A \subset B \leftrightarrow A' \cup B = U$

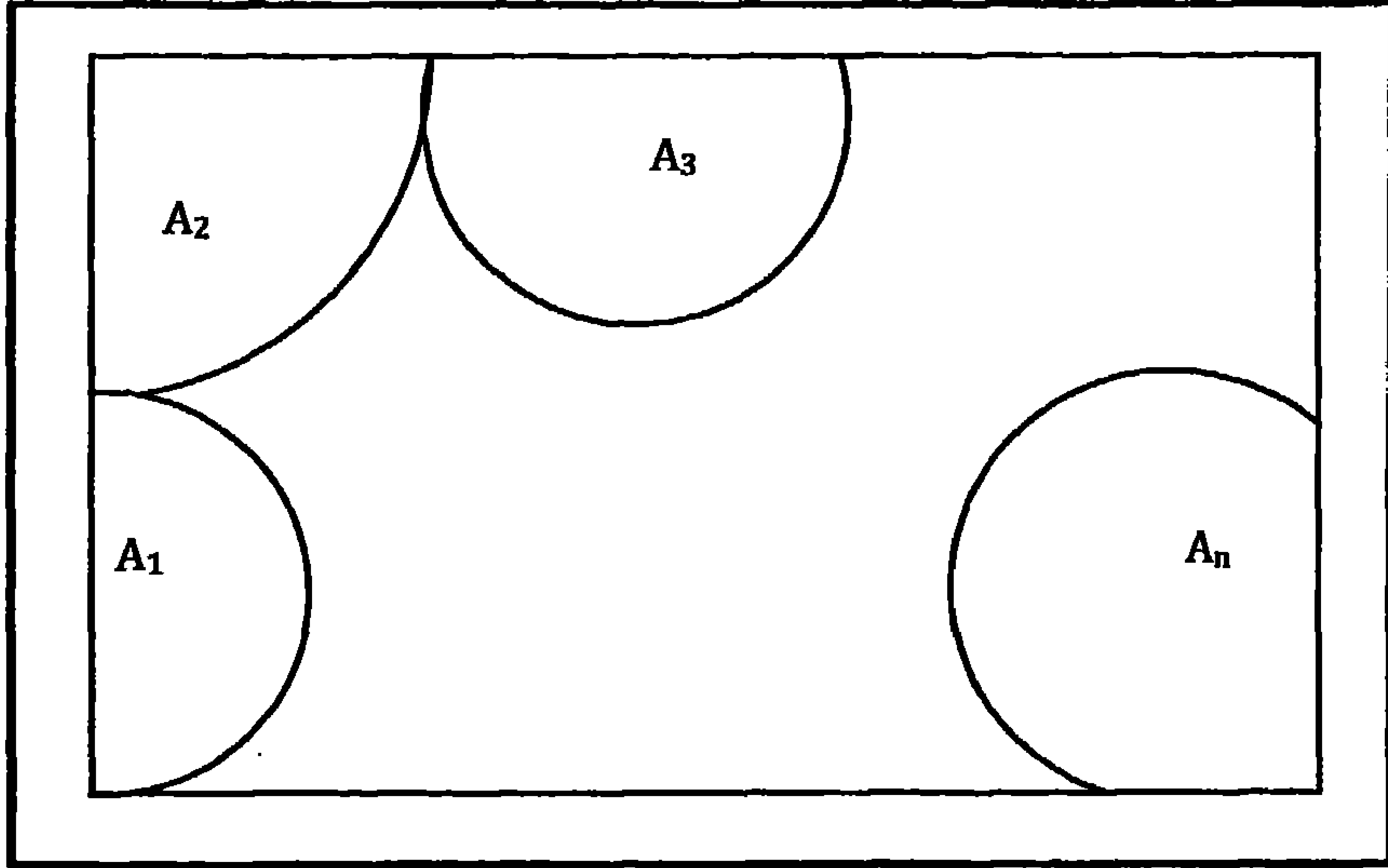
تعريف (3.4.12): ليكن U هي الجموعة الشاملة و $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية منها فإننا نقول أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تشكل تجزئة (Partion) للمجوعة U إذا تحقق:

1. $U \neq \varphi$;

2. $A_i \cap A_j = \varphi\ \forall i \neq j$

3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$

وسوف نرمز للتجزئة $A_1, A_2, ..., A_n$ بالرمز $[A_1, A_2, ..., A_n]$ ويمكن أن نقول أن $[A_1, A_2, ..., A_n]$ إنها تشكل تجزئة للمجموعة الغير خالية U إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة U ينتمي إلى مجموعة وحيدة من بين المجموعات $A_1, A_2, ..., A_n$.



ملاحظة: إذا كانت $A \subset U, A \neq \varphi$

فإن $A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \varphi$

وبالتالي فإن $[A, A']$ تمثل تجزئة للمجموعة U .

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c, d, d\}$

فإن $[\{e\}, \{d\}, \{a, b, c\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

كذلك $[\{e\}, \{c, d\}, \{a, b\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فإن $[\{3, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{5\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

بينما $[\{3, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}]$ لا تشكل تجزئة للمجموعة A لأن:

$\{1, 2, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\} \neq \varphi$

كذلك $[\{3, 6\}, \{1, 2\}, \{5\}]$ لا تشكل تجزئة للمجموعة A لأن:

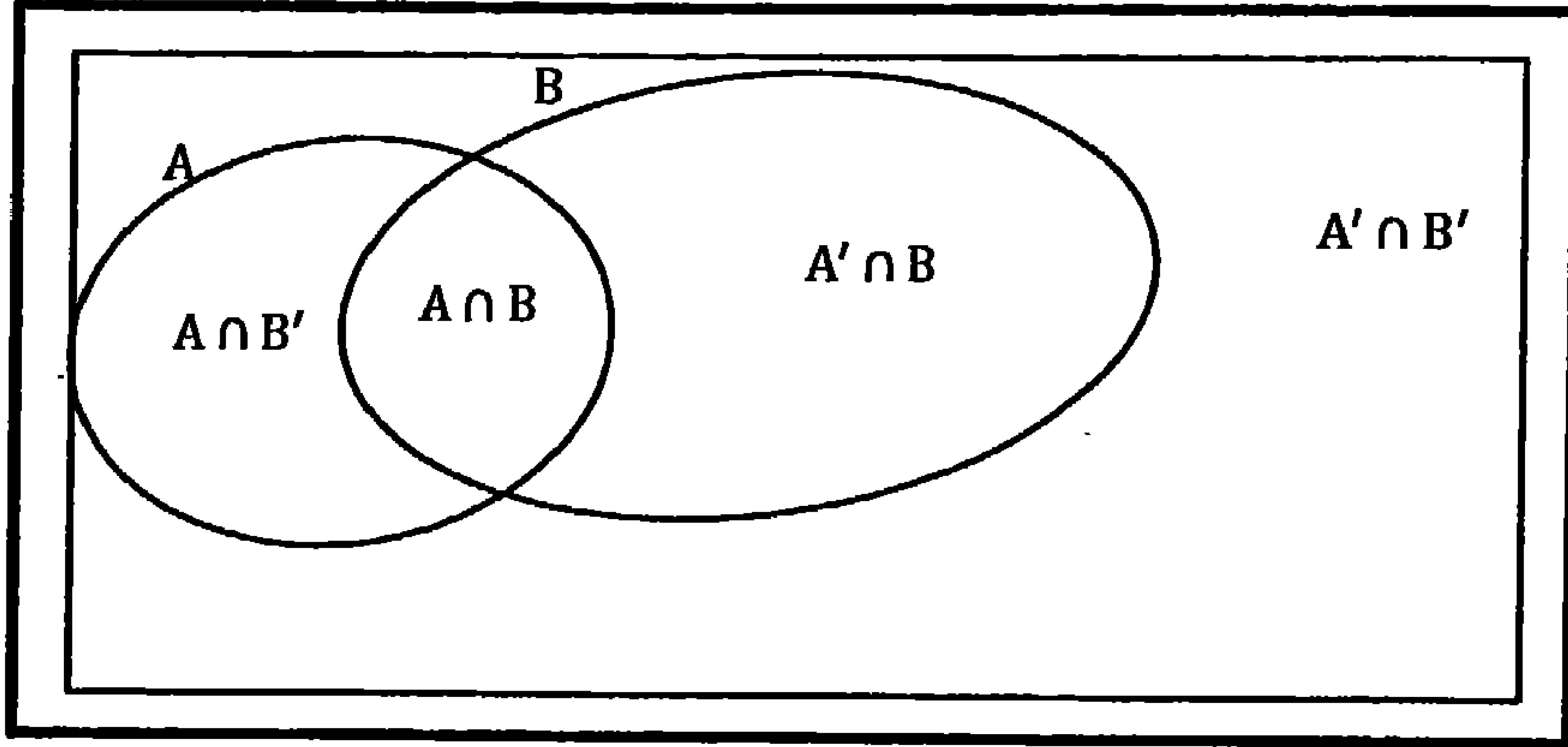
$\{3, 6\} \cup \{1, 2\} \cup \{5\} \neq A$

نظرية (3.4.13): ليكن U هي المجموعة الشاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:

$[A \cap B, A \cap B', A' \cap B, A' \cap B']$

تمثل تجزئية للمجموعة U.

البرهان:



أولاً: يمكن إثبات أن تقاطع أي إثنين يكون φ فمثلا:

$(A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B') = A \cap \varphi = \varphi$

ثانياً:

$(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$

$= [A \cap (B \cup B')] \cup [A' \cap (B \cup B')] = [A \cap U] \cup [A' \cap U] = A \cup A' = U$

ملاحظة: بصورة عامة إذا كان $P_1 = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$ وكان $P_2 = [B_1, B_2, \ldots, B_n]$

فإن الضرب المباشر:

$P_1 \otimes P_2 = [A_1 \cap B_1, A_1 \cap B_2, \ldots, A_1 \cap B_n, A_2 \cap B_1, \ldots, A_n \cap B_n]$

يمثل تجزئة أيضاً للمجموعة U .

مثال: ليكن:

$[a] = \{x \in \mathbb{Z} : x = a + kn, k \in \mathbb{Z}\}$

فإذا كانت n=3 فإننا نحصل على:

$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

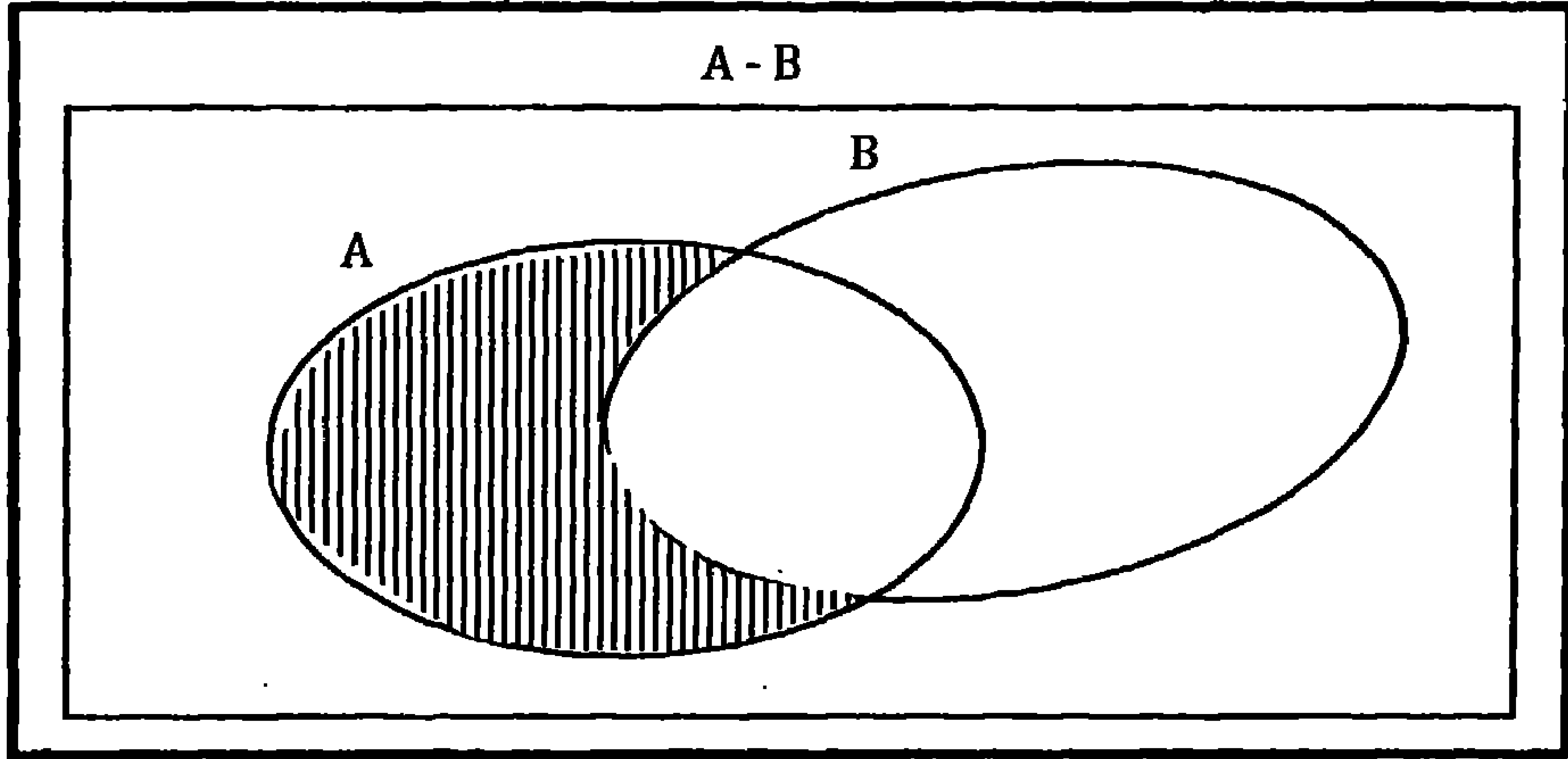
وبالتالي فإن $[[0],[1],[2]]$ تعتبر تجزئة لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

(3-5) الفرق بين مجموعتين The Difference

تعريف (3.5.1): لتكن A و B مجموعتين فإن المجموعة التي تحتوي على العناصر التي تنتمي إلى A وغير منتمية إلى B تسمى فرق A عن B ويرمز لها بالرمز A-B أو A\B ويمكن وصفها ب:

$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$

بإستخدام أشكال فن يمكن وصف الفرق A-B كما يلي:



أمثلة:

1. إذا كانت $A=\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و $B=\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الكسرية فإن A-B هي مجموعة الأعداد الغير كسرية.
2. إذا كانت المجموعات A={a, b, c, d}, B={a, c, e, f}, C={b, e}

فإن A-B={b, d}, B-A={e, f},

B-C={a, c, f}, (A-B)-C={d}, A-(B-C)={b, d}

وبالتالي يجب أن نلاحظ أن:

أ. عملية الفرق غير إبدالية وذلك لأن $A-B \neq B-A$

ب. عملية الفرق غير تجميعية وذلك لأن $(A-B)-C \neq A-(B-C)$

3. إذا كان $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B=\{2, 3, 6\}$

فإن $A-B=\{1, 4, 5\}$ و $B-A=\varphi$

نظرية (3.5.2): ليكن A, B مجموعتين فإن:

1. $A - B = A \cap B'$
2. $A - B \subseteq A$
3. $A - A = \varphi$
4. $A - \varphi = A$
5. $\varphi - A = \varphi$
6. $U - A = A'$
7. $A' - B' = B - A$
8. $B - A = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A$
9. If $A \cap B = \varphi$ then $B - A = B,\ A - B = A$

البرهان:

أولاً:

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \leftrightarrow x \in A \cap B'$$

ثانياً:

$$A - B = A \cap B' \subseteq A$$

ثالثاً:

$$A - A = A \cap A' = \varphi$$

رابعاً:

$$A - \varphi = A \cap \varphi' = A \cap U = A$$

خامساً:

$$\varphi - A = \varphi \cap A' = \varphi$$

سادساً:

$U - A = U \cap A' = A'$

سابعاً:

$A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

ثامناً:

$B - A = \varphi \leftrightarrow B \cap A' = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A$

حيث من نظرية (2.4.9) يكون دائماً $B \cap A' = \varphi \leftrightarrow B \subseteq A$

تاسعاً:

دائماً:

$A - B = A \cap B' \subseteq A$ .... (1)

إذا كان $A \cap B = \varphi$ وكان $a \in A$ فإن $a \notin B$

إذن $a \in B'$

إذن $a \in A \cap B'$

إذن $a \in A - B$

إذن $A \subseteq A - B$ .... (2)

من (1) و (2) نحصل على $A - B = A$

بالمثل يمكن إثبات أنه إذا كان $A \cap B = \varphi$ فإن $B - A = B$

نظرية (3.5.3): ليكن A, B, C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

3. $A \cup (B - C) = A \cup B - A' \cap C$

4. $A \cap (B - C) = A \cap B - C$

5. $(A \cap B) - C = (A \cap B) - (A \cap C)$

6. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

البرهان:

1. $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'=A\cap(B'\cap C')$
$=(A\cap B')\cap(A\cap C')=(A-B)\cap(A-C)$

2. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')$
$=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C)$

3. $A\cup(B-C)=A\cup(B\cap C')=(A\cup B)\cap(A\cup C')$
$=(A\cup B)\cap(A'\cap C)'=A\cup B-A'\cap C$

حيث

$(A'\cap C)'=(A')'\cup C'=A\cup C'$

4. $A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap C'=A\cap B-C$

5. $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$
$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$
$=\varphi\cup[(A\cap B)\cap C']=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

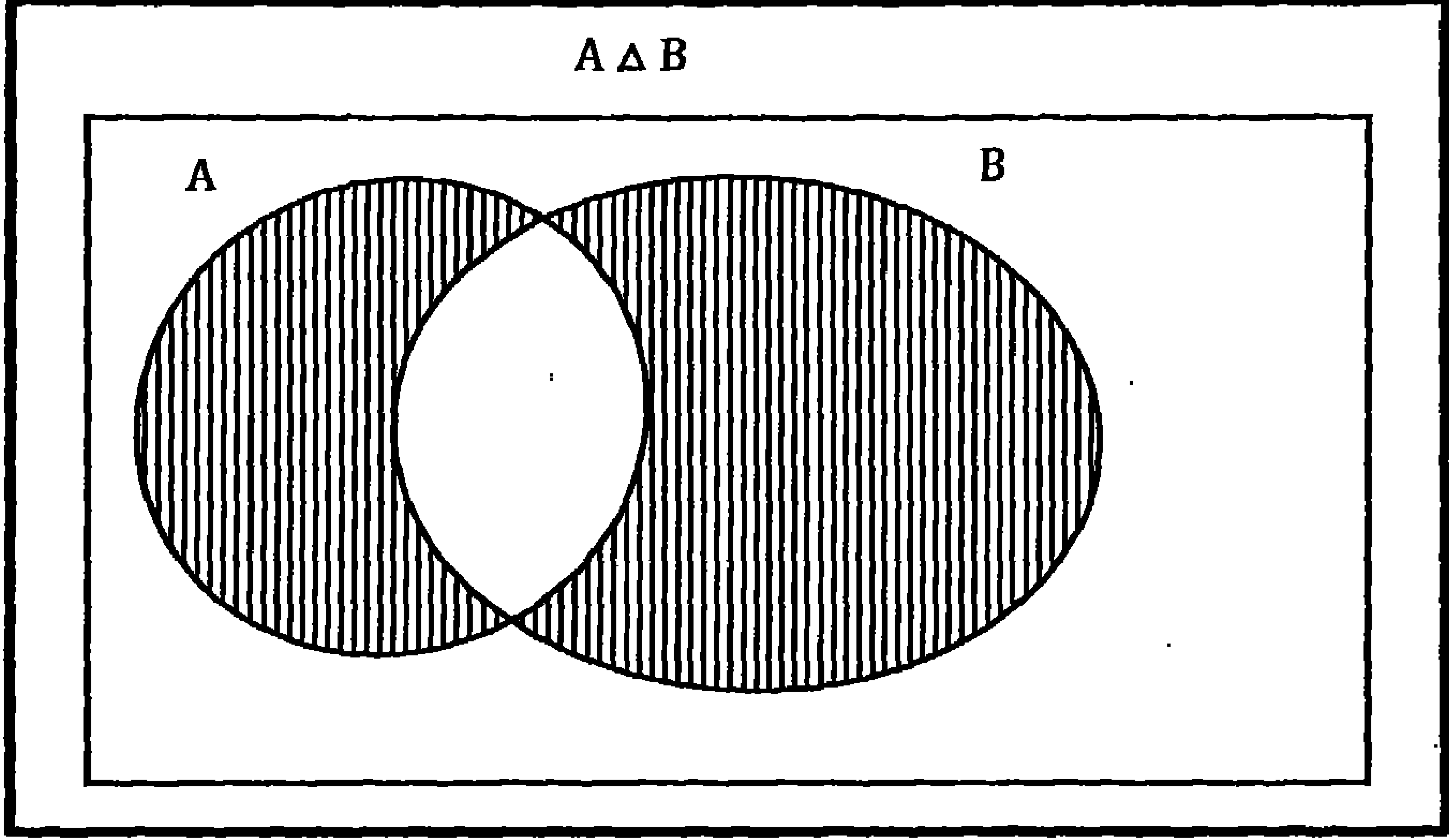
6. $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'=(A\cap C')\cup(B\cap C')$
$=(A-C)\cup(B-C)$

(3-6) الفرق التناظري بين مجموعتين The Symmetric Difference

تعريف (3.6.1): إذا كانت A و B مجموعتين فإن مجموعة الفرق التناظري للمجموعتين A و B هي مجموعة إتحاد المجموعتين A-B و B-A ويرمز لها بالرمز $A\Delta B$ ويمكن وصفها ب:

$$A\,\Delta\,B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$

بإستخدام أشكال فن يمكن وصف الفرق A-B كما يلي:



ملاحظة: جدول الإنتماء لعملية الفرق التناظري كما يلي:

x∈A	x∈B	x∈AΔB
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

وهذا الجدول يشابه جدول XOR

مثال: إذا كانت المجموعتين A={a, b, c, d}, B={a, c, e, f}

فإن A-B={b, d}, B-A={e, f} وبالتالي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{b, d\} \cup \{e, f\} = \{b, d, e, f\}$$

مثال: إذا كانت A={1, 2, 4, 6, 7, 8}, B={3, 4, 5, 7}

فإن A-B={1, 2, 6, 8}, B-A={3, 5} وبالتالي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6, 8\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$$

مثال: إذا كانت $A=\{1, 2, 3\}, B=\{1, 4, 5\}, U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فإن $A \cap B = \{1\}$

و $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

و $A - B = \{2,3\}$

و $B - A = \{4,5\}$

و $A \triangle B = \{2,3,4,5\}$

و $A' = \{4,5,6\}$

و $B' = \{2,3,6\}$

نظرية (3.6.2): ليكن A, B مجموعتين فإن:

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

البرهان:

$$\begin{aligned}(A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cup B') \\ &= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] \\ &= [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \\ &= [\varphi \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \varphi] = (B \cap A') \cup (A \cap B') \\ &= (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B\end{aligned}$$

ملاحظة: بخلاف عملية الفرق فإن عملية الفرق التناظري تكون تبديلية وتجميعية كما تشير النظرية التالية:

نظرية (3.6.3): ليكن A, B, C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \Delta B = B \Delta A$

2. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

البرهان:

1. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$

2. لإثبات الفقرة الثانية سوف نستخدم جدول الإنتماء كما يلي:

A	B	C	A△B	(A△B)△C	B△C	A△(B△C)
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

نظرية (3.6.4): ليكن A, B مجموعتين فإن:

1. $A \bigtriangleup \varphi = A$
2. $A \bigtriangleup A = \varphi$
3. $A \bigtriangleup A' = U$
4. $A \bigtriangleup U = A'$
5. $A \bigtriangleup B = \varphi \leftrightarrow A = B$

البرهان:

1. $A \bigtriangleup \varphi = (A - \varphi) \cup (\varphi - A) = A \cup \varphi = A$
2. $A \bigtriangleup A = (A - A) \cup (A - A) = \varphi \cup \varphi = \varphi$
3. $A \bigtriangleup A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = U$
4. $A \bigtriangleup U = (A - U) \cup (U - A) = \varphi \cup A' = A'$
5. $A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A) = \varphi \leftrightarrow [A - B = \varphi] \wedge [B - A = \varphi] \leftrightarrow$

   $[A \subseteq B] \wedge [B \subseteq A] \leftrightarrow A = B$

نظرية (3.6.5): ليكن A, B, C ثلاث مجموعات فإن:

1. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
2. $(B \Delta C) - A = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$

البرهان:

1. $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[(A\cap B)\cap(A\cap C)']\cup$

$[(A\cap C)\cap(A\cap B)']=[(A\cap B)\cap(A'\cup C')]\cup[(A\cap C)\cap(A'\cup B')]$

$=[(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C')]\cup[(A\cap C\cap A')\cup(A\cap C\cap B')]$

$=[\varphi\cup(A\cap B\cap C')]\cup[\varphi\cup(A\cap C\cap B')]$

$=(A\cap B\cap C')\cup(A\cap C\cap B')=A\cap[(B\cap C')\cup(C\cap B')]$

$=A\cap[B\,\Delta\,C]$

2. $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=[(A\cup B)\cap(A\cup C)']\cup[(A\cup C)\cap(A\cup B)']$

$=[(A\cup B)\cap(A'\cap C')]\cup[(A\cup C)\cap(A'\cap B')]$

$=[(A\cap A'\cap C)\cup(B\cap A'\cap C')]\cup[(A\cap A'\cap B')\cup(C\cap A'\cap B')]$

$=[\varphi\cup(B\cap A'\cap C')]\cup[\varphi\cup(C\cap A'\cap B')]$

$=(B\cap A'\cap C')\cup(C\cap A'\cap B')=[(B\cap C')\cup(C\cap B')]\cap A'$

$=(B\,\Delta\,C)\cap A'=(B\,\Delta\,C)-A$

(3-7) حاصل الضرب الكارتيزي The Cartesian product

تعريف (3.7.1): إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين فإننا نعرف الزوج المرتب (a, b) حيث $a\in A$ و $b\in B$ والعنصر الأول a يسمى المركبة الأولى (المسقط الأول) والعنصر الثاني b يسمى المركبة الثانية (المسقط الثاني).

ملاحظات:

1. يتساوى زوجان مرتبان إذا تساوي عناصر الزوج الأول على الترتيب مع عناصر الزوج الثاني بمعنى:

$(a,b)=(c,d)\leftrightarrow a=c\ \wedge b=d,$

$(a,b)\neq(c,d)\leftrightarrow a\neq c\ \vee b\neq d$

2. الرمز (a, b) يعني زوج مرتب وعلى وجهه العموم يكون $(a,b) \neq (b,a)$ بينما الرمز $\{a, b\}$ يرمز إلى المجموعة (الفئة) التي تحتوي على العنصرين a, b ولا يهم الترتيب بمعنى $\{a,b\} = \{b,a\}$.

تعريف (3.7.2): إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين فإن حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعة A في المجموعة B هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من المجموعة A ومسقطها الثاني من المجموعة B وتكتب $A \times B$ وتقرأ A في B وهي عبارة عن: $A \times B = \{(a,b): a \in A \land b \in B\}$

ملحوظة: يرمز أحيانا للمجموعة $A \times A$ بالرمز A^2 وبصورة عامة إذا كان لدينا عدد n من المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ فإن:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_i \in A_i\}$$

وبالتالي إذا كانت المجموعات $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ فإن:

$$A \times A \times \dots \times A = A^n$$

مثال:– لنفرض أن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{x, y\}$ فإحسب $A \times B, B \times A$

الحل:

$$A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)\}$$

$$B \times A = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\}$$

مثال: إذا كانت $A=\{a, b, c\}$ و$B=\{1, 2\}$ مجموعتين فإكتب $A \times B, B \times A, A \times A, B \times B$

الحل:

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$

$$A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$$

$$B \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

مثال: إذا كانت $A=\{a, b\}$ فإكتب $A\times P(A)$

الحل:

$$P(A) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, A\}$$

$$A \times P(A) = \{(a, \varphi), (a, \{a\}), (a, \{b\}), (a, A), (b, \varphi), (b, \{a\}), (b, \{b\}), (b, A)\}$$

مبرهنة (3.7.2): ليكن A, B مجموعتين فإن:

1. $A \times \varphi = \varphi \times A = \varphi$
2. If $A \neq B$, then $A \times B \neq B \times A$
3. $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$
4. If $A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2$, then $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$

البرهان:

أولا: إذا كـان $A \times \varphi \neq \varphi$ فإنـه يوجـد $(a, b) \in A \times \varphi$ حيـث $a \in A, b \in \varphi$ وهـذا يناقض كون φ هي الفئة الخالية والتي لا تحتوي أي عنصر.

ثانيا: إذا كانت $A \neq B$ فإنه يوجد $a \in A$ ولكن $a \notin B$ وبالتالي $(a, b) \in A \times B$ ولكـن $(a, b) \notin B \times A$ إذن $A \times B \neq B \times A$.

ثالثا:

$$A = B \leftrightarrow \forall a \in A, b \in B \leftrightarrow a \in B, b \in A \leftrightarrow (a, b) \in A \times B \leftrightarrow (a, b) \in B \times A \leftrightarrow A \times B = B \times A$$

رابعا: إذا كان $(a, b) \in A_1 \times B_1$ فـإن $a \in A_1 \wedge b \in B_1$ ولكـن $A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2$ إذن $a \in A_2 \wedge b \in B_2$ وبالتالي $(a, b) \in A_2 \times B_2$

ملحوظة: يمكن إثبات الفقرة الثالثة من المبرهنة السابقة كما يلي:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \leftrightarrow [A \times B \subseteq B \times A] \wedge [B \times A \subseteq A \times B] \leftrightarrow A \times B = B \times A$$

مبرهنة (3.7.3): إذا كان $|A| = n, |B| = m$ فإن $|A \times B| = |B \times A| = nm$

البرهان:

نفرض أن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ وبالتالي:

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m), (a_2, b_1),$$

$(a_2,b_2),\dots,(a_2,b_m),\dots,(a_n,b_1),(a_n,b_2),\dots,(a_n,b_m)\}$

إذن:

$$|A\times B|=\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n-\text{times}}=nm$$

مبرهنة (3.7.4): ليكن A,B,C,D أربع مجموعات فإن:

1. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
2. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
3. $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$
4. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

البرهان:

أولاً:

$(x,y)\in A\times(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cap C)$

$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\in C\leftrightarrow[(x,y)\in A\times B]\wedge[(x,y)\in A\times C]$

$\leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

ثانياً:

$(x,y)\in A\times(B\cup C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C)$

$\leftrightarrow x\in A\wedge[y\in B\vee y\in C]\leftrightarrow[(x,y)\in A\times B]\vee[(x,y)\in A\times C]$

$\leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

ثالثاً:

$(x,y)\in A\times(B-C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B-C)$

$\leftrightarrow x\in A\wedge[y\in B\wedge y\notin C]\leftrightarrow[(x,y)\in A\times B]\wedge[(x,y)\notin A\times C]$

$\leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)$

رابعاً:

$(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)\leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(C\cap D)$

$\leftrightarrow[x\in A\wedge y\in B]\wedge[x\in C\wedge y\in D]\leftrightarrow[x\in A\cap C]\wedge[y\in B\cap D]$

$\leftrightarrow(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$

تمارين

1. إكتب ما يلي على شكل مجموعة داخل قوسين:
   - مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين 2- و 5 .
   - مجموعة الأعداد الكسرية السالبة.
   - مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة $x^2+2x-3=0$.
   - مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.
   - مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة الفردية.
   - مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أقل من 2.
   - مجموعة كل الأعداد التي جذورها تساوي 2.
   - مجموعة كل الأعداد الصحيحة بين 2 و 20.
   - مجموعة كل المستطيلات التي لها الطول أقل من 12 و العرض أكبر من 2.
   - مجموعة كل المربعات والتي لها القطر يساوي 5 .
   - مجموعة كل المستطيلات والتي لها القطر يساوي 5 .
   - مجموعة كل الدوائر والتي لها نصف القطر يساوي 5 .
2. أوصف المجموعات الأتية بالكلمات وأعطي مثال لعنصر ينتمي للمجموعة ومثال أخر لعنصر لا ينتمي إلى المجموعة لكل مما يأتي:

- $\{x\in\mathbb{Z}: x<2\}$
- $\{2^n: n\in\mathbb{Z}, n\geq 2\}$
- $\{(x,y): x,y\in\mathbb{Z}, x\geq 2\}$
- $\{(x,y): x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z},\ x+2y=11\}$
- $\{x\in\mathbb{Z}: 201+x=467\}$
- $\{x\in\mathbb{Z}: x^2+2x-3=0\}$
- $\{x\in\mathbb{R}: x-6=0\}$
- $\{x\in\mathbb{R}x^2-x-6=0\}$

- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + 8 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4x + 5 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 3x - 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + x - 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: 4x^2 + 28x + 49 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + x - 2 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 - 27 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 - 3x^2 + 4 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 + x^2 + x + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^3 - 3x^2 + 4 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^4 - 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}: x^4 + 3x^2 - 4 = 0\}$

3. حدد ما إذا كانت العبارات الأتية تمثل مجموعة حسنة التعريف أم لا:

- مجموعة مضاعفات العدد 5.
- { x عدد صحيح زوجي }
- { x عدد صحيح زوجي و x عدد صحيح فردي }
- { x قطر عربي جميل }
- مجموعة الطلاب الأذكياء.
- مجموعة الحيوانات الجميلة.

- مجموعة الأدوات المفضلة.
- مجموعة الألوان الحسنه.
- مجموعة الشباب الناجح.
- مجموعة الأكلات الشهية.
- مجموعة الرجال الأوفياء.
- مجموعة الأيام المباركة.
- مجموعة الأسلحة .
- مجموعة الأسلحة النارية.

4. السؤال الرابع:

- إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات وكانت $A \subseteq B, B \subseteq C$ فإثبت أن $A \subseteq C$.
- إذا كانت $A = \{1, 3, -4, 7, 8\}$ و $B = \{-5, 2, 1, 0, 7\}$ فإحسب $A \cup B, A \cap B$.
- إذا كانـــــت $A = \{x \in \mathbb{Z}:\ -5 < x < 5\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 \leq x \leq 11\}$ فإحســـب $A \cup B, A \cap B$.
- إذا كانـــــت $A = \{0, 6, -3, 1, 2, 5\}$ و $B = \{0, 1, -3, 2\}$ و $C = \{0,1\,5, 3, -3\}$ فإحسب $A \cup B, A \cup C, A \cap B \cap C, A \cap B \cup C, A \cup B \cup C, A \cup B \cap C$.
- إذا كانت $A \subseteq B$ فاثبت أن $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$.
- إثبت أن لأي مجموعتين A, B فإن $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$.
- إعطي مثال لمجموعة خاليه.
- إعطي مثال لمجموعة لا نهائية.
- إذا كانت $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ فأوجد $A \times A$.

5. أكمل الجدول التالي إذا كانت $*$ تعني العمليات : $\cap, \cup, -, \Delta$ حيث:

*	Φ	{1}	{1, 2}	{1, 2, 3}
φ				
{1,2}				
{2, 3}				
{1, 2, 3}				

6. إعتبر المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ والمجموعات الجزئية منها هي:

$A = \{1,3,5,7\}, B = \{2,4,5,6,9\}, C = \{1,2,4,5\}, D = \{1,3,5,10]$

فإحسب كلا من:

$A \cup B, \quad A - D, \quad B \cap D, \quad A', (C \cap D) - A, A \cap (B \cup C),$

$[A \cap B']', [(A - C) - D]' - B, \quad [(A \cup D) \cap (B \cap C)]'$

7. إعتبر المجموعة الشاملة $U = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ والمجموعات الجزئية منها هي:

$A = \{a,c,d\}, B = \{e,g\}, C = \{b,f\}, D = \{a], F = \{f,g\}$

- هل [A, B, C] تشكل تجزئة للمجموعة U .
- هل [D, E, F] تشكل تجزئة للمجموعة U .
- هل [A∩D, B∩E, C∩F] تشكل تجزئة للمجموعة U .

8. إعتبر المجموعتين A={1, 2, 3, 4} و B={2, 5, 6, 9, 16}

- إحسب A×B .
- إحسب H={(a, b)∈A×B: b=a2}
- إحسب K={(a, b)∈A×B: ab=6}

9. برهن أن

- A-(B-C)=(A-B)∪(A∩C)
- (A-B)-C=A-(B∪C)

10. برهن أن المجموعتين A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كان المجموعتين A×C, B×C منفصلتين لأجل كل مجموعة غير خالية C

11. ليكن A, B, C, D أربع مجموعات غير خالية فبرهن أن:

- $A \times B \subseteq C \times D$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq C, B \subseteq D$
- $A \times B = C \times D$ إذا وفقط إذا كان $A = C, B = D$

12. إثبت أن $A \cap B = A \cup B$ إذا وفقط إذا كان A=B

13. بسط ما يلي

- $A \cap (B \cup B)$
- $A \cup (A \cap B)$

- $A \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B' \cup C)$
- $A \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B' \cap C)$
- $A \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B' \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C' \cup D)$
- $(A \cap B) \cup (A \cap B')$
- $[A' \cap (A \cup B)]'$
- $[A' \cap (B \cup C')]'$
- $(A \cap B) \cap (A' \cap B')$

14. إثبت ما يلي:

- $(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$
- $X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$
- $(X - Y) \cap (Z - T) = (X \cap Z) - (Y \cup T)$
- $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$
- $A - B = A \triangle (A \cap B)$
- $A \cup B = (A' \cap B')'$
- $A \cap B = (A' \cup B')'$
- $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

15. إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات و$P_1 = [A, A']$ و $P_2 = [B, B']$ و $P_3 = [C, C']$ فإحسب $P_1 \times P_2 \times P_3$

16. إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{-2,-1,1,2\}$ و $C = \{-3,-1,4\}$ و $U = A \cup B \cup C$ فإحسب كلا مما يأتي:

- $A \cup B$

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap C$
- $A \cap B \cap C$
- $A \cap B \cup C$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup A'$
- $B \cap U$
- A'
- $B - C$
- $A \triangle B$

17. إذا كانت U مجموعة كل الناس وكانت

A={x: شخص عربي x} ,

B={x: شخص يجيد الإنجليزية x},

C={x: شخص يجيد الفرنسية x}

فعبر عن المجموعات الأتية:

- A'
- $A \cap B$
- $B' \cap C'$
- $B \cup C$
- $A \cap (B \cap C)$
- $A' \cup (B \cap C)$
- $C \cup C'$
- U'

- $B \cap C'$
- $(B \cap C)'$

18. إذا كانت $U=\{1,2,3\}, A=\{1,2\}, B=\{1,3\}, C=\{3\}$ فإحسب:

- $(A \times B) \cap (B \times C)$
- $(A \times B) \cup (B \times C)$
- $A \times B \times C$
- $(A \times U) \cap (U \times C)$

19. إذا كانت $A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,4\}, C=\{4,5,6\}$ فإحسب:

- $A \times B$
- $B \times A$
- $A \times C$
- $C \times A$
- $B \times C$
- $C \times B$
- $(A \times B) \cap (B \times A)$
- $(A \times B) \cap (B \times C)$
- $A \times (B \cup C)$
- $(A \cup B) \times (A \cap C)$
- $A \times B \times C$
- $|A \times B \times C|$
- $|(C \times B) \cap (C \times A)|$
- $|(A \times B) \cup (A \times C)|$

20. إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{-2,3\}$ و $C = \{-1,-2,4\}$ و $U = A \cup B \cup C$ فإحسب كلا مما يأتي :

- $A \cap B \cap C$
- $A \cap B \cup C$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup A'$
- $B \times A$
- B'
- $A - C$
- $A \triangle B$
- $(A \triangle B) \triangle C$
- $A \triangle (B \triangle C)$

الفصل الرابع

العلاقات

Relations

(4-1) العلاقة الثنائية

(4-2) تمثيل العلاقات

(4-3) أنواع العلاقات

(4-3-1) علاقة التركيب

(4-3-2) العلاقة الانعكاسية

(4-3-3) العلاقة التناظرية

(4-3-4) العلاقة المتعدية

(4-3-5) العلاقة التخالفية

(4-3-6) علاقة التكافؤ

تمارين

الفصل الرابع
العلاقات

(4-1) العلاقة الثنائية (Binary Relation)

تعريف (4.1.1): إذا كانت A, B مجموعتين وكانت $R \subseteq A \times B$ فإن R تسمى علاقة ثنائية من A إلى B .

ملاحظات:

1. A تسمى منطلق العلاقة R و B تسمى المستقر.
2. إذا كانت A=B فإن R تسمى علاقة ثنائية على A .
3. إذا كانت (a, b) زوج مرتب من R فإننا نعبر عن ذلك ب aRb أو $(a, b) \in R$ ونقول أن العنصر a مرتبط بالعنصر b بواسطة العلاقة R .

مثال: إذا كانت A={1,2,3} , B={1,2,4,5} فأحسب ما يلي:

1. $A \times B$
2. $R_1 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y\}$
3. $R_2 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x < y\}$
4. $R_3 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x > y\}$
5. $R_4 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y + 1\}$
6. $R_5 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x|y\}$
7. $R_6 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y + 3\}$

الحل:

1. $A \times B =$
$\{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5)\}$

2. $R_1 = \{(1,1),(2,2)\}$
3. $R_2 = \{(1,2),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$
4. $R_3 = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$
5. $R_4 = \{(2,1),(3,2)\}$
6. $R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,5),(2,2),(2,4)\}$
7. $R_6 = \varphi$

مثال: لتكن $A = \{a,b,c\}, B = \{b,c,d\}, R_1 = \{(a,b),(a,c),(b,b),(c,c)\}$

1. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل؟
2. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية على A مع التعليل؟
3. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية على B مع التعليل؟
4. إذا كانت $R = \{(x,y) : (x,y) \in B \times B \wedge x = y\}$ فإكتب عناصر R.

الحل:

$A \times B = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d)\}$

1. نعم العلاقة R_1 تمثل علاقة ثنائية من A إلى B لأن $R_1 \subset A \times B$
2. بما أن

$A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

وبالتالي فإن العلاقة R_1 تمثل علاقة ثنائية على A وذلك لأن $R_1 \subset A \times A$

3. بما أن

$B \times B = \{(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d),(d,b),(d,c),(d,d)\}$

وبالتالي فإن العلاقة R_1 لا تمثل علاقة ثنائية على B وذلك لأن $R_1 \not\subset B \times B$ حيث $(a,b) \notin B \times B$

4.

$R = \{(b,b),(c,c)\}$

ملاحظة: إذا كانت R_1, R_2 علاقتان من A إلى B فإن $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$ تمثل أيضا علاقات ثنائية من A إلى B حيث:

$R_1 \cup R_2 = \{(a,b) : a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2\}$

$R_1 - R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \notin R_2\}$

مثال: إذا كانت $A=\{2, 5\}, B=\{3, 4, 10, 12\}$ وكانت R_1, R_2 علاقتان من A إلى B بحيث: R_1 هي العلاقة الثنائية aR_2b إذا وفقط إذا كان a أصغر تماما من b و $a\in A, b\in B$ بينما R_2 هي العلاقة الثنائية aR_2b إذا وفقط إذا كان a يقسم b و $a\in A, b\in B$.

فأحسب كلاً من $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$

الحل:

$R_1 = \{(2,3), (2,4), (2,10), (2,12), (5,10), (5,12)\}$

$R_2 = \{ (2,4), (2,10), (2,12), (5,10)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(2,3), (2,4), (2,10), (2,12), (5,10), (5,12)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(2,4), (2,10), (2,12), (5,10)\}$

$R_1 - R_2 = \{(2,3), (5,12)\}$

تعريف (4.1.2): إذا كانت R علاقة ثنائية من A إلى B فإن العلاقة العكسية للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كما يلي:

$R^{-1} = \{(y,x): (x,y) \in R\}$

ملاحظات:

إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

1. العلاقة R من A الى B هي مجموعة جزئيه من $A \times B$ وبالتالي تكون:

$R = \{(a,b), a \in A, b \in B, aRb\}$

2. نطاق (المجال) العلاقة R (Domain) هي مجموعة كل العناصر $a \in A$ حيث $aRb, b \in B$ ويكتب:

$Dom(R) = \{a \in A: \exists b \in B \wedge (a,b) \in R\}$

3. النطاق المصاحب (المدى) للعلاقة R (Range) هي مجموعة كل العناصر $b \in B$ حيث $aRb, a \in A$ ويكتب

$Ran(R) = \{b \in B: \exists a \in A \wedge (a,b) \in R\}$

4. معكوس العلاقة R هي العلاقة R^{-1} من B الى A ويكتب:

$R^{-1} = \{(b,a): a \in A, b \in B, aRb\}$

5. إذا كانت $R \subset A \times B$ فإن $R^{-1} \subset B \times A$

6. النطاق هو جزء من المنطلق A والمدى هو جزء من المستقر B .

مبرهنة (4.1.3): : لتكن R علاقة من A إلى B فإن:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $Dom\ (R) = Ran(R^{-1})$
3. $Ran\ (R) = Dom\ (R^{-1})$

البرهان:

أولاً:

$R = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$

$R^{-1} = \{(b,a): a \in A \wedge b \in B\}$

$(R^{-1})^{-1} = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$

ثانياً:

$Dom\ (R) = \{a \in A: \exists b \in B \wedge (a,b) \in R\}$ ....(1)

$Ran(R) = \{b \in B: \exists a \in A \wedge (a,b) \in R\}$ ....(2)

إذا بدلنا بين a و b نحصل على نطاق R^{-1} ومدى R^{-1} كما يلي:

$Dom\ (R^{-1}) = \{b \in B: \exists a \in A \wedge (a,b) \in R\}$ ....(3)

$Ran(R^{-1}) = \{a \in A: \exists b \in B \wedge (a,b) \in R\}$ ....(4)

إذن من (2) و (3) نحصل على:

$Ran\ (R) = Dom\ (R^{-1})$

ومن (1) و (4) نحصل على:

$\text{Dom}(R) = \text{Ran}(R^{-1})$

مثال: لنفرض أن $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,3\}$ فإحسب كلاً من:

1. $A \times B$
2. $R = \{(a,b): a > b\}$
3. R^{-1}

الحل:

$A \times B = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$

$R = \{(2,1),(3,1)\}$

$R^{-1} = \{(1,2),(1,3)\}$

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,4\}, B=\{2,3,5\}$ وكانت $R \subset A \times B$ حيث:

$R = \{(1,2),(1,3),(2,2)\}$ فعين ما يلي:

1. R^{-1}
2. نطاق $R = \text{Dom}(R) = \{x: x \in A \wedge xRy\}$
3. مدى $R = \text{Ran}(R) = \{y: y \in B \wedge xRy\}$
4. $\{x: x \in A \wedge (x,y) \notin A \times B\}$

الحل:

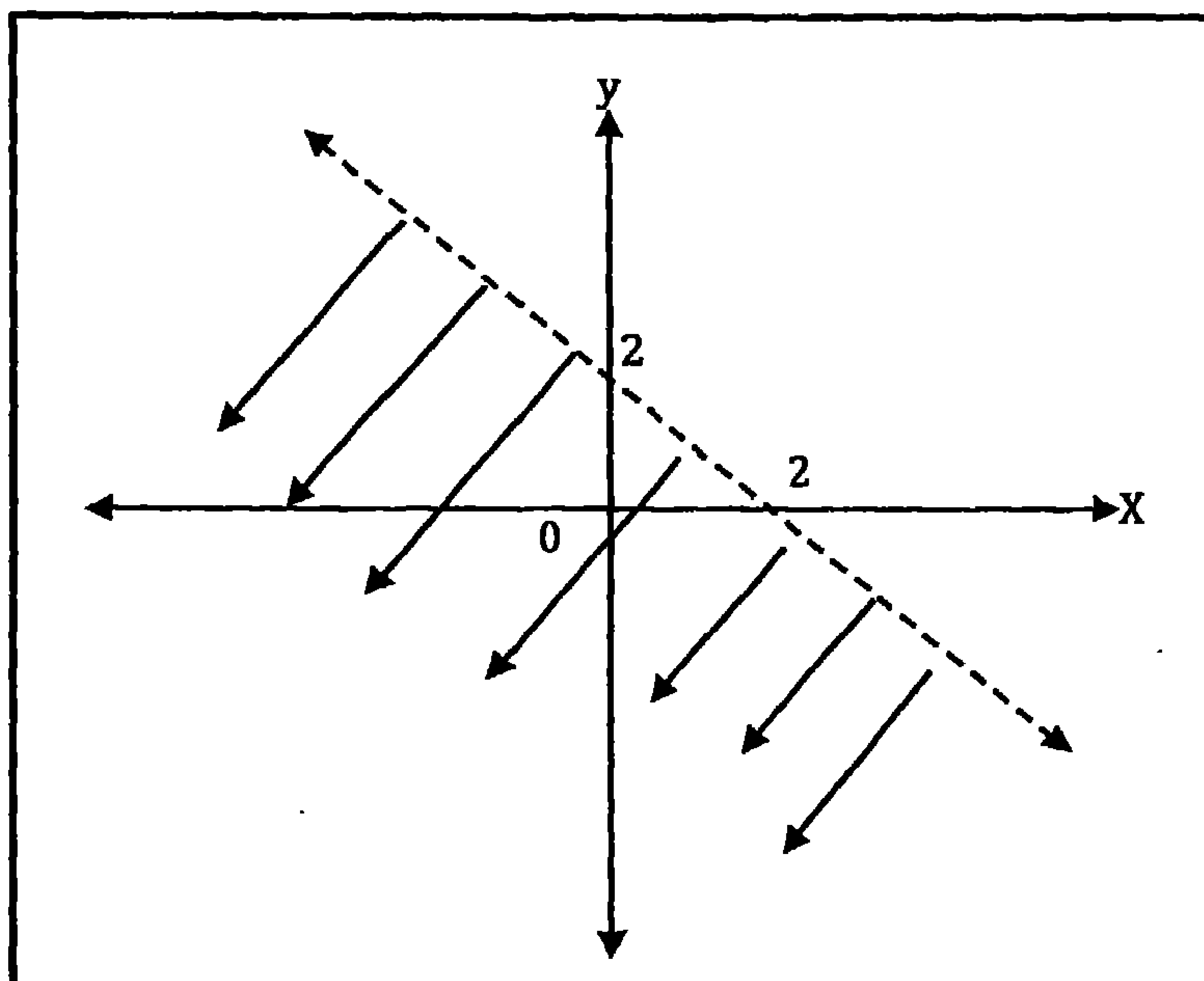
1. $R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(2,2)\}$
2. نطاق $R = \text{Dom}(R) = \{1,2\}$
3. مدى $R = \text{Ran}(R) = \{2,3\}$
4. $\{x: x \in A \wedge (x,y) \notin R\} = \{4\}$

مثال: إرسم الشكل الذي يمثل العلاقة R في المستوى $\mathbb{R}^2$ في الحالات الأتية:

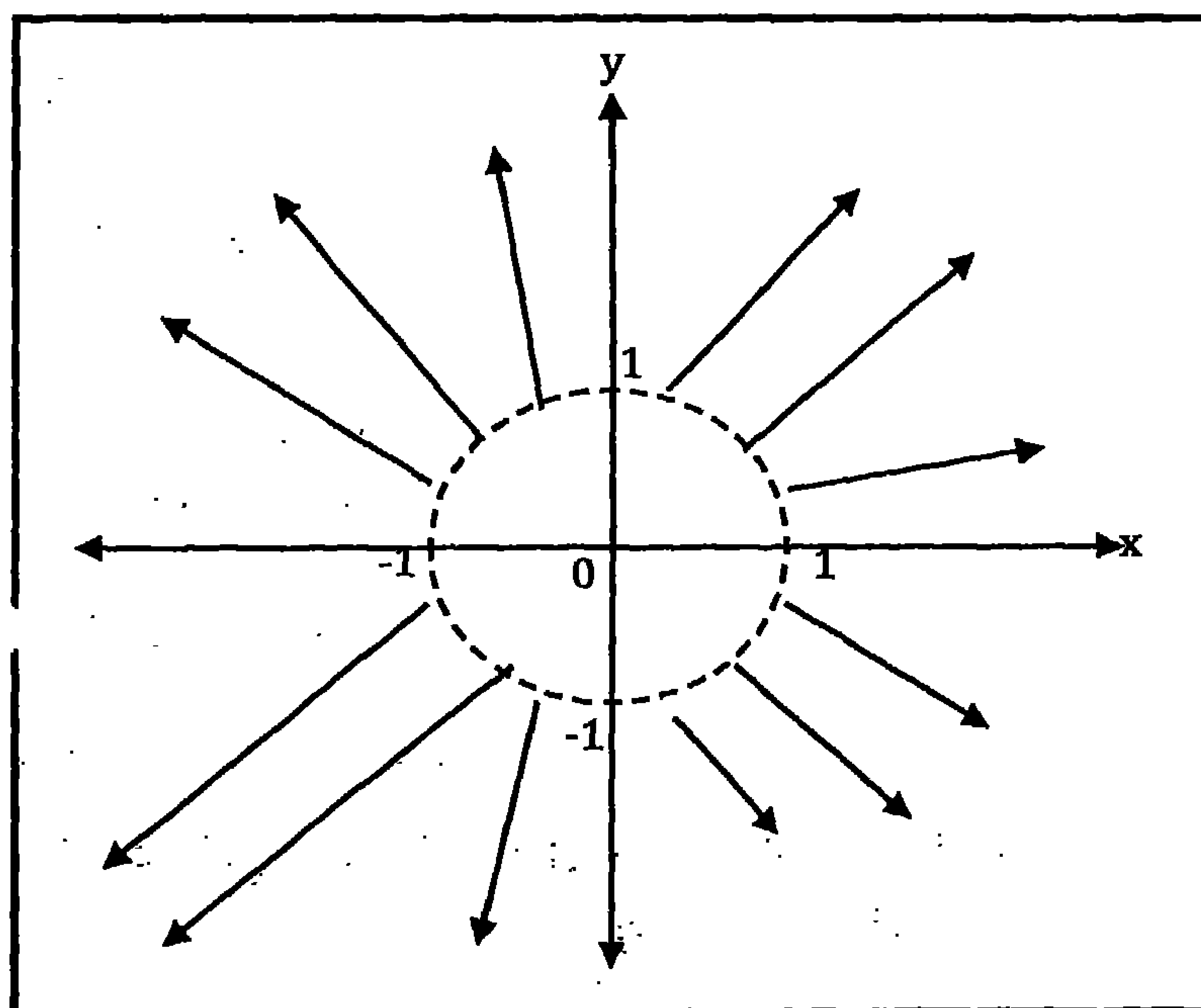
1. $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y < 2 - x\}$
2. $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \geq 1\}$

الحل:

أولاً: $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y < 2 - x\}$



ثانياً: $R = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \geq 1\}$



ملاحظة: هناك فرق كبير بين العلاقة الثنائية (Binary relation) وبين العملية الثنائية (Binary operation) حيث:

1. العملية الثنائية (Binary operation) على مجموعة غير خالية A هي قاعدة تربط أي زوج مرتب (a, b) من عناصر المجموعة A مع عنصر معين b∈A .
2. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تسمى عملية مغلقة (closed) أو حسنة التعريف (well defined) وإذا كان c هو العنصر الذي يرتبط مع الزوج المرتب a*b فإن $c \in A$ وهذا العنصر c يجب أن يكون وحيد.
3. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تكون إبدالية (Commutative) إذا كانت $\forall a, b \in A \Rightarrow a * b = b * a$
4. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تكون تجميعية (Associative) إذا كانت $\forall a, b, c \in A \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$
5. العملية الثنائية * على مجموعة غير خالية A تكون توزيعية (Distributive) إذا كانت $\forall a, b, c \in A \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية * بواسطة a*b يكون أصغر أو يساوي ما بين العددين a و b وبالتالي:

2*11=2, 15*10=10, 3*3=3

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية '* بواسطة $a *' b = a$ وبالتالي:

$2 *' 11 = 2, \quad 15 *' 10 = 15, \quad 3 *' 3 = 3, \quad 11 *' 2 = 11$

إذن: العملية الثنائية '* تكون غير إبدالية لأن $a *' b \neq b *' a$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية "* بواسطة:

$a *'' b = (a * b) + 2$

حيث العملية الثنائية * تعرف بواسطة a*b هو العدد الذي يكون أصغر أو يساوي ما بين العددين a و b وبالتالي:

$2 *'' 5 = 4, \quad 4 *'' 9 = 6, \quad 5 *'' 9 = 7, \quad 5 *'' 2 = 4,$

$2 *'' (5 *'' 9) = 2 *'' 7 = 4$

$(2 *'' 5) *'' 9 = 4 *'' 9 = 6$

إذن: العملية الثنائية $*''$ غير تجميعية لأن:

$$a *'' (b *'' c) \neq (a *'' b) *'' c$$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونعرف عليها العملية الثنائية $*$ بواسطة $a * b = \frac{a}{b}$ وبالتالي هذه العملية غير حسنة التعريف لأن $2 * 3 = \frac{2}{3}$

ولكن $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ ونعرف عليها العملية الثنائية $*$ بواسطة $a * b = \frac{a}{b}$ وبالتالي هذه العملية غير حسنة التعريف لأن $2 * 0 = \frac{2}{0}$

ولكن $\frac{2}{0} \notin \mathbb{Q}$

مثال: لنأخذ مجموعة الأعداد الكسرية التي لا تحتوي الصفر $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ ونعرف عليها العملية الثنائية $*$ بواسطة $a * b = \frac{a}{b}$ وبالتالي هذه العملية حسنة التعريف .

(4-2) تمثيل العلاقات

من الممكن أن نوصف العلاقة الثنائية بعدة طرق منها:

1. الطريقة الجرد

وفيه نسرد جميع عناصر العلاقة على شكل أزواج مرتبة بين حاصرتين.

مثال: إذا كانت $A=\{2, 4, 5\}, B=\{1, 3, 5, 6, 10, 11, 12\}$ ولتكن aRb إذا وفقط إذا كان a يقسم b بحيث $a \in A, b \in B$.

فأكتب عناصر هذه العلاقة بطريقة الجرد.

الحل:

$$R = \{(2,6), (2,10), (2,12), (4,12), (5,5), (5,10)\}$$

2. الطريقة الوصف

وفيه نكتب عناصر العلاقة على شكل أزواج مرتبة بين حاصرتين مع خاصية أو شرط يربط بين عناصر الزوج المرتب.

مثال: إذا كانت $A=\{2, 4, 5\}, B=\{1, 2, 3, 5, 8\}$ ولتكن aRb إذا وفقط إذا كان a أصغر تماما من b بحيث $a \in A, b \in B$.

فعبر عن هذه العلاقة

- بطريقة الوصف.

• بطريق الجرد.

الحل:

أولا: بطريق الوصف

$R = \{(a,b): b > a, \quad a \in A \wedge b \in B\}$

ثانيا: بطريق الجرد

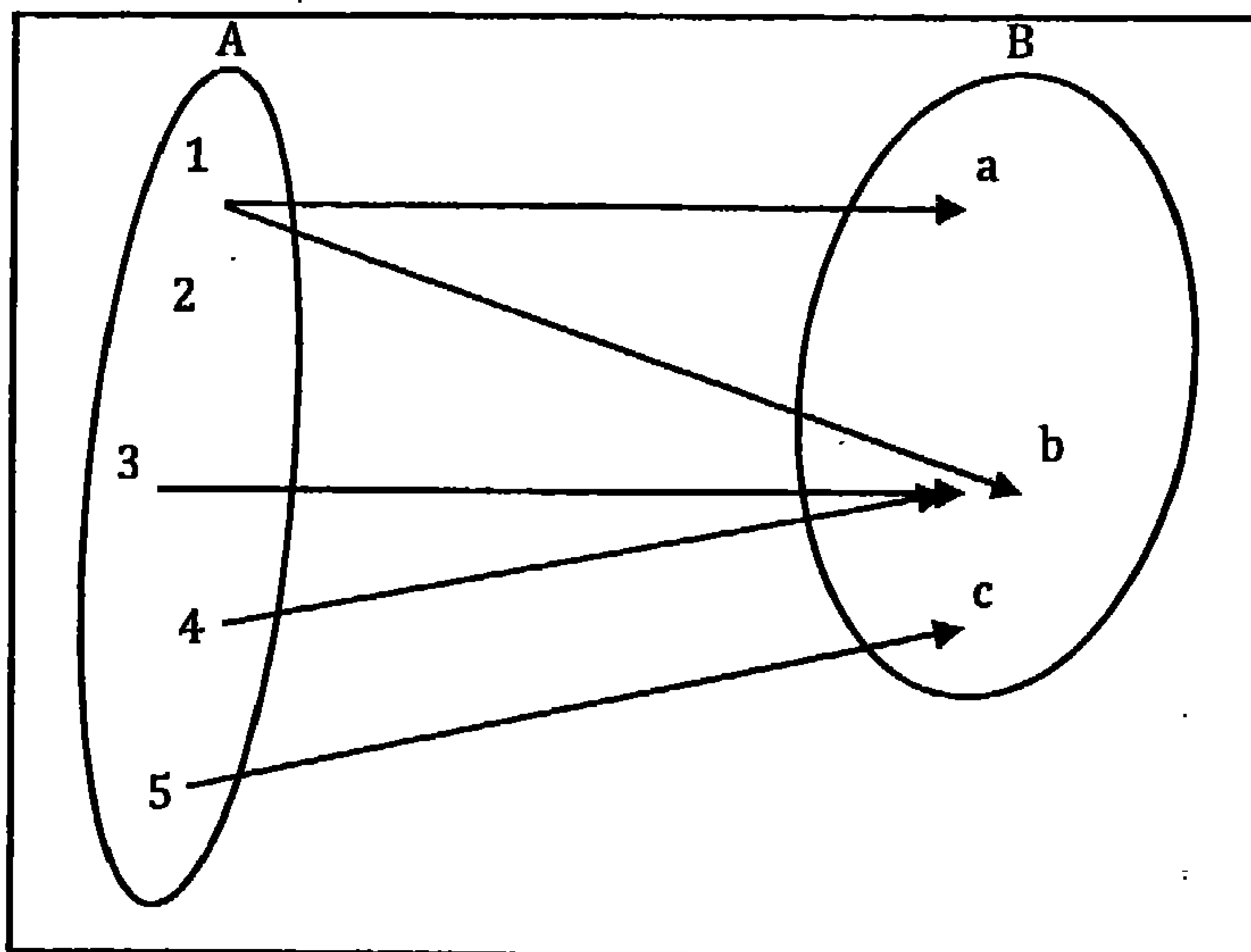
$R = \{(2,3),(2,5),(2,8),(4,5),(4,8),(5,8)\}$

3. المخطط السهمي

وفيه نمثل المنطلق A والمستقر B بدائرتين كما نرمز للإرتباط بين كل عنصر من A يرتبط بعنصر من B بسهم بدايته A ونهايته B .

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b,c\}$, و $R=\{(1,a), (1,b), (3,b),(4,b),(5,c)\}$ فمثل العلاقة R بالتمثيل السهمي.

الحل:



4. التمثيل بالجدول

وفيه نكون جدول بحيث توضع عناصر المجموعة A في العمود الأيسر وعناصر المجموعة B في الصف العلوي ثم توضع عناصر العلاقة R في بقية خلايا الجدول.

مثال: إذا كانت ,A={1,2,3,4,5} , B={a,b,c} و R={(1,a), (1,b), (3,b),(4,b),(5,c)}

فمثل العلاقة R بالتمثيل الجدولي.

الحل:

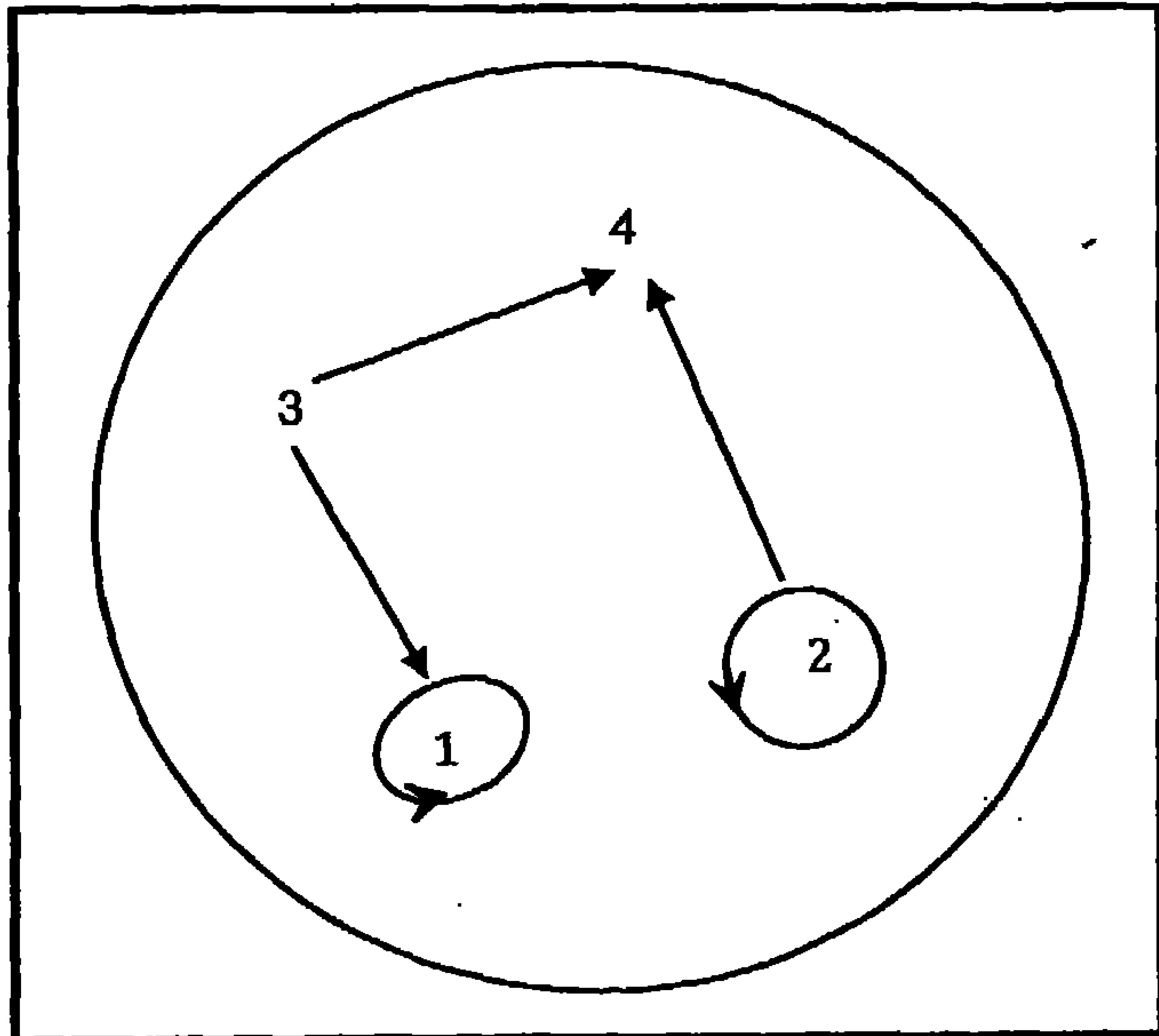
A \ B	a	b	c
1	(1,a)	(1,b)	
2			
3		(3,b)	
4		(4,b)	
5			(5,c)

ملاحظة: إذا كانت R علاقة على A أي أن R علاقة من A إلى A فإننا نرسم المخطط السهمي بسهم مغلق على دائرة مغلقة.

مثال: إذا كانت A={1,2,3,4} و R={(1,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,4)} فمثل العلاقة R بالمخطط السهمي ثم بالمخطط الجدولي.

الحل:

أولاً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



ثانياً: المخطط الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	1	2	3	4
1	(1,1)			
2		(2,2)		(2,4)
3	(3,1)			(3,4)
4				

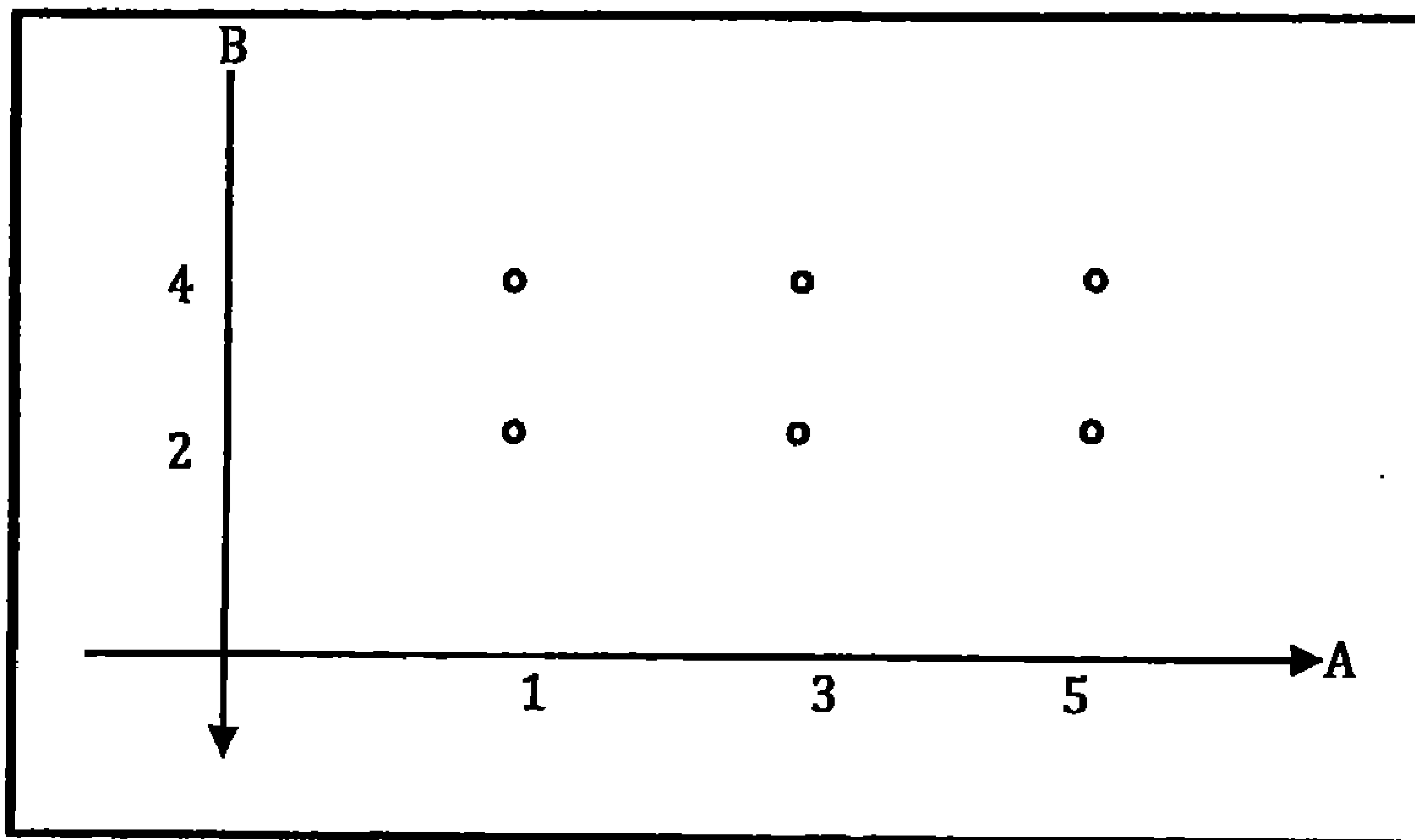
5. التمثيل البياني

ويستخدم عادة في المجموعات التي يمكن قياسها حيث يمكن وضع المجموعة A على المحور الأفقي والمجموعة B على المحور الرأسي وتمثل عناصر المجموعة R بنقاط التقاطع في مستوى XY .

مثال: إذا كانت $A=\{1,3,5\}, B=\{2,4\}$ فمثل بيانيا $A\times B$

الحل:

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$$



(4-3) أنواع العلاقات

(4-3-1) علاقة التركيب

تعريف: إذا كانت R_1 علاقة من A إلى B وكانت R_2 علاقة من B إلى C فإن

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,c): a \in A, c \in C, \exists b \in B: aR_1b \wedge bR_2c\}$$

تسمى علاقة التركيب R_1 و R_2 .

ملاحظة: لا يكون العنصر $a\in A$ مرتبط بالعنصر $c\in C$ بواسطة العلاقة $R_2 \circ R_1$ إلا إذا كان يوجد عنصر $b\in B$ بحيث يكون العنصر a مرتبط ب b بواسطة R_1 والعنصر c أيضا يكون مرتبط بالعنصر b بواسطة العلاقة R_2 .

مثال: إذا كانت

$$R_1 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$$
$$R_2 = \{(1,4),(2,7),(3,5),(5,7)\}$$

فأوجد $R_2 \circ R_1$

الحل:

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,4),(b,7),(c,5)\}$$

مثال: إذا كانت R_1 و R_2 العلاقتان

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = nx\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = mx\}$$

فأوجد كلاً من R_1^{-1} و $R_2 \circ R_1$.

الحل:

أولاً:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = nx\} = \{(x,nx): x \in \mathbb{Z}\}$$
$$R_1^{-1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = \frac{x}{n}\right\} = \{(nx,x): x \in \mathbb{Z}\}$$

ثانياً:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = nx\} = \{(x,nx): x \in \mathbb{Z}\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2: y = mx\} = \{(x,mx): x \in \mathbb{Z}\}$$

$(x,z) \in R_1 \to z = nx$ ....(1)

$(z,y) \in R_2 \to y = mz$ ....(2)

من (1) و (2) نحصل على $y = mnx$ وبالتالي:

$R_2 \circ R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y = nmx\} = \{(x, nmx) : x \in \mathbb{Z}\}$

مبرهنه (4.3.1): ليكن R, S, T علاقات على المجموعة A و I_A هي العلاقة الذاتية على A فإن:

1. $I_A \circ R = R \circ I_A = R$
2. $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$
3. $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$
4. $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$
5. If $R \subseteq S$ then $T \circ R \subseteq T \circ S$
6. $(T \circ R^{-1}) \cap S = \varphi \leftrightarrow (S \circ R) \cap T = \varphi$
7. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

البرهان:

سوف نثبت (1) و (2) و (6) والباقي تمارين.

إثبات (1):

أولاً: نفرض أن $(x,y) \in I_A \circ R$ فإن

$\exists z \in A: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in I_A$

$\Rightarrow (z,y) \in I_A$

$\Rightarrow z = y$

$\Rightarrow (x,y) = (x,z) \in R$

$\forall (x,y) \in I_A \circ R \Rightarrow (x,y) \in R$

$I_A \circ R \subseteq R$ ....(1)

ثانياً: نفرض أن $(x,y) \in R$ فإن:

$(x,y) \in R \wedge (y,y) \in I_A$

$\Rightarrow (x,y) \in I_A \circ R$

$\forall (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in I_A \circ R$

$\Rightarrow R \subseteq I_A \circ R$ ....(2)

من (1) و (2) نحصل على $R = I_A \circ R$ وبالمثل يمكن إثبات أن $R = R \circ I_A$

إثبات (2): أولاً: نفرض أن $(x,y) \in (T \circ S) \circ R$ فإن:

$\exists z \in A: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in (T \circ S)$

$\Rightarrow \exists h \in A: (x,z) \in R \wedge [(z,h) \in S \wedge (h,y) \in T]$

$\Rightarrow (x,z) \in R \wedge (z,h) \in S \wedge (h,y) \in T$

$\Rightarrow [(x,z) \in R \wedge (z,h) \in S] \wedge (h,y) \in T$

$\Rightarrow [(x,h) \in S \circ R] \wedge (h,y) \in T$

$\Rightarrow (x,y) \in T \circ (S \circ R)$

$\Rightarrow (T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ ....(3)

ثانياً: نفرض أن $(x,y) \in T \circ (S \circ R)$ فإن:

$\exists z \in A: (x,z) \in (S \circ R) \wedge (z,y) \in T$

$\Rightarrow \exists h \in A: [(x,h) \in R \wedge (h,z) \in S] \wedge (z,y) \in T$

$\Rightarrow (x,h) \in R \wedge (h,z) \in S \wedge (z,y) \in T$

$\Rightarrow (x,h) \in R \wedge [(h,z) \in S \wedge (z,y) \in T]$

$\Rightarrow (x,h) \in R \wedge (h,y) \in (T \circ S)$

$\Rightarrow (x,y) \in (T \circ S) \circ R$

$\Rightarrow T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$...(4)

من (3) و (4) ينتج $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

إثبات (6):

أولاً: نفرض أن $(S \circ R) \cap T \neq \varphi$ إذن

$\Rightarrow \exists (x,y) \in (S \circ R) \cap T$

$\Rightarrow (x,y) \in S \circ R \wedge (x,y) \in T$

$\Rightarrow (x,y) \in S \circ R$

$\Rightarrow \exists z \in A: (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S$

$\Rightarrow (x,z) \in R \Rightarrow (z,x) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (z,x) \in R^{-1} \wedge (x,y) \in T$

$\Rightarrow (z,y) \in T \circ R^{-1}$

لكن $(z,y) \in S$ إذن:

$(z,y) \in (T \circ R^{-1}) \cap S$

إذن إذا كانت $(S \circ R) \cap T \neq \varphi$ فإن:

$(T \circ R^{-1}) \cap S \neq \varphi$..(5)

ثانياً: بنفس الطريقة يمكن إثبات أنه إذا كانت $(T \circ R^{-1}) \cap S \neq \varphi$ فإن:

$(S \circ R) \cap T \neq \varphi$ ....(6)

إذن من (5) و (6) ينتج أن:

$(S \circ R) \cap T = \varphi$ إذا وفقط إذا كان $(T \circ R^{-1}) \cap S = \varphi$

(4-3-2) العلاقة الإنعكاسية

> **تعريف:** نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة إنعكاسية (Reflexive) إذا كانت لكل عنصر x في A فإن xRx.

ملاحظة: إذا كانت R علاقة إنعكاسية فإن كل عنصر من A مرتبط بنفسه فإذا عبرنا عن R بمخطط سهمي فسوف نجد حول كل عنصر من A سهم على شكل دائرة مغلقة أما إذا عبرنا عن R بالمخطط الجدولي فإن العلاقة الإنعكاسية R توصف بتواجد النقاط في خلايا القطر الرئيسي وبالتالي فإن هذه العلاقة تسمى بالعلاقة القطرية أو العلاقة المحايدة ويرمز لها بالرمز I_A ويمكن وصفها ب:

$I_A = \{(x,x): x \in A\}$

نظرية (4.3.2): ليكن R علاقة على المجموعة A فإن:

R تكون إنعكاسية إذا وفقط إذا كان $I_A \subseteq R$

البرهان:

العلاقة R تكون إنعكاسية إذا وفقط إذا كان لكل $x \in R$ فإن $(x,x) \in R$ إذا وفقط إذا كان $I_A \subseteq R$.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,6\}$ وكانت R_1 علاقة على A معرفة بـ:

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(6,6),(6,2)\}$$

وكانت R_2 علاقة على A معرفة بـ:

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(6,6),(6,2)\}$$

فهل العلاقات إنعكاسية؟

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 هي علاقة إنعكاسية لأن $(1,1),(2,2),(3,3),(6,6) \in R_1$.

ثانياً: العلاقة R_2 هي علاقة إنعكاسية لأن $3 \in A$ لكن $(3,3) \notin R_2$.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,6\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$$R = \left\{(x,y): x,y \in A, \quad \frac{y}{x} \in \mathbb{N}\right\}$$

1. فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
2. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
3. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً: بما أن كل عنصر من A يقسم نفسه:

$$\frac{1}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{2} \in \mathbb{N}, \quad \frac{3}{3} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{6} \in \mathbb{N}$$

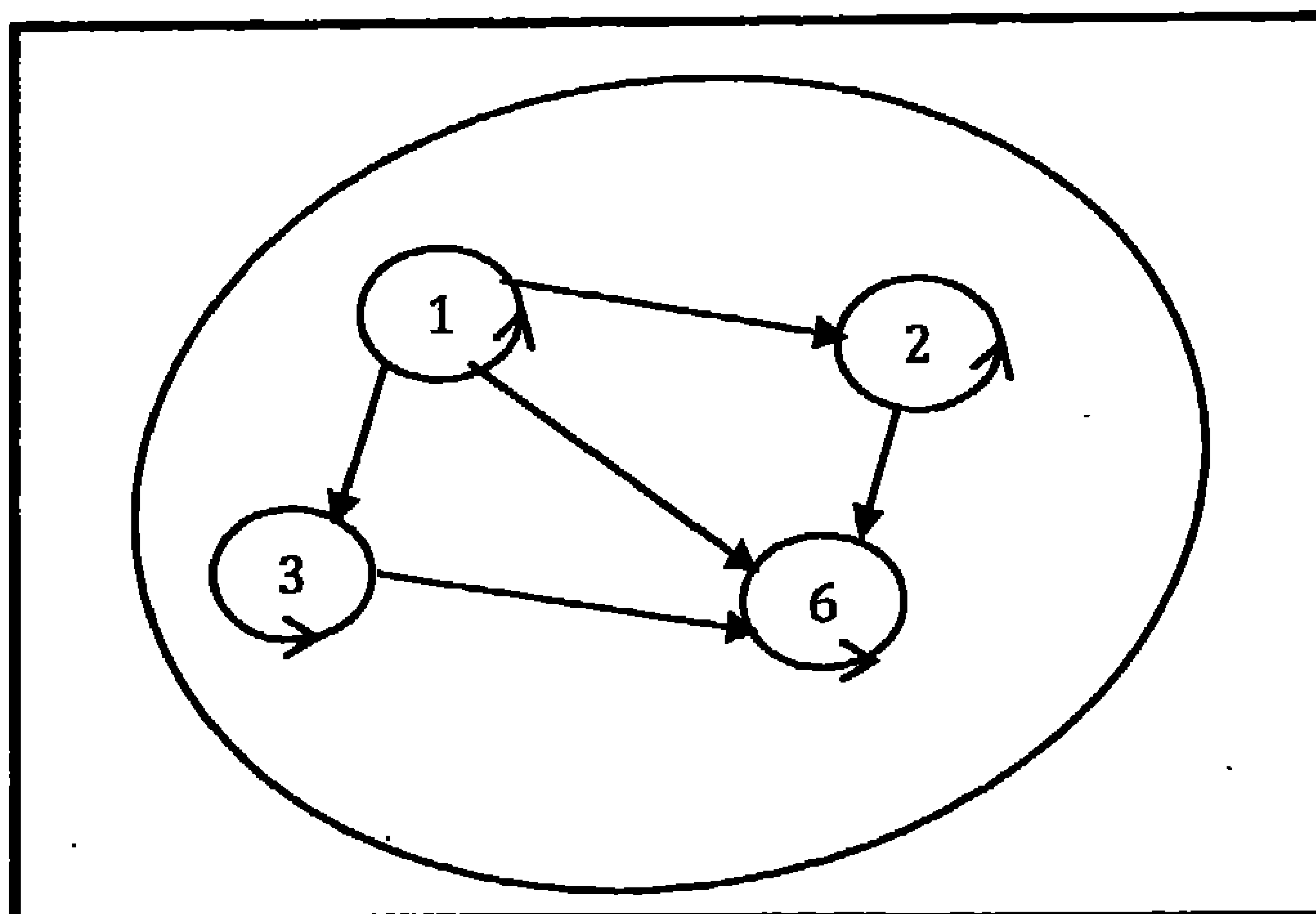
$$\Rightarrow 1R1, \quad 2R2, \quad 3R3, \quad 6R6$$

فإن كل عنصر من A مرتبط بنفسه وبالتالي تكون العلاقة R إنعكاسية.
كما أن:

$$\frac{2}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{3}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{2} \in \mathbb{N}, \quad \frac{6}{3} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1R2, \quad 1R3, \quad 1R6, \quad 2R6, \quad 3R6$$

ثانياً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



ثالثاً: المخطط الجدولي:

A \ A	1	2	3	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,6)
2		(2,2)		(2,6)
3			(3,3)	(3,6)
6				(6,6)

(4-3-3) العلاقة التناظرية

تعريف: نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة متناظرة (متماثلة) (Symmetric) إذا كانت لكل العناصر x, y في A بحيث xRy فإن yRx .

نظرية (3-3-4): العلاقة R على المجموعة A تكون متناظرة إذا وفقط إذا كان $R = R^{-1}$

البرهان:

نفرض أن العلاقة R متناظرة إذن:

أولاً: نأخذ $(x,y) \in R$ إذن:

$\Rightarrow (y,x) \in R$

ولكن $(y,x) \in R^{-1}$ إذن:

$R \subseteq R^{-1}$..(1)

ثانياً: نأخذ $(y,x) \in R^{-1}$ إذن:

$\Rightarrow (x,y) \in R$

ولكن العلاقة R متناظرة إذن:

$(y,x) \in R$

$\Rightarrow R^{-1} \subseteq R$..(2)

من (1) و (2) نحصل على أنه إذا كانت العلاقة R متناظرة فإن $R = R^{-1}$

عكسياً: نفرض أن $R = R^{-1}$ إذن:

$\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$

ولكن $R = R^{-1}$ إذن $(y,x) \in R$

إذن العلاقة R متناظرة.

ملاحظة: في التمثيل السهمي فإن العلاقة R تكون تناظرية إذا كان كل الأسهم التي تربط أي عنصرين x, y تكون سهم ذو رأسين.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ وكانت R_1 علاقة على A معرفة بـ:

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

وكانت R_2 علاقة على A معرفة بـ:

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3)\}$

فهل العلاقات متناظرة:

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 هي علاقة متناظرة لأن $R_1^{-1} = R_1$

ثانياً: العلاقة R_2 هي علاقة ليست متناظرة لأن $R_2^{-1} \neq R_2$

حيث:

$R_2^{-1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,2)\}$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,0,1\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$R = \{(x,y): x,y \in A, \quad 0 \le xy\}$

1. فهل العلاقة R متناظرة ؟
2. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
3. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً:

$-2R-2, \quad -1R-1, \quad 0R0, \quad 1R1$

$-2R-1 \leftrightarrow -1R-2,$

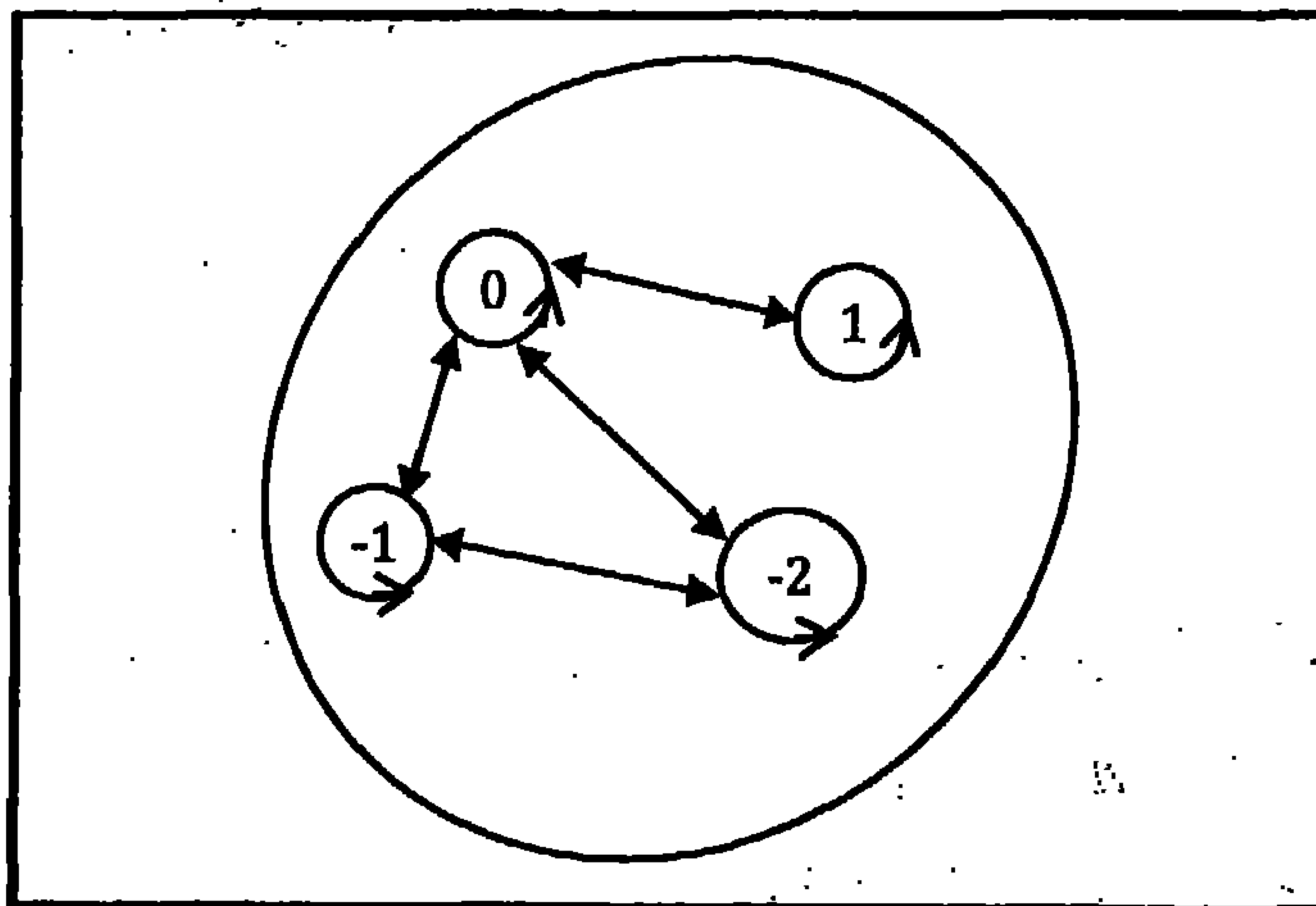
$-2R0 \leftrightarrow 0R-2,$

$-1R0 \leftrightarrow -1R0,$

$0R1 \leftrightarrow 1R0$

إذن العلاقة R تناظرية.

ثانياً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



ثالثاً: التمثيل الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	-2	-1	0	1
-2	(-2,-2)	(-2,-1)	(-2, 0)	
-1	(-1, -2)	(-1,-1)	(-1,0)	
0	(0,-1)	(0,-1)	(0,0)	(0,1)
1			(1,0)	(1,1)

(4-3-4) العلاقة المتعدية

تعريف: نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة متعدية (ناقلة) (Transitive) إذا كانت لكل العناصر x,y,z في A بحيث $xRy \wedge yRz$ تقتضي أن تكون xRz .

ملاحظة: في التمثيل السهمي للعلاقة R فإن العلاقة تكون متعدية إذا وجد سهم من x إلى y وسهم ثاني من y إلى z فإنه يجب وجود سهم ثالث من x إلى z .

نظرية (4.3.4): ليكن R علاقة على المجموعة A فإن:

R تكون متعدية إذا وفقط إذا كان $R \circ R \subseteq R$

البرهان:

أولاً: نفرض أن العلاقة R تكون متعدية

إذن

$$\forall (x,y) \in R \circ R \rightarrow \exists z \in A, (x,z) \in R \wedge (z,y) \in R \rightarrow (x,y) \in R$$

وبالتالي يكون $R \circ R \subseteq R$

عكسياً: إذا كانت العلاقة R تحقق $R \circ R \subseteq R$ فإن

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R \circ R \subseteq R$$
$$\rightarrow (x,z) \in R$$

إذن العلاقة R تكون متعدية.

مثال: لتكن R_1 و R_2 علاقتنان معرفه على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: x < y\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: x + 2y = 14\}$$

فأدرس هل العلاقات متعدية أم لا مع ذكر السبب.

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 متعدية لأن إذا كانت $x, y, z \in A$ بحيث $x < y,\ y < z$ وبالتالي يكون $x < z$ وهذا يعني أنه إذا كانت $(x, y) \in R_1$ و $(y, z) \in R_1$ فإن $(x, z) \in R_1$.

ثانياً: العلاقة R_2 ليست متعدية لأن إذا كانت $x, y, z \in A$ بحيث $(x, y) \in R_2$ و $(y, z) \in R_2$ فإن:

$x + 2y = 14$ ....(1)

و $y + 2z = 14$ ....(2)

من (2) في (1) نحصل على $x + 2(2z - 14) = 14$

وبالتالي $x + 4z = 42$ هذه المعادلة لا تؤدي إلى $x + 2z = 14$ إذن $(x, z) \notin R_2$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,0,1\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$$R = \{(x, y): x, y \in A, 0 \le xy\}$$

فهل العلاقة R متعدية ؟

الحل:

لا لأن $-2R0,\ 0R1$ ولكن $(-2, 1)\notin R$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,1,3,5\}$ وفي حاصل الضرب الكرتيزي $A^2=A\times A$ إذا عرفنا العلاقة:

$$R = \{(x, y): x, y \in A, 0 < xy\}$$

1. فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
2. فهل العلاقة R متناظرة ؟
3. فهل العلاقة R متعدية ؟
4. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
5. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً: بما أن:

$-2R-2, -1R-1, 1R1, 3R3, 5R5$

إذن العلاقة R إنعكاسية.

ثانياً: بما أن:

$-2R-1 \leftrightarrow -1R-2, \quad 1R3 \leftrightarrow 3R1, \quad 1R5 \leftrightarrow 5R1, \quad 3R5 \leftrightarrow 5R3$

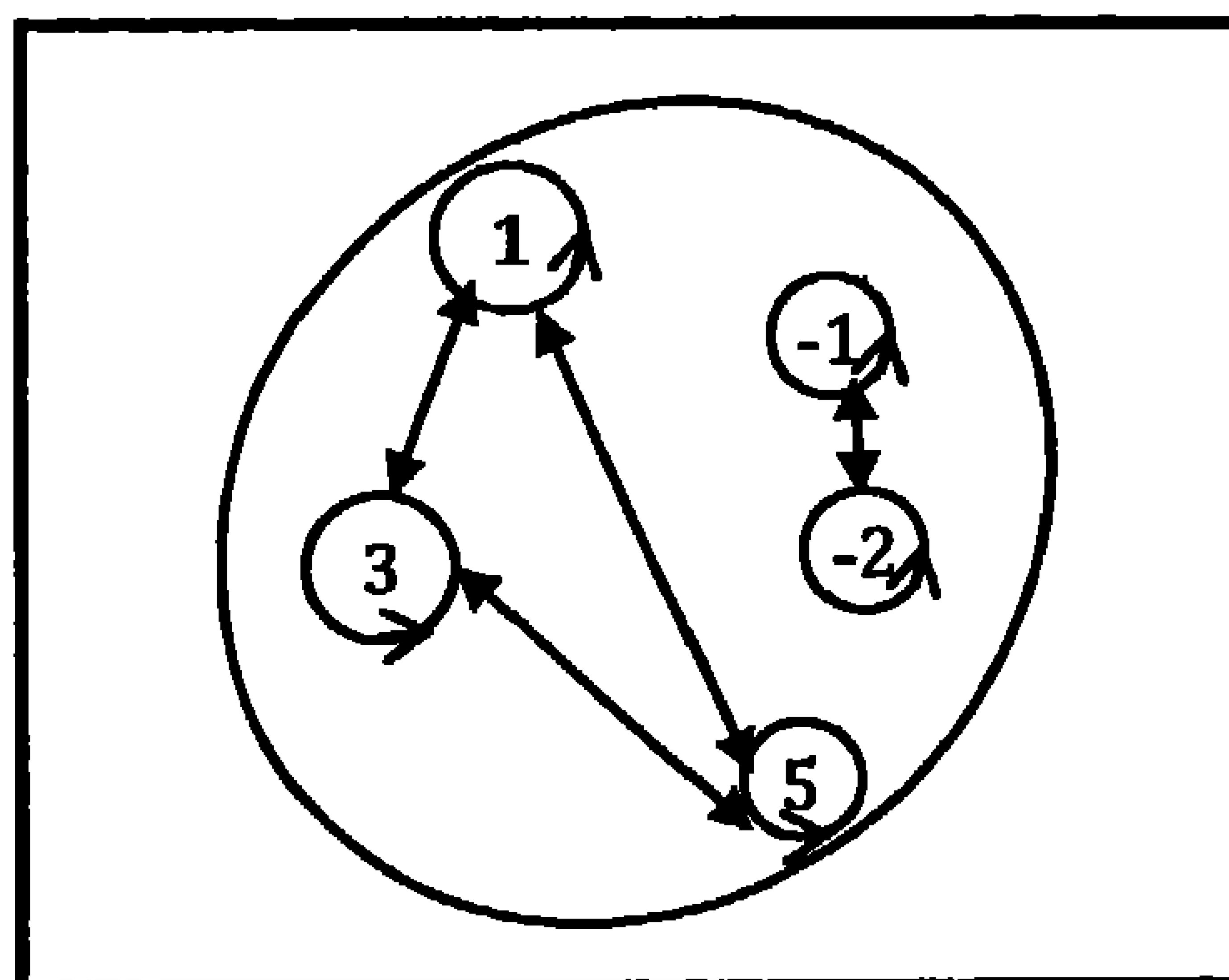
إذن العلاقة R تناظرية.

ثالثاً: بما أن:

$1R3 \wedge 3R5 \rightarrow 1R5$

إذن العلاقة R متعدية.

رابعاً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



خامساً: التمثيل الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	-2	-1	1	3	5
-2	(-2,-2)	(-2,-1)			
-1	(-1,-2)	(-1,-1)			
1			(1,1)	(1,3)	(1,5)
3			(3,1)	(3,3)	(3,5)
5			(5,1)	(5,3)	(5,5)

(4-3-5) العلاقة التخالفية

تعريف: نقول أن العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة تخالفية (ضد التناظر) (Anti-Symmetric) إذا كانت لكل العناصر x, y في A بحيث $xRy \wedge yRx$ تقتضي أن تكون $x = y$.

ملاحظة:

1. نقول ان العلاقة R على المجموعة A إنها علاقة تخالفية إذا كانت لكل العناصر x, y في A بحيث $x \neq y$ تقتضي أن تكون $(x, y) \notin R \vee (y, x) \notin R$.
2. في التمثيل السهمي نجد أن العلاقة R تكون علاقة تخالفية إذا كان كل سهم في المخطط السهمي ذو رأس واحد بمعنى أن كل سهم ينبعث من العنصر x إلى العنصر y لا يعود مره أخرى من العنصر y إلى العنصر x .

نظرية (4.3.5): لتكن R علاقة على المجموعة A فإن R علاقة تخالفية إذا وفقط إذا كان:

$$R \cap R^{-1} = I_A$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن R علاقة تخالفية و $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ وبالتالي:

$$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$$

لكن R علاقة تخالفية إذن:

$$x = y$$

$$\Rightarrow (x, y) \in I_A$$

$$\Rightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$$

ثانياً: نفرض أن $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ و $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$ إذن:

$$(x, y) \in R \wedge (x, y) \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in R \cap R^{-1}$$

لكن $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ إذن:

$$(x, y) \in I_A$$

إذن $x = y$

إذن العلاقة R هي علاقة تخالفية.

مثال: إذا كانت $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن R علاقة معرفة على A بـ:

$$R = \{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2)\}$$

فهل العلاقة R تخالفية ؟

الحل:

العلاقة R ليست تخالفية لأن $2R3 \wedge 3R2$ ولكن $3 \neq 2$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,0,1\}$ ولتكن R علاقة معرفة على A بـ:

$$R = \{(x,y): x,y \in A:\ 0 \leq xy\}$$

فهل العلاقة R تخالفية؟

الحل:

العلاقة R ليست تخالفية لأن $0R-2 \wedge -2R0$ ولكن $0 \neq -2$

مثال: إذا كانت $A=\{-2,-1,1,3,5\}$ ولتكن R علاقة معرفة على A بـ:

$$R = \{(x,y): x,y \in A, \quad x < y\}$$

1. فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
2. فهل العلاقة R متناظرة ؟
3. فهل العلاقة R متعدية ؟
4. فهل العلاقة R تخالفية ؟
5. مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
6. مثل العلاقة R بالجدول؟

الحل:

أولاً: بما أن:

$$(-2,-2) \notin R$$

إذن العلاقة R ليست إنعكاسية.

ثانياً: بما أن:

$$(-2,-1) \in R \wedge (-1,-2) \notin R$$

إذن العلاقة R ليست تناظرية.

ثالثاً: بما أن:

$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz \ \forall x, y, z \in A$

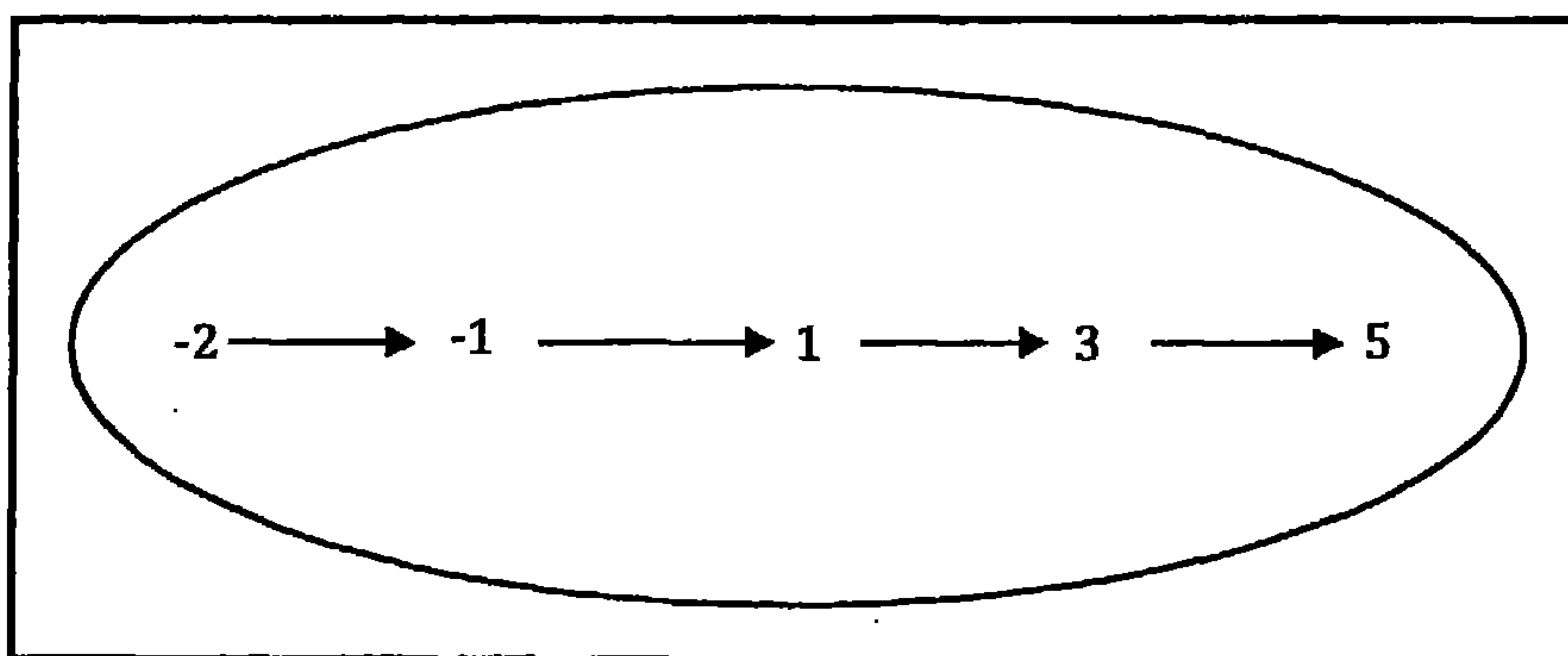
إذن العلاقة R متعدية.

رابعاً: بما أن:

$(-2,-1) \in R \wedge (-1,-2) \notin R, (-1,1) \in R \wedge (1,-1) \notin R, (1,5) \in R \wedge (5,1) \notin R, (3,5) \in R \wedge (5,3) \notin R$

إذن العلاقة R ليست تناظرية إذن فإن العلاقة R تكون تخالفية.

خامساً: المخطط السهمي للعلاقة R هو:



سادساً: التمثيل الجدولي للعلاقة R هو:

A \ A	-2	-1	1	3	5
-2		(-2,-1)	(-2,1)	(-2,3)	(-2,5)
-1			(-1,1)	(-1,3)	(-1,5)
1				(1,3)	(1,5)
3					(3,5)
5					

(4-3-6) علاقة التكافؤ

تعريف: إذا كانت R علاقة ثنائية على مجموعة غير خالية A وكانت R علاقة إنعكاسية وتناظرية و متعدية فإن العلاقة R تسمى علاقة تكافؤ (Equivalence relation) على A.

ملاحظة: إذا كانت R علاقة تكـافؤ علـى المجموعـة A و x, y عنصـرين مـرتبطين بواسـطة العلاقة R فإننا نقول أن x, y متكافئان بالنسبة للعلاقـة R وتكتـب $x \equiv y(R)$ وفي هذه الحالة تكون المجموعة الجزئية التي تتكون مـن كـل العناصـر المكافئـة للعنصـر x تسمى صف (فصل) تكافؤ (Equivalence class) العنصر x ونرمز له بـالرمز $\bar{x}$ أو $[x]$ ويمكن وصفه بـ:

$$[x] = \{y \in A: xRy\}$$

والعنصر x يعتبر ممثل لصف التكافؤ وإذا كان y يكافئ العنصر x بالنسبة للعلاقـة R أي $x \equiv y(R)$ فإن $[x]=[y]$ وبالتالي يكون دائما:

$$xRy \leftrightarrow [x] = [y] \leftrightarrow x \in [y] \leftrightarrow y \in [x]$$

ومجموعة جميع فصول تكافؤ العلاقة R تسمى مجموعة القسمة (Quotient set) ونرمز لها بالرمز A/R .

مبرهنـة (4.3.6): إذا كانت R_1, R_2 علاقات تكـافؤ علـى المجموعـة A فـإن $R_1 \cap R_2$ تكون أيضا علاقة تكافؤ على A .

البرهان:

بما أن R_1, R_2 علاقـات تكـافؤ علـى المجموعـة A فـإن R_1, R_2 علاقـات إنعكاسـية ومتناظرة ومتعدية وبالتالي:

أولاً: إثبات أن $R_1 \cap R_2$ علاقة إنعكاسية؟

بما أن R_1, R_2 علاقات إنعكاسية فإن:

$$\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R_1 \land (x,x) \in R_2$$
$$\Rightarrow (x,x) \in R_1 \cap R_2$$

إذن العلاقة $R_1 \cap R_2$ علاقة إنعكاسية.

ثانياً: إثبات أن $R_1 \cap R_2$ علاقة متناظرة؟

بما أن R_1, R_2 علاقات متناظرة فإن

$$\forall (x,y) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (x,y) \in R_1 \land (x,y) \in R_2$$
$$\Rightarrow (y,x) \in R_1 \land (y,x) \in R_2$$
$$\Rightarrow (y,x) \in R_1 \cap R_2$$

إذن العلاقة $R_1 \cap R_2$ علاقة متناظرة.

ثالثاً: إثبات أن $R_1 \cap R_2$ علاقة متعدية؟

بما أن R_1, R_2 علاقات متناظرة فإن:

$$\forall (x,y),(y,z) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow [(x,y),(y,z) \in R_1] \wedge [(x,y),(y,z) \in R_2]$$
$$\Rightarrow (x,z) \in R_1 \wedge (x,z) \in R_2$$
$$\Rightarrow (x,z) \in R_1 \cap R_2$$

إذن العلاقة $R_1 \cap R_2$ علاقة متعدية.

مبرهنة (4.3.7): إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن $R \circ R = R$

البرهان:

أولاً: نفرض أن:

$$(x,y) \in R \circ R, \qquad x,y \in A$$
$$\Rightarrow \exists z \in A: (x,z),(z,y) \in R$$

ولكن العلاقة R متعدية إذن:

$$(x,y) \in R$$
$$\Rightarrow R \circ R \subseteq R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ثانياً: نفرض أن:

$$(x,y) \in R, \; x,y \in A$$

ولكن العلاقة R إنعكاسية إذن:

$$(x,x) \in R, \qquad x \in A$$
$$\Rightarrow \exists y \in A: (x,x) \in R \wedge (x,y) \in R$$
$$\Rightarrow (x,y) \in R \circ R$$
$$\Rightarrow R \subseteq R \circ R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نحصل على $R = R \circ R$

نظرية (4.3.8): إذا كانت A مجموعة غير خالية فإن كل علاقة تكافؤ معرفة على A ينتج عنها تجزئة للمجموعة A وبالعكس فإن كل تجزئة للمجموعة A ينتج عنها علاقة تكافؤ R معرفة على A .

البرهان:

أولاً: لنفرض أن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ونريد أن نبرهن أن مجموعة صفوف التكافؤ A/R تكون تجزئة للمجموعة A ؟

1. بما أن العلاقة R إنعكاسية فإن $x \in [x]$ إذن $[x] \neq \varphi$ وبالتالي يكون كل صف من صفوف التكافؤ يمثل مجموعة غير خالية.

2. بما أن كل عنصر $x \in A$ فإن x تكون تنتمي إلى حد فصول تكافؤ وبالتالي:

$A \subseteq \cup_{x \in A} [x] \subseteq A \rightarrow A = \cup_{x \in A} [x]$

3. إذا كان $[x], [y]$ صفين مختلفين $([x] \neq [y])$ من المجموعة A/R وكان $[x] \cap [y] \neq \varphi$ فإن:

$$\rightarrow \exists z \in A: z \in [x] \cap [y] \rightarrow z \in [x] \wedge z \in [y]$$

$$\rightarrow [z] = [x] \wedge [z] = [y] \rightarrow [x] = [y]$$

وهذا يناقض الفرض $([x] \neq [y])$ إذن لحل هذا التناقض يجب أن يكون $[x] \cap [y] = \varphi$ وبالتالي تكون الفصول المتساوية منطبقة والفصول الغير متساوية تكون غير متقاطعة (منفصلة).

ثانياً: إذا كانت $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ تمثل تجزئة للمجموعة A فإننا نعرف العلاقة R بـ:

$$xRy \leftrightarrow (x, y) \in A_i \times A_i, \qquad 1 \leq i \leq n$$

أي أن العنصرين x, y يقعان في نفس خلية التجزئة A_i ونريد الأن أن نثبت أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ على A ؟

أ. العلاقة R إنعكاسية على A لأن:

$$\forall x \in A_i \rightarrow (x, x) \in A_i \times A_i, \qquad 1 \leq i \leq n \rightarrow xRx$$

ب. العلاقة R تناظرية على A لأن:

$$xRy \rightarrow (x, y) \in A_i \times A_i, \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\rightarrow (y, x) \in A_i \times A_i, \qquad 1 \leq i \leq n \rightarrow yRx$$

ج. العلاقة R متعدية على A لأن:

$$xRy \wedge yRz \rightarrow (x, y) \in A_i \times A_i, \quad (y, z) \in A_i \times A_i, \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\rightarrow (x, z) \in A_i \times A_i, \qquad 1 \leq i \leq n \rightarrow xRz$$

من (أ) و(ب) و(ت) فإن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ على A .

ملاحظة: اذا كانت R علاقة على A فإن:

1. العلاقة R تكون إنعكاسية (Reflexive) اذا وفقط إذا كان $aRa\ \forall a \in A$.
2. العلاقة R تكون متماثله (متناظرة) (Symmetric) إذا وفقط إذا كان aRb فإن bRa.
3. العلاقة R تكون ناقلة (متعدية) (Transitive) اذا وفقط إذا كان aRb و bRc فإن aRc .
4. العلاقة R تكون علاقة تكافؤ (Equivalence equation) اذا وفقط اذا كان R علاقة إنعكاسية و متماثلة وناقلة.
5. علاقة التكافؤ R تقسم المجموعة A إلى فصول تكافؤ حيث فصل تكافؤ العنصر a هو $[a] = \{x \in A: xRa\}$ وتكون مجموعة فصول التكافؤ هي A/R وهي تكون تجزئه للمجموعة A.

مثال: إذا كانت المجموعة $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ والتجزئة لها هي المجموعات:

$A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{c, d, e\}, A_3 = \{f\}$

فكون علاقة التكافؤ واكتب فصول التكافؤ لها؟

الحل:

علاقة التكافؤ هي:

$$R = \begin{Bmatrix} (a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c),(d,d),(e,e),(c,d), \\ (d,c),(c,e),(e,c),(d,e),(e,d),(f,f) \end{Bmatrix}$$

ومجموعة القسمة للـ A هي:

$A/_R = \{A_1, A_2, A_3\}$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: لنفرض ان $A = \{1, -2, 3, -4, 5\}$ والعلاقة:

$R = \{(x, y): xy > 0\}$

فاثبت ان العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ ثم كون فصول التكافؤ لهذه العلاقة ومجموعة القسمة لها.

الحل:

1. العلاقة R إنعكاسية لأن:

$(1)(1) > 0 \rightarrow 1R1,$

$(-2)(-2) > 0 \rightarrow -2R-2,$

$(3)(3) > 0 \rightarrow 3R3,$

$(-4)(-4) > 0 \rightarrow -4R-4,$

$(5)(5) > 0 \rightarrow 5R5,$

2. العلاقة R متماثلة لأن:

$1R3 \rightarrow (1)(3) > 0 \rightarrow (3)(1) > 0 \rightarrow 3R1,$

$1R5 \rightarrow (1)(5) > 0 \rightarrow (5)(1) > 0 \rightarrow 5R1,$

$3R5 \rightarrow (3)(5) > 0 \rightarrow (5)(3) > 0 \rightarrow 5R3,$

$-2R-4 \rightarrow (-2)(-4) > 0 \rightarrow (-4)(-2) > 0 \rightarrow -4R-2$

3. العلاقة R متعدية لأن:

$1R3, 3R5 \rightarrow (1)(3) > 0 \wedge (3)(5) > 0 \rightarrow (1)(5) > 0 \rightarrow 1R5$

إذن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وبالتالي فإن فصول التكافؤ هما إثنان:

$[1] = \{1, 3, 5\},$

$[-2] = \{-2, -4\}$

ومجموعة القسمة لل A هي:

$A/R = \{[1], [-2]\}$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: لنفرض ان $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ والعلاقة:

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1),$
$(3,4), (4,3), (2,5), (5,2)\}$

فهل العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وإذا كانت نعم فكون فصول التكافؤ هذه العلاقة.

الحل:

من الواضح أن العلاقة R إنعكاسية ومتناظرة ومتعدية وبالتالي فهي تمثل علاقة تكافؤ وبالتالي تكون فصول التكافؤ هي:

$$[1] = \{(1,1),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(3,4),(4,3)\}$$

$$[2] = \{(2,2),(5,5),(2,5),(5,2)\}$$

ومجموعة القسمة هي:

$$A/_R = \{[1],[2]\}$$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: ليكن $A = \mathbb{R}^2$ و R هي العلاقة المعرفة على المجموعة A بالصورة:

$$(x,y)R(x',y') \leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

فهل العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وإذا كانت الإجابة نعم فعين صفوف التكافؤ؟

الحل:

أولاً: العلاقة R هي علاقة إنعكاسية لأن دائما متحقق شرط التساوي:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \rightarrow (x,y)R(x,y)$$

ثانياً: العلاقة R علاقة تناظرية لأن :

$$(x,y)R(x',y') \leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\leftrightarrow x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \leftrightarrow (x',y')R(x,y)$$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$$(x,y)R(x',y') \wedge (x',y')R(x'',y'')$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \wedge x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$$

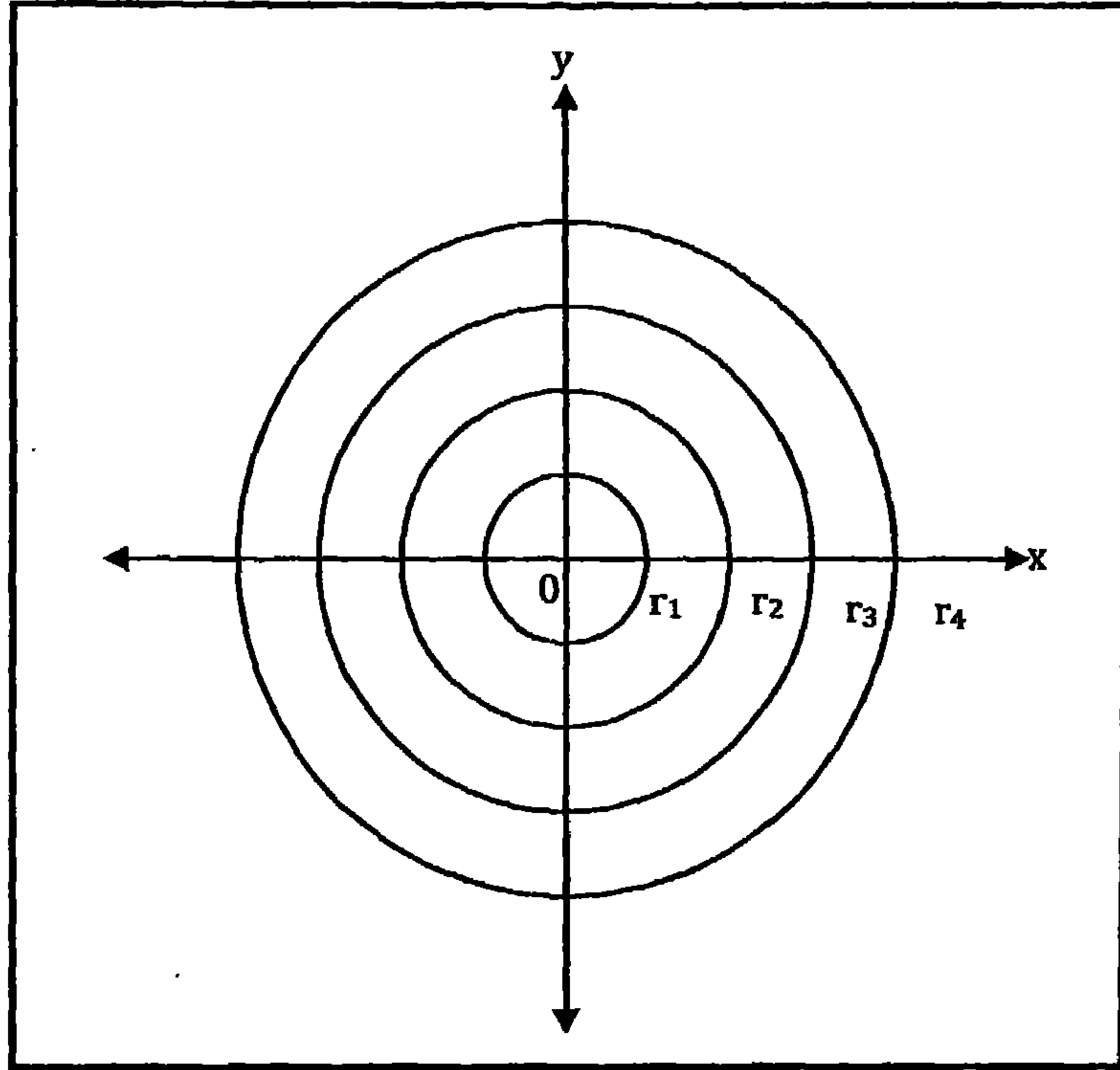
$$\rightarrow x^2 + y^2 = x''^2 + y''^2 \rightarrow (x,y)R(x'',y'')$$

رابعاً: العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ لأنها إنعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي تكون مجموعة فصول التكافؤ A/R هي:

$$[(x,y)] = \{(x',y') : x'^2 + y'^2 = r^2\}$$

وهي تمثل مجموعة الدوائر المتحدة المركز ولها نفس نصف القطر.

ويمكن وصفها بالرسم التالي:



مثال: ليكن A=ℤ و n هو عدد طبيعي لا يساوي صفر ونعرف العلاقة R بأنها:

$$xRy \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: x - y = kn \leftrightarrow \frac{x-y}{n} = k$$

أي أن العدد x مرتبط بالعدد y إذا كان طرحهما من مضاعفات العدد n أو بعبارة أخرى إذا كان لهما نفس الباقي بعد القسمة على n .

فهل العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ ،إذا كانت الإجابة نعم فعين صفوف التكافؤ؟

الحل:

أولاً: العلاقة R هي علاقة إنعكاسية لأن:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \to x - x = 0 = 0.n \to (x,x) \in R$$

ثانياً: العلاقة R علاقة تناظرية لأن:

$$(x,y) \in R \to \exists k \in \mathbb{Z}: x - y = kn$$

$$\to y - x = (-k)n, -k \in \mathbb{Z} \ \to (y,x) \in R$$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}: \ x - y = k_1 n, \qquad y - z = k_2 n$$

وبالجمع نحصل على:

$$\rightarrow \ x - z = (k_1 + k_2)n, \qquad k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow (x,z) \in R$$

رابعاً: العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ لأنها إنعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي تكون مجموعة فصول التكافؤ A/R هي

$$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{[0],[1],[2],\dots,[n-1]\}$$

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z}: xR0\} = \{x \in \mathbb{Z}: x - 0 = kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z}: x = kn, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots,-2n,-n,0,n,2n,3n,\dots\}$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z}: xR1\} = \{x \in \mathbb{Z}: x - 1 = kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z}: x = kn + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots,1-2n,1-n,1,1+n,1+2n,1+3n,\dots\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z}: xR2\} = \{x \in \mathbb{Z}: x - 2 = kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z}: x = kn + 2, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots,2-2n,2-n,2,2+n,2+2n,2+3n,\dots\}$$

ملاحظات:

1. إذا كانت n=0 فإن العلاقة R السابقة تكون على الصورة $xRy \leftrightarrow x = y$
2. إذا كان n عدد صحيح موجب لا يساوي صفر فإن المجموعة $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$ هي مجموعة البواقي لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ عند قسمتها على العدد n فمثلاً:

إذا كانت n=2 فإن

أ. الأعداد الزوجية تقبل القسمة على 2 والباقي يساوي 0 .

ب. الأعداد الفردية تقبل القسمة على 2 والباقي يساوي 1 .

وبالتالي تكون:

$$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$$

وإذا كانت n=3 فإن:

- الأعداد $\{\dots,-9,-6,-3,0,3,6,9,\dots\}$ تقبل القسمة على 3 والباقي يساوي 0 .

- الأعداد $\{\ldots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\ldots\}$ تقبل القسمة على 3 والباقي يساوي 1.
- الأعداد $\{\ldots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\ldots\}$ تقبل القسمة على 3 والباقي يساوي 2.

وبالتالي تكون:

$$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$$

وهكذا تكون:

$$\mathbb{Z}_n/n\mathbb{Z}_n = \{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$$

مثال: ناقش العلاقات الآتية من حيث كونها تمثل علاقة تكافؤ أم لا:

1. علاقة التوازي // بين المستقيمات.
2. علاقة التعامد $\perp$ بين المستقيمات.
3. علاقة أصغر من $>$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.
4. علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.
5. علاقة القاسم | على مجموعة الأعداد الصيحيحة $\mathbb{Z}^*$ التي لا تحتوي على الصفر.

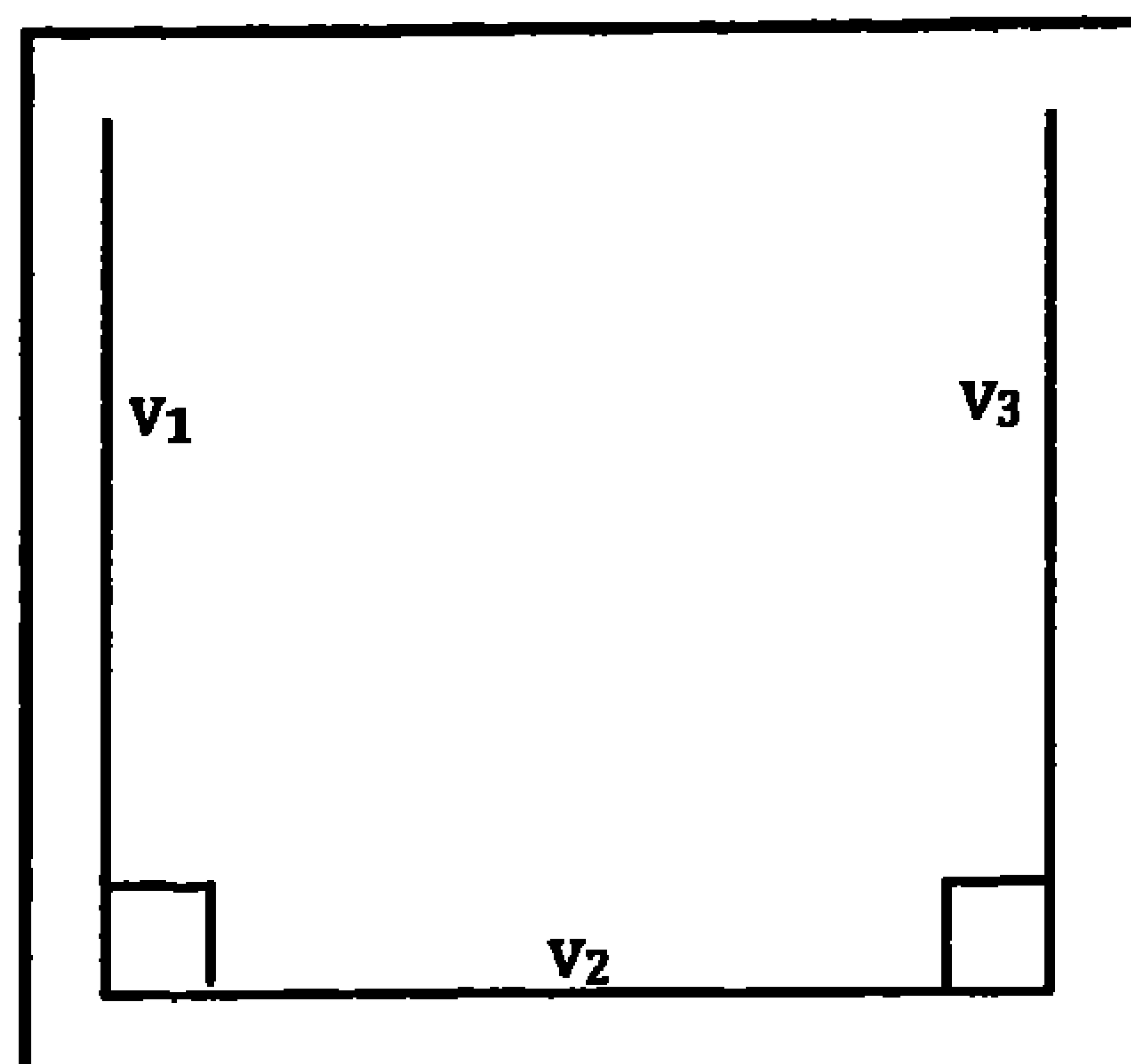
الحل:

أولاً: علاقة التوازي // بين المستقيمات:

1. إذا كان v مستقيم فإن $v//v$ وبالتالي فإن علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة إنعكاسية.
2. إذا كان $v_1//v_2$ فإن $v_2//v_1$ وبالتالي علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة تناظرية.
3. إذا كان $v_1//v_2$ و $v_2//v_3$ فإن $v_1//v_3$ وبالتالي علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة متعدية.

وبالتالي تكون علاقة التوازي بين المستقيمات علاقة تكافؤ.

ثانياً: علاقة التعامد $\perp$ بين المستقيمات علاقة غير إنعكاسية لأنه لا يوجد مستقيم يتعامد مع نفسه وبالتالي فإن علاقة التعامد $\perp$ بين المستقيمات لا تمثل علاقة تكافؤ. وعلاقة التعامد تناظرية لأنه إذا كان $v_1 \perp v_2$ فإن $v_2 \perp v_1$ ولكن علاقة التعامد بين المستقيمات علاقة غير متعدية لأن إذا كان $v_1 \perp v_2,\ v_2 \perp v_3$ فإن ليس صحيح أن يكون $v_1 \perp v_3$ ويمكن توضيح ذلك هندسيا كما يلي:



ثالثاً: علاقة أصغر من $>$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ علاقة ليست إنعكاسية لأن $x \nless x$ وليست تناظرية لأنه إذا كان $x < y$ فإن $y \nless x$.

رابعاً: علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي علاقة إنعكاسية ومتعدية ولكنها غير تناظرية (علاقة تخالفية) وبالتالي فالعلاقة لا تمثل علاقة تكافؤ.

خامساً: علاقة القاسم | على مجموعة الأعداد الصيحيحة $\mathbb{Z}^*$ التي لا تحتوي على الصفر:

1. علاقة يقسم هي علاقة إنعكاسية لأن أي عدد صحيح يقبل القسمة على نفسه أي يكون دائما $x|x$.
2. علاقة يقسم هي علاقة غير تناظرية لأن العدد 2 يقسم العدد 6 ولكن العكس غير صحيح وبالتالي فالعلاقة لا تمثل علاقة تكافؤ.
3. علاقة يقسم هي علاقة متعدية لأن إذا كان العدد x يقسم العدد y وكان العدد y يقسم العدد z فإن العدد x يقسم العدد z .

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,...,12\}$ وكانت العلاقة R تعطى بـ:

$$xRy \leftrightarrow x \equiv y(3) \leftrightarrow \frac{x-y}{3} = k \leftrightarrow x = y + 3k, k \in \mathbb{Z}$$

إكتب صفوف التكافؤ ومجموعة حاصل القسمة A/R .

الحل:

فصول التكافؤ هم:

$$[1] = \{1,4,7,10\}, \quad [2] = \{2,5,8,11\}, \quad [3] = \{3,6,9,12\}$$

وبالتالي فإن مجموعة حاصل القسمة هي:

$A/R = \{[1],[2],[3]\}$

وهي تمثل تجزئة للمجموعة A .

مثال: إذا عرفنا العلاقة R على مجموعة الأعداد الحقيقية التي لا تحتوي الصفر $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ على النحو التالي:

$xRy \leftrightarrow xy > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}^*$

- فإثبت أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ ثم إكتب صفوف التكافؤ ومجموعة حاصل القسمة $\mathbb{R}^*/R$

الحل:

أولاً: لإثبات أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ:

1. العلاقة R هي علاقة إنعكاسية لأن دائما يكون $x^2 > 0$ وبالتالي xRx
2. العلاقة R هي علاقة تناظرية لأنه إذا كان xRy فإن $xy > 0$ وبالتالي $yx > 0$ وبالتالي yRx
3. العلاقة R هي علاقة متعدية لأنه إذا كان xRy, yRz فإن $xy > 0, yz > 0$ فإن $xy^2z > 0,$ وبالتالي $xz > 0$ وبالتالي xRz.

ثانياً: لتعين صفوف التكافؤ:

$$[1] = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge xR1\} = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x.1 > 0\}$$
$$= \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

$$[-1] = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge xR-1\} = \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x.-1 > 0\}$$
$$= \{x: x \in \mathbb{R}^* \wedge x < 0\} = \mathbb{R}^-$$

مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

ثالثاً: مجموعة حاصل القسمة $\mathbb{R}^*/R$ هي:

$$\mathbb{R}^*/_R = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$$

حيث $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \varphi$

تمارين

1. بين ما هل العلاقات التالية تمثل علاقة تكافؤ على$\mathbb{Z}$:

- $xRy \leftrightarrow x|y \wedge y|x$
- $xRy \leftrightarrow x + y < 5$
- $xRy \leftrightarrow |x| = |y|$
- $xRy \leftrightarrow y = x + 1$

2. في المجموعة $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ إعتبر العلاقة:

$xRy \leftrightarrow 3|(x - y)$

برهن أن العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ وأكتب صفوف التكافؤ.

3. إثبت أن العلاقات التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ تمثل علاقات تكافؤ:

- $(a, b)R(c, d) \leftrightarrow a + b = c + d$
- $(a, b)R(c, d) \leftrightarrow b - a = d - c$

4. لتكن المجموعات:

$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad B = \{2, 3, 5\}$

ولتكن لدينا العلاقة R المعرفه بـ:

$R = \{(a, b): a \in A, b \in B, \quad a < b\}$

- إكتب عناصر R .
- فإكتب مجموعة تعريف R وكذلك مدى R ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إكتب عناصر R^{-1} .
- فإكتب مجموعة تعريف R^{-1} وكذلك مدى R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.

5. إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,5,7,8\}$ فأجب عما يلي:

- إكتب عناصر كلا من $B \times A, A \times B$.

- إذا كانت $R=\{(1,3), (1,5), (2,7), (2,8)\}$ فهل R تمثل علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل؟ وإذا كانت الإجابة نعم فإكتب مجموعة تعريف R وكذلك مدى R ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إذا كانت R كما وردت في الفقرة ب فإكتب عناصر R^{-1} وهل العلاقة R^{-1} علاقة ثنائية من B إلى A؟ ولماذا؟ وإذا كان الجواب نعم فأوجد كلاً من مجموعة تعريف ومدى العلاقة R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إذا كانت $R=\{(2,5), (3,4),(4,5)\}$ فهل العلاقة R تمثل علاقة ثنائية من A إلى B ؟ ولماذا؟ وهل R تمثل علاقة ثنائية من B إلى A مع التعليل؟ وهل R تمثل علاقة ثنائية على A ؟ ولماذا؟ وهل R تمثل علاقة ثنائية على B مع التعليل؟
- إذا كانت $R=A\times B$ فهل R علاقة ثنائية من A إلى B ؟ وإذا كان الجواب نعم فعين كلاً من مجموعة تعريف R ومدها ثم إكتب عناصر R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني؟ وهل $R^{-1}=B\times A$ ؟
- إذا كانت $R\subseteq A\times B$ فإكتب عناصر كلاً من R, R^{-1} في الحالات الآتية:

- $xRy \leftrightarrow x = y - 5$
- $xRy \leftrightarrow x = y$
- $xRy \leftrightarrow x > y$
- $xRy \leftrightarrow x = y + 5$

- أكمل ما يلي:

- $R = \{(x,y): x = 2 \wedge y \in B\} = \{ \dots \}$
- $R = \{(x,y): x \in A \wedge y \geq x \wedge y \in B \} = \{\dots\}$
- $R = \{(x,y): x \in B \wedge y \in A \wedge x - 7y > 0\} = \{\dots\}$
- $R = \{(x,y): x \in B \wedge y \in A \wedge x + 2y = 0\} = \{\dots\}$

- كم عدد العلاقات الثنائية المختلفة التي يمكن تكوينها من A إلى B ؟ وكذلك من B إلى A؟

6. إذا كانت $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية فارسم الشكل الذي يمثله العلاقة R في المستوى $\mathbb{R}^2$ في الحالات الآتية:

- $R=\left\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge y^2=x\right\}$
- $R=\left\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge y<2-x\right\}$
- $R=\left\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge x^2+y^2<4\right\}$
- $R=\left\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge x^2+y^2\geq 4\right\}$
- $R=\left\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge x^2+4y^2=4\right\}$

7. إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ فادرس كلاً من العلاقات الآتية في A من كونها إنعكاسية – متناظرية – متعدية – متخالفة – علاقة تكافؤ:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
- $R_2=R_1-\{(5,5)\}$
- $R_3=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
- $R_4=R_3\cup\{(2,2)\}$
- $R_5=\{(2,6)\}$
- $R_6=\{(1,5),(5,1)\}$
- $R_7=\{(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)\}$
- $R_8=A\times A$

8. إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ وعرفنا العلاقات الآتية على A كما يلي:

- $R_1=\{(1,2),(2,2)\}$
- $R_2=\{(3,3)\}$

- $R_3 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(2,1)\}$
- $R_4 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(2,1)\}$
- $R_4\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
  - فهل العلاقة R إنعكاسية ؟
  - فهل العلاقة R متناظرة ؟
  - فهل العلاقة R متعدية ؟
  - مثل العلاقة R بالمخطط السهمي؟
  - مثل العلاقة R بالجدول؟

9. إذا كانت $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وعرفنا العلاقة R عليها بـ:

$xRy \leftrightarrow x + 2y = 12, \quad x,y \in \mathbb{Z}^+$

فأوجد كلاً من المجموعات الأتية:

- R
- مجموعة تعريف R
- مدى R
- R^{-1}
- مثل R بالمخطط السهمي وبيانيا.
- مثل R^{-1} بالمخطط السهمي وبيانيا.

10. إذا كانت A={0,1,2,3,...,20} وعرفنا على A العلاقة R على النحو التالي: aRb لكل a,b∈A إذا وفقط إذا كان باقي قسمة a على 6 يساوي باقي قسمة b على 6 فإثبت أن R تمثل علاقة تكافؤ على A ومن ثم أوجد صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة $\mathbb{R}$.

11. إذا كانت $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة وكانت R علاقة معرفه فيها على النحو التالي:

$\forall x,y \in \mathbb{Z}: \exists q \in \mathbb{Z}, xRy \leftrightarrow x - y = 5q$

فإثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$ ومن ثم عين صفوف التكافؤ.

12. إذا كانت A={1,2,3,4,5,6,7} وكانت R علاقة معرفة على A كما يلي:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),$

$(2,4),(4,2),(2,7),(7,2),(4,7),(7,4),(5,6),(6,5)\}$

فإثبت أن R علاقة تكافؤ على A ومن ثم اوجد صفوف التكافؤ.

13. لتكن المجموعات

$B = \{a \in \mathbb{Z}: 1 < a \leq 12\}, \qquad A = \{2, 3, 6, 8\}$

ولتكن لدينا العلاقة R المعرفه ب

$R = \{(a, b): a \in A, b \in B, \qquad a|b\}$

(الرمز | يعني يقسم)

- إكتب عناصر R .
- فإكتب مجموعة تعريف R وكذلك مدى R ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.
- إكتب عناصر R^{-1} .
- فإكتب مجموعة تعريف R^{-1} وكذلك مدى R^{-1} ومثلها بالمخطط السهمي والبياني.

14. لتكن لدينا المجموعة

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ولتكن لدينا العلاقة R المعرفه بـ:

$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 5)\}$

- إكتب عناصر R^{-1} .
- إكتب عناصر $R \circ R$
- إكتب عناصر $R^{-1} \circ R$

15. إذا كانت R_1, R_2 علاقتان من المجموعة A إلى المجموعة B فإثبت أن:

- $Dom(R_1 \cup R_2) = Dom\, R_1 \cup Dom\, R_2$
- $Ran(R_1 \cup R_2) = Ran\, R_1 \cup Ran\, R_2$
- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
- $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

الفصل الخامس

الدوال

Functions

(5-1) الدوال

(5-2) الصورة والصورة العكسية

(5-3) العمليات الحسابية على الدوال

(5-4) تركيب الدوال

(5-5) أنواع الدوال

(5-5-1) الدالة المتباينة

(5-5-2) الدالة الشاملة

(5-5-3) الدالة المتقابلة

تمارين

الفصل الخامس

الدوال

(5-1) الدوال

لقد درسنا في الفصل الرابع مفهوم العلاقة الثنائية على إنها مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكرتيزي $A\times B$ وفي هذا الفصل سوف ندرس نوع خاص من العلاقة الثنائية يسمى الدالة (functions) أو التطبيق (mapping) وتعتبر الدوال من أهم البنى الرياضية والأكثر استخدما في جميع العلوم النظرية والتطبيقية.

تعريف (5.1.1): إذا كانت X, Y مجموعتين غير خاليتين و $A\subseteq X$ وكانت f علاقة ثنائية من A إلى Y تحقق الشرطين التالين:

1. $\forall x \in A \exists y \in Y: (x,y) \in f$
2. $(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \to y_1 = y_2$

فإن الثلاثي (f, A, Y) يسمى دالة من A إلى Y.

ملاحظات:

1. لتعين دالة يلزمنا ثلاث عناصر وهي:
   أ. مجموعة غير خالية X تسمى المنطلق .
   ب. مجموعة غير خالية Y تسمى المستقر (Codomain) .
   ج. قاعدة (قانون) نستطيع بها ربط كل عنصر من عناصر X بعنصر وحيد y من عناصر Y حيث $y = f(x)$ يسمى صورة x بواسطة f .
2. مجموعة تعريف العلاقة f هي:

$$Dom(f) = \{x \in A: \exists y \in Y \wedge (x,y) \in f\} = A$$

تسمى النطاق أو المجال (Domain) ودائماً يكون $Dom(f) = A \subseteq X$.

3. المجموعة الجزئية من Y المتكونة من جميع صور النطاق A تسمى المدى (Range) ونرمز لها بالرمز R(f) ودائماً يكون $R(f) \subseteq Y$.
4. الدالة أو الإقتران أو التطبيق أو الراسم (mapping) هي عبارات لها نفس المعنى وعادة نفضل إستخدام لفظ الدالة وأيضاً نستخدم الرمز $f: X \to Y$ بدلاً من (f, X, Y) ونكتب y=f(x) بدلاً من $(x, y) \in f$ وفي هذه الحالة x تسمى المتغير المستقل و y تسمى المتغير التابع.
5. نقول عن الدالتان f, g إنهما متساويان ونكتب f=g إذا تحققت الشروط التالية:
   أ. مجموعة تعريف f = مجموعة تعريف g .
   ب. مستقر f = مستقر g .
   ج. لجميع العناصر $x \in A$ فإن $f(x) = g(x)$ حيث A هي مجموعة تعريف كلاً من f, g .
6. مجموعة الأزواج المرتبة $f = \{(x, y): x \in X, f(x) = y\}$ تسمى بيان الدالة.
7. إذا كانت X, Y مجموعتان فإننا نرمز إلى المجموعة التي عناصرها جميع الدوال من X إلى Y بالرمز Y^X.
8. العلاقة الثنائية قد تربط عنصر من المجموعة X بأكثر من عنصر من المجموعة Y وهذا الكلام لا يتحقق بالنسبة للدوال.
9. العلاقة الثنائية قد لا تربط عنصر ما من عناصر المجموعة X بأي عنصر من عناصر المجموعة Y وهذا الكلام لا يتحقق بالنسبة للدوال.
10. كل دالة تمثل علاقة ثنائية ولكن العكس ليس ضروري أن يتحقق.
11. لقد إستخدمنا المصطلحات الأتية: المنطلق و المستقر و النطاق والمدى ولبيان الفرق بينهما نعطي المثال التالي:

مثال: لتكن لدينا الدالة

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

والمعرفة ب:

$$f(x) = \sqrt{x - 3}$$

فإحسب كلاً من المنطلق – المستقر – النطاق – المدى.

الحل:

فإن: المنطلق = $\mathbb{R}$

المستقر = $\mathbb{R}$

النطاق = $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 3\}$

المدى = $R(f) = \mathbb{R}^+$

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ فحدد مـدى الدالـة $f: X \to Y$ في كل حالة مما يأتي ثم إرسم مخططا سهميا يمثل كل دالة على حده:

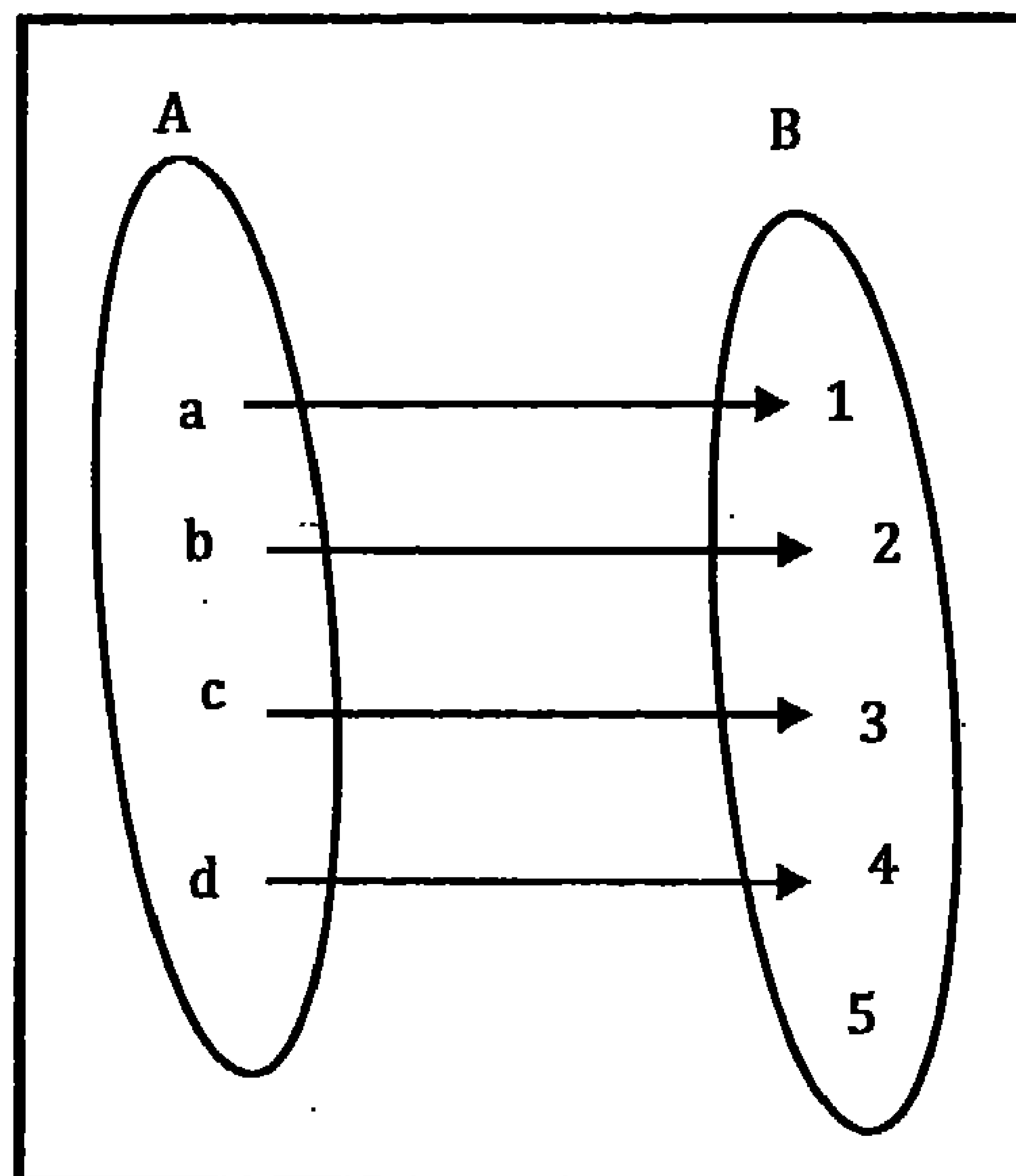
1. $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$

2. $f_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2)\}$

3. $f_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$

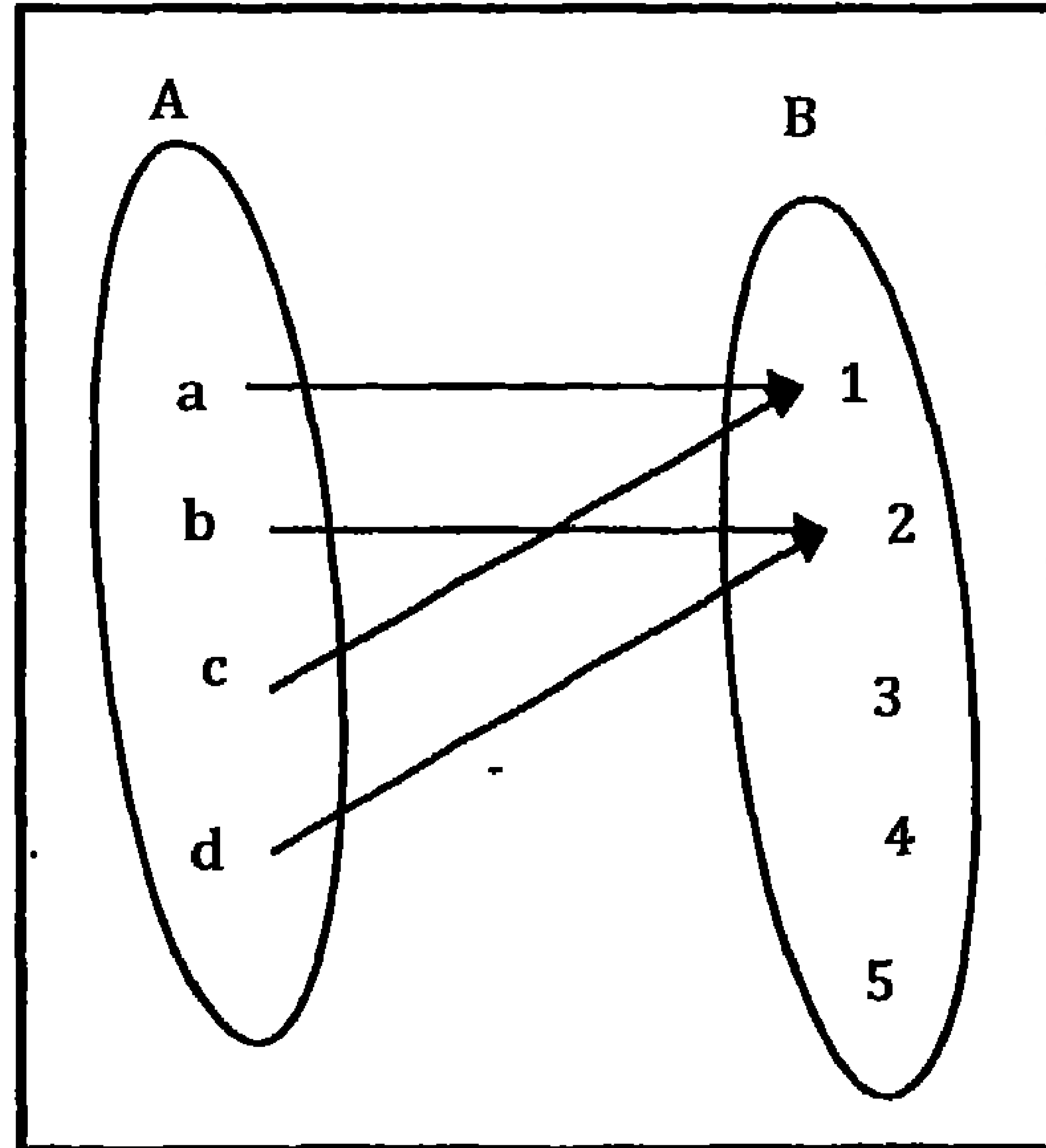
الحل:

أولاً:



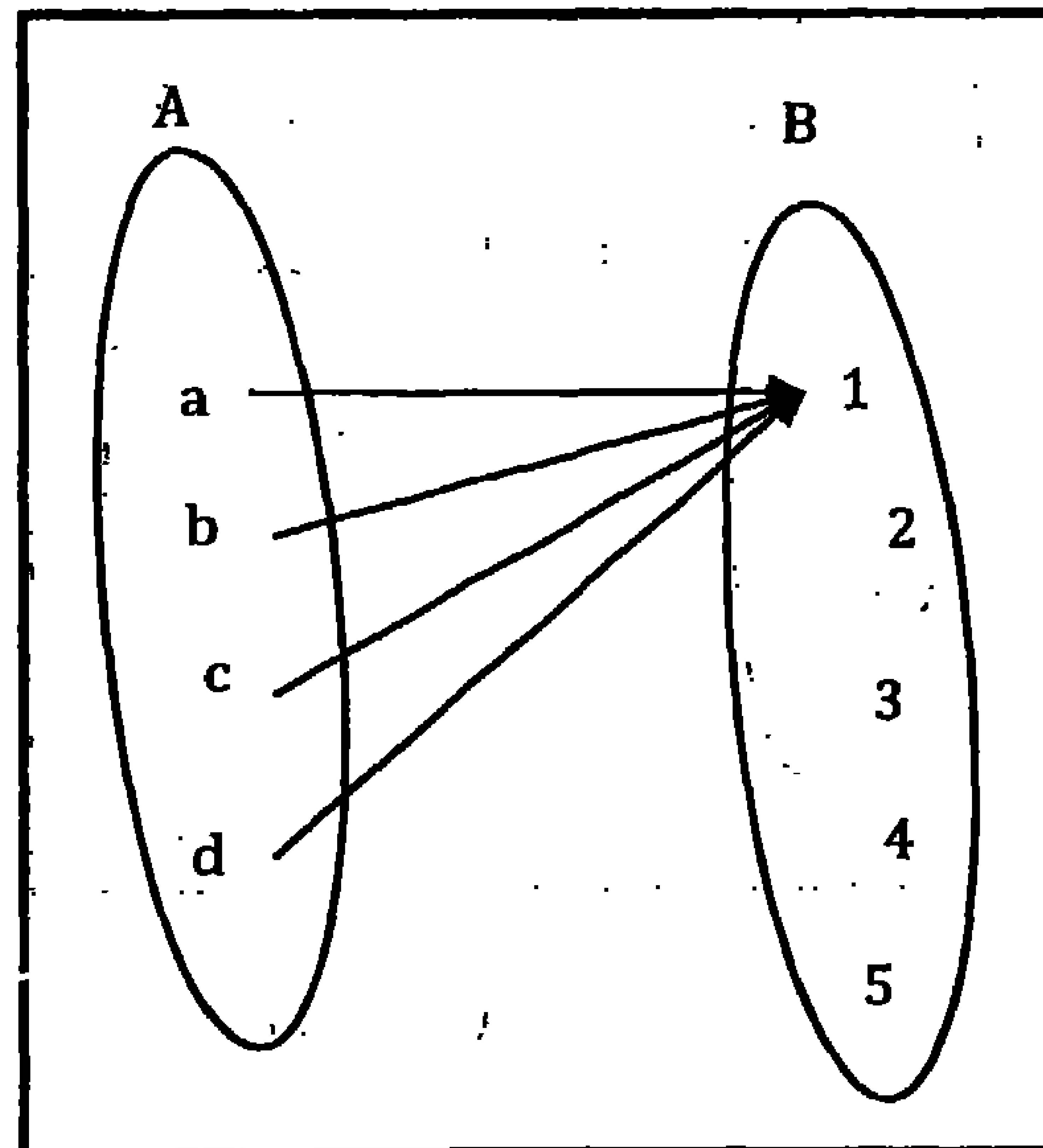
مدى الدالة f_1 هو $R(f_1) = \{1, 2, 3, 4\} \subset B$

ثانياً:



مدى الدالة f_2 هو $R(f_2) = \{1,2\} \subset B$

ثالثاً:



مدى الدالة f_3 هو $R(f_3) = \{1\} \subset B$

مثال: إذا كانت $A = \{0,1,2,3\}$ و $B = \{0,2,3,4,5\}$ و $f: A \to B$

حيث $f(x) = x + 2$ فأوجد:

1. مدى الدالة f.
2. بيان الدالة f.

الحل:

f(0)=2, f(1)=3, f(2)=4, f(3)=5

المدى هو:

$R(f) = \{2,3,4,5\}$

وبيان الدالة هو:

$f = \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5)\}$

مثال: إذا كانت f دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى المجموعة {1 ,0 ,1-} المعرفة بالشكل:

$f(x) = (-1)^x$

فأوجد:

1. مدى الدالة f.
2. بيان الدالة f.

الحل:

إذا كانت x عدد زوجي فإن $f(x) = 1$ بينما إذا كانت x عدد فردي فإن $f(x) = -1$

وبالتالي يكون مدى الدالة f هو R(f)={-1, 1}

وبيان الدالة هو:

$f = \{(x,1): x \text{ even}\} \cup \{(x,-1): x \text{ odd}\}$

مثال: إذا كانت f الدالة المعرفة على المجموعة $A = \{0, 1,2,3,4,5\}$ المعرفة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ if } x \text{ is even} \\ x^2 \text{ if } x \text{ is odd} \end{cases}$$

فأوجد:

1. مدى الدالة f .
2. بيان الدالة f.

الحل:

إذا كانت x عدد زوجي فإن:

$$f(x) = x \Rightarrow f(0) = 0, f(2) = 2, f(4) = 4$$

بينما إذا كانت x عدد فردي فإن:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f(1) = 1, f(3) = 9, f(5) = 25$$

وبالتالي يكون مدى الدالة f هو:

$$R(f) = \{0, 1, 2, 4, 9, 25\}$$

وبيان الدالة هو:

$$f = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,9), (4,4), (5,25)\}$$

مثال: إعتبر العلاقة f من المجموعة $A = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2)\}$ إلى المجموعة $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ المعرفه بالشكل:

$$f(x, y) = x + y$$

فحدد مدى الدالة f

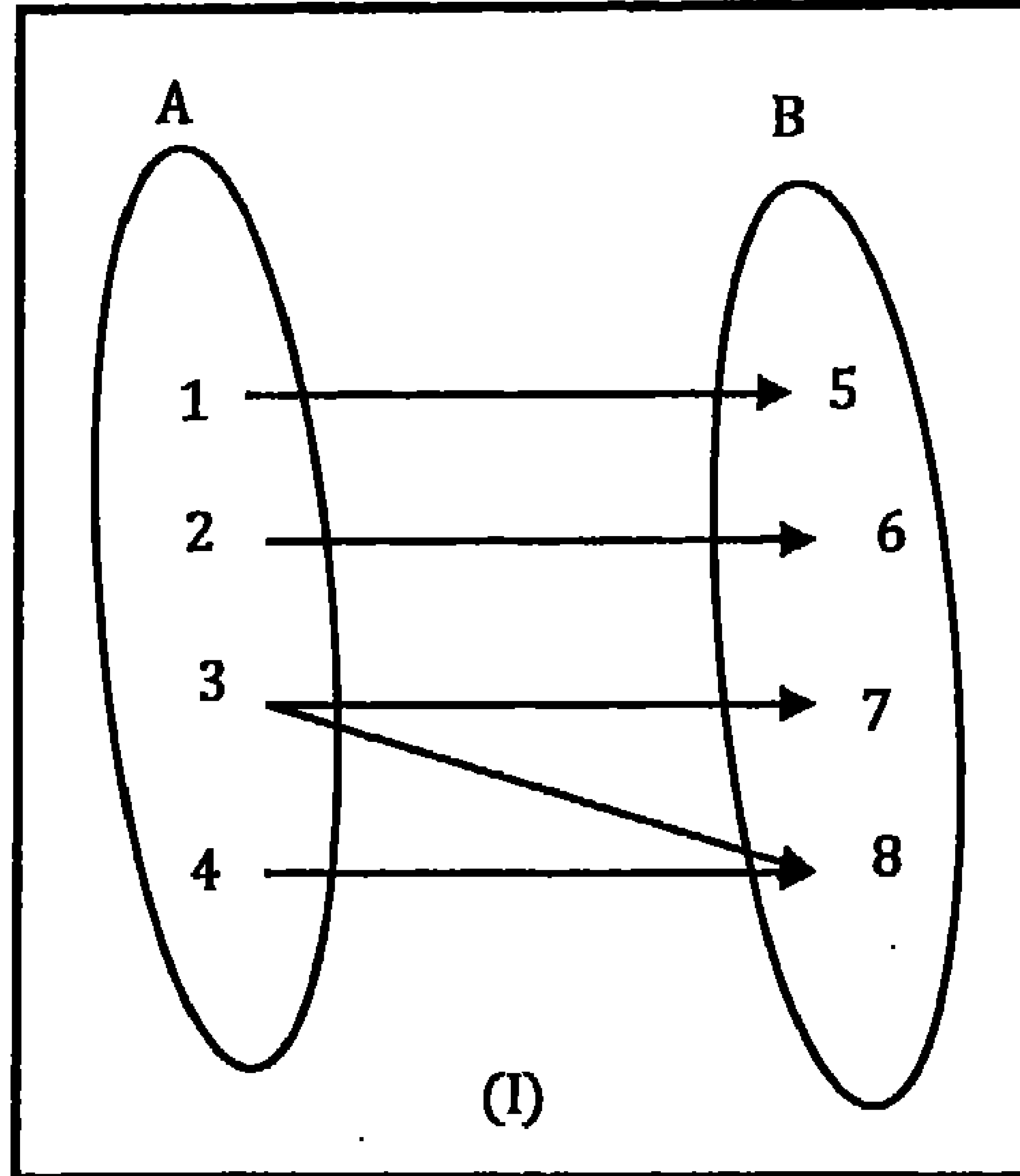
الحل:

f(0, 1)=1, f(0, 2)=2, f(0, 3)=3, f(1, 2)=3

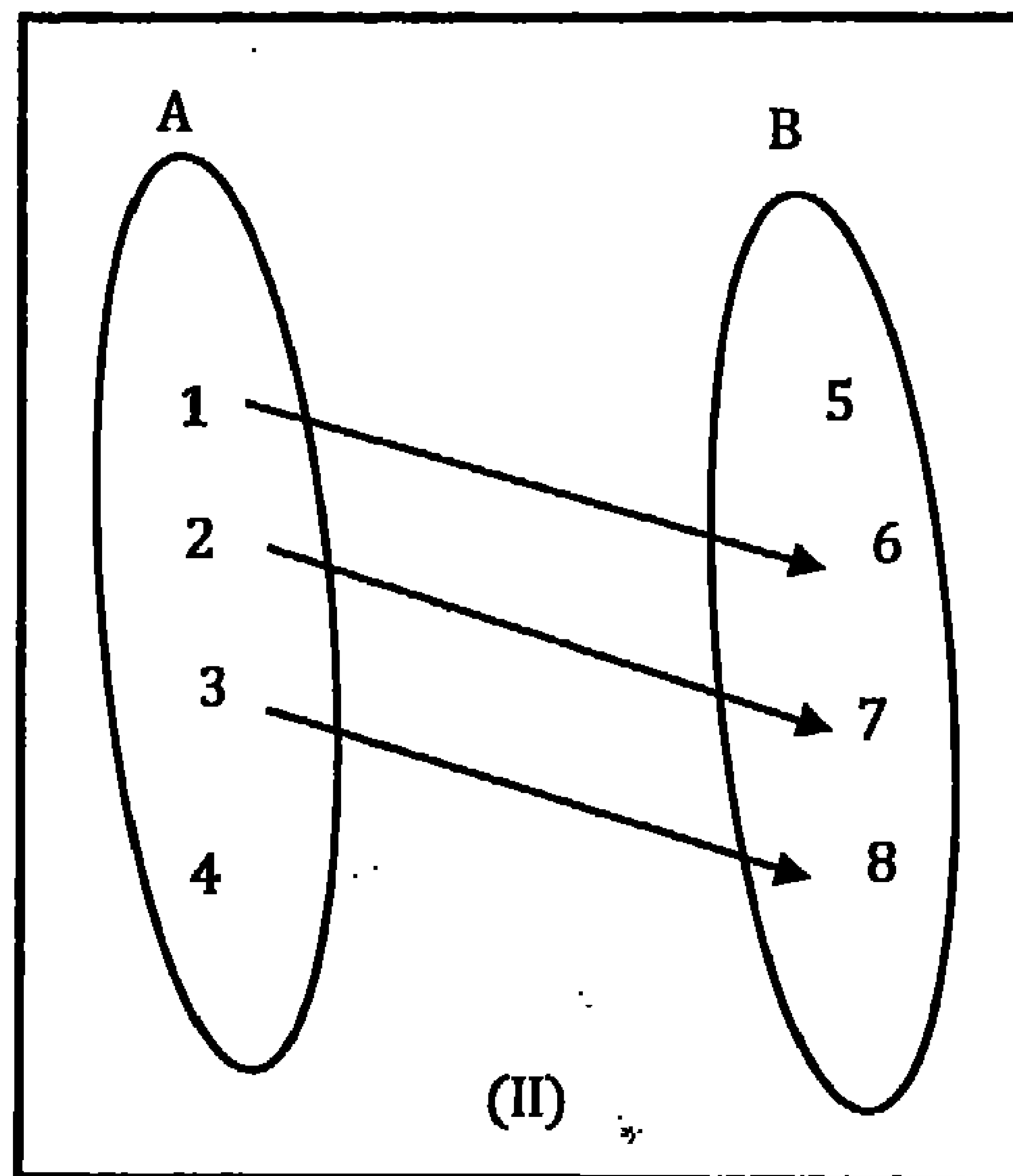
مدى الدالة هو:

$$R(f) = \{1, 2, 3\}$$

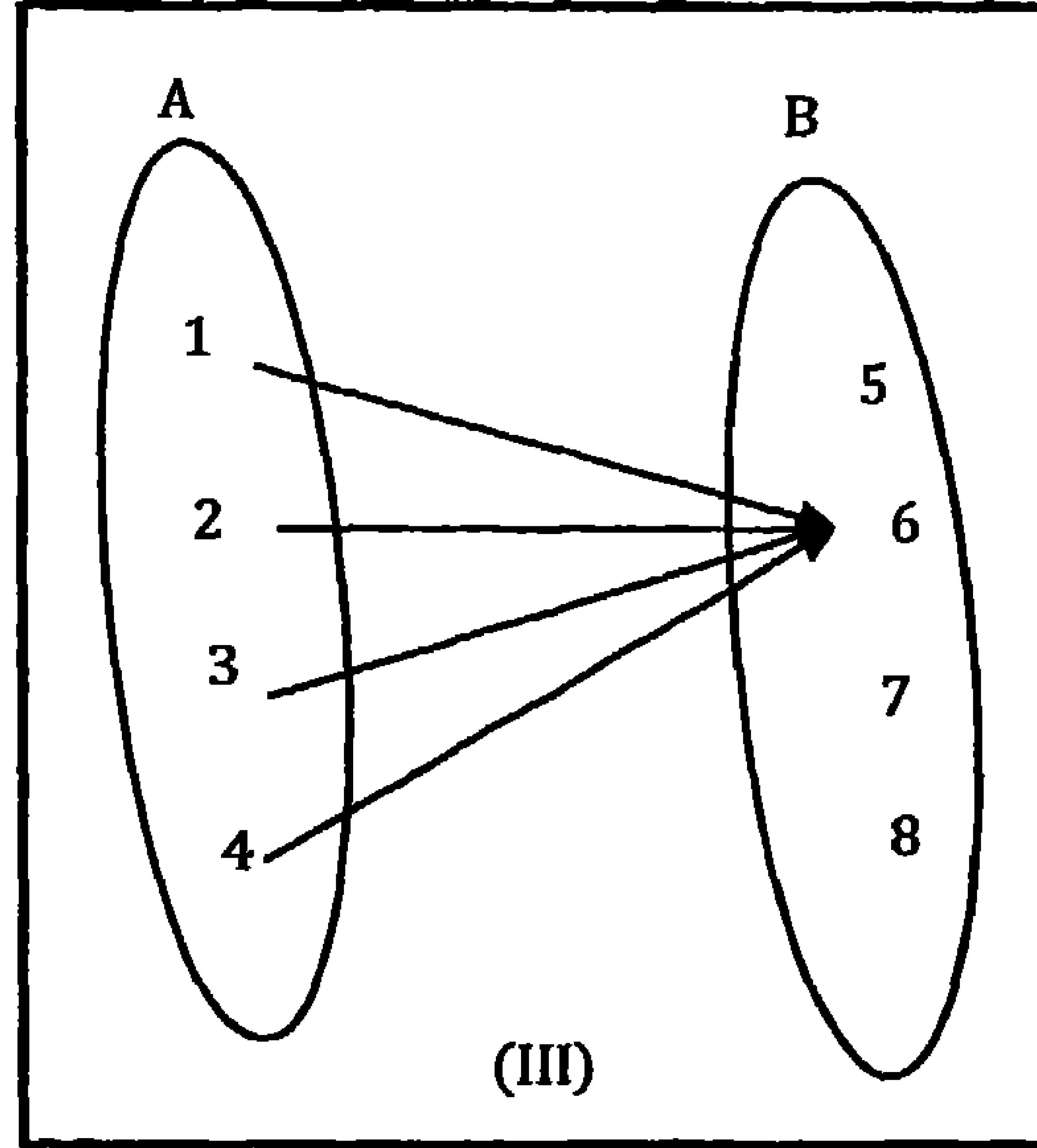
مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{5,6,7,8\}$ فأي من المخططات السهمية الأتيـة يمثل دالة وأيها لا يمثل مع التعليل؟



(I)



(II)



الحل:

الحالة الأولى: العلاقة الأولى لا تمثل دالة لأن $3 \in A$ مرتبط بعنصرين مختلفين من عناصر المجموعة B وهما 8 و 7 وهذا يخالف تعريف الدالة.

الحالة الثانية: العلاقة الثاني لا تمثل دالة لأن $4 \in A$ لم يرتبط بأي عنصر من عناصر المجموعة B وهذا يخالف تعريف الدالة.

الحالة الثالثة: تمثل دالة.

مثال: في المثال السابق إذا عكسنا إتجاة الأسهم في المخططات الثلاث فإن كلا منها لا يمثل دالة من B إلى A فما هو السبب؟

الحل:

الحالة الأولى: العنصر $8 \in B$ مرتبط بعنصرين مختلفين من A وهما 4 , 3.

الحالة الثانية: العنصر $5 \in B$ لم يرتبط بأي عنصر من A .

الحالة الثالثة: العنصر $6 \in B$ مرتبط بأكثر من عنصر من A وهما 4 ,3 ,2 ,1.

ملاحظة: هناك بعض الدوال تعتبر من الدوال الشهيرة ومنها:

أولاً: الدالة المحايدة $I_x: X \to X$ وتعرف بـ:

$$\forall x \in X \Rightarrow I_x(x) = x$$

ثانياً: الدالة الثابتة $f: X \to Y$ وتعرف بـ:

$$\forall x \in X \Rightarrow f(x) = y_0 \quad , \quad y_0 \in Y$$

وفي هذه الحالة المدى هو $R(f) = \{y_0\}$

ثالثاً: الدالة المميزة:

$$\varkappa_A: X \to \{0,1\}$$

وتعرف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A' \end{cases}$$

رابعاً: دالة الإحتواء:

$$i: X \to Y, \qquad X \subseteq Y$$

وتعرف بـ:

$$\forall x \in X \Rightarrow i(x) = x$$

خامساً: دالة الإسقاط في الموضع k :

$$\pi_k: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_k, \qquad 1 \leq k \leq n$$

وتعرف بـ:

$$\pi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k$$

سادساً: دالة مقصور f على A :

إذا كانت:

$$f: X \to Y, \qquad g = A \to B, \qquad A \subset X, \qquad B \subset Y$$

فإن:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = g(x)$$

وفي هذه الحالة تسمى الدالة g مقصور f على A بينما الدالة f تسمى إمتداد g على X .

مبرهنه (5.1.2): إذا كانت X مجموعة تحتوي على m عنصر و كانت Y مجموعة تحتوي على n عنصر فإن مجموعة الدوال من X إلى Y والتي يرمز لها بالرمز Y^X تحتوي على n^m عنصر.

البرهان:

نفرض أن $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

وبما أن عدد عناصر المجموعة Y هو n فإن كل عنصر من عناصر المجموعة X يمكن أن يرتبط بأي عنصر من عناصر المجموعة Y بعدد m طريقة

إذن عدد الطرق التي يمكن أن نربط بها عناصر المجموعة X بعناصر المجموعة Y هو:

$$\underbrace{n.n.n \dots n.n}_{\text{m من المرات}} = n^m$$

مثال: لتكن X مجموعة تحتوي على 5 عناصر و Y مجموعة تحتوي على عنصرين فكم عدد الدوال الممكنة من X إلى Y .

الحل:

عدد الدوال الممكنة من X إلى Y يساوي n^m حيث m عدد عناصر المجموعة X و n هو عدد عناصر المجموعة Y وبوضع m=5 و n=2 وبالتالي نحصل على العدد 32 .

(5-2) الصورة والصورة العكسية

تعريف (5.2.1): لتكن $f: X \to Y$ دالة وكانت $A \subseteq X, B \subseteq Y$ فإن:

1. المجموعة التي تتكون من صور جميع عناصر A تشكل مجموعة جزئية من Y نسميها صورة A بواسطة f ونرمز لها بالرمز f(A) حيث

$$f(A) = \{y \in Y: y = f(x), x \in A\}$$

2. المجموعة التي تتكون من جميع عناصر X والتي تنتمي صورها إلى B تشكل مجموعة جزئية من X نسميها الصورة العكسية للمجموعة B بواسطة f ونرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$ حيث

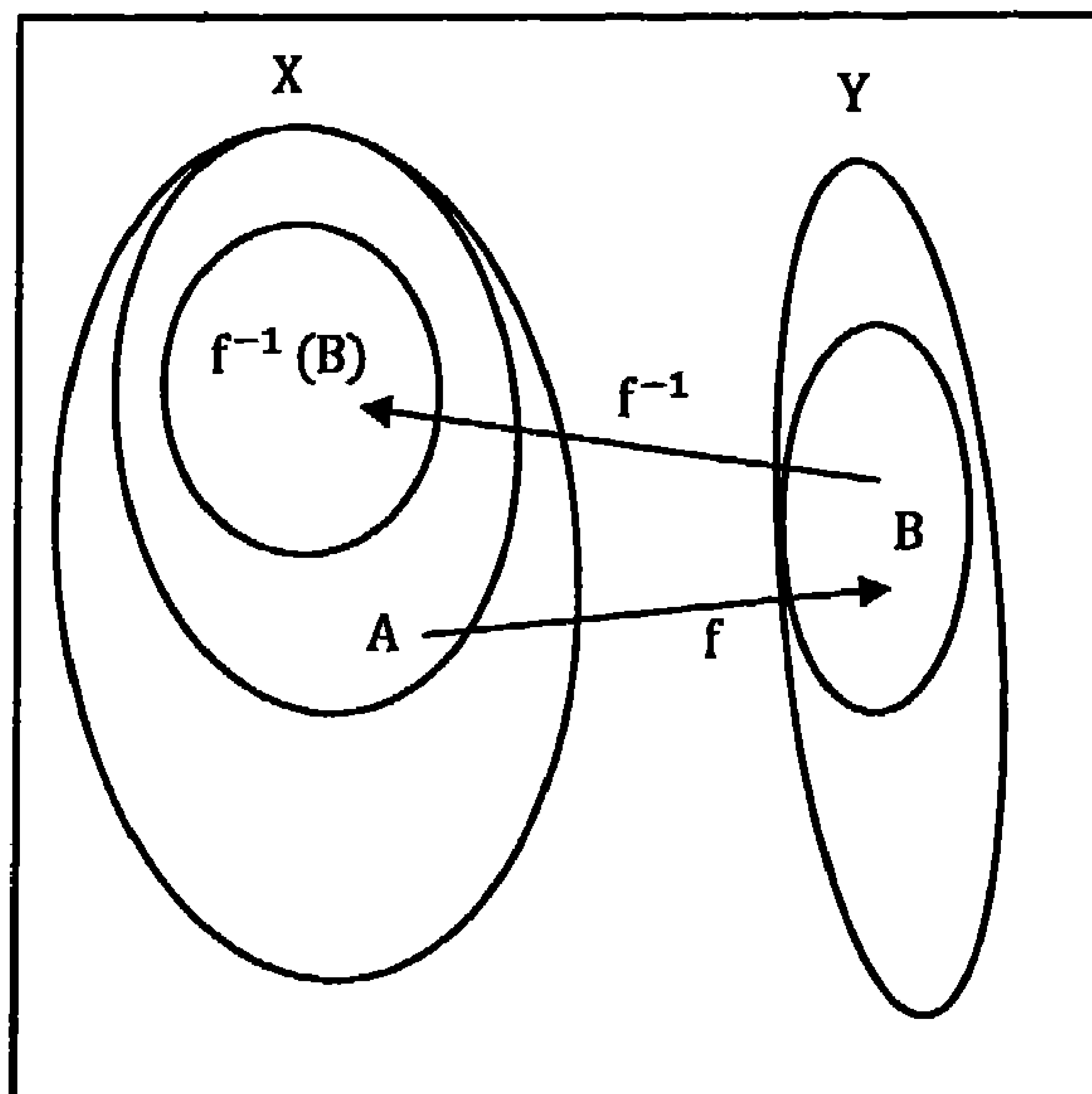
$$f^{-1}(B) = \{x \in X: y = f(x), y \in B\}$$

3. الصورة العكسية للعنصر y هي:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A: y = f(x)\}$$

ملاحظة:

يمكن توضيح الصورة والصورة العكسية بالرسم التوضيحي كما يلي:



مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{5, 10\}$ وإذا كانت الدالة f معرفة بـ:

$f = \{(1,5), (2,10), (3,5)\}$

فإن العلاقة العكسية:

$f^{-1} = \{(5,1), (10,2), (5,3)\}$

لا تمثل دالة عكسية لأن العنصر 5 مرتبط بعنصرين 1و 3 .

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{5, 10, 11\}$ وإذا كانت الدالة f معرفة بـ:

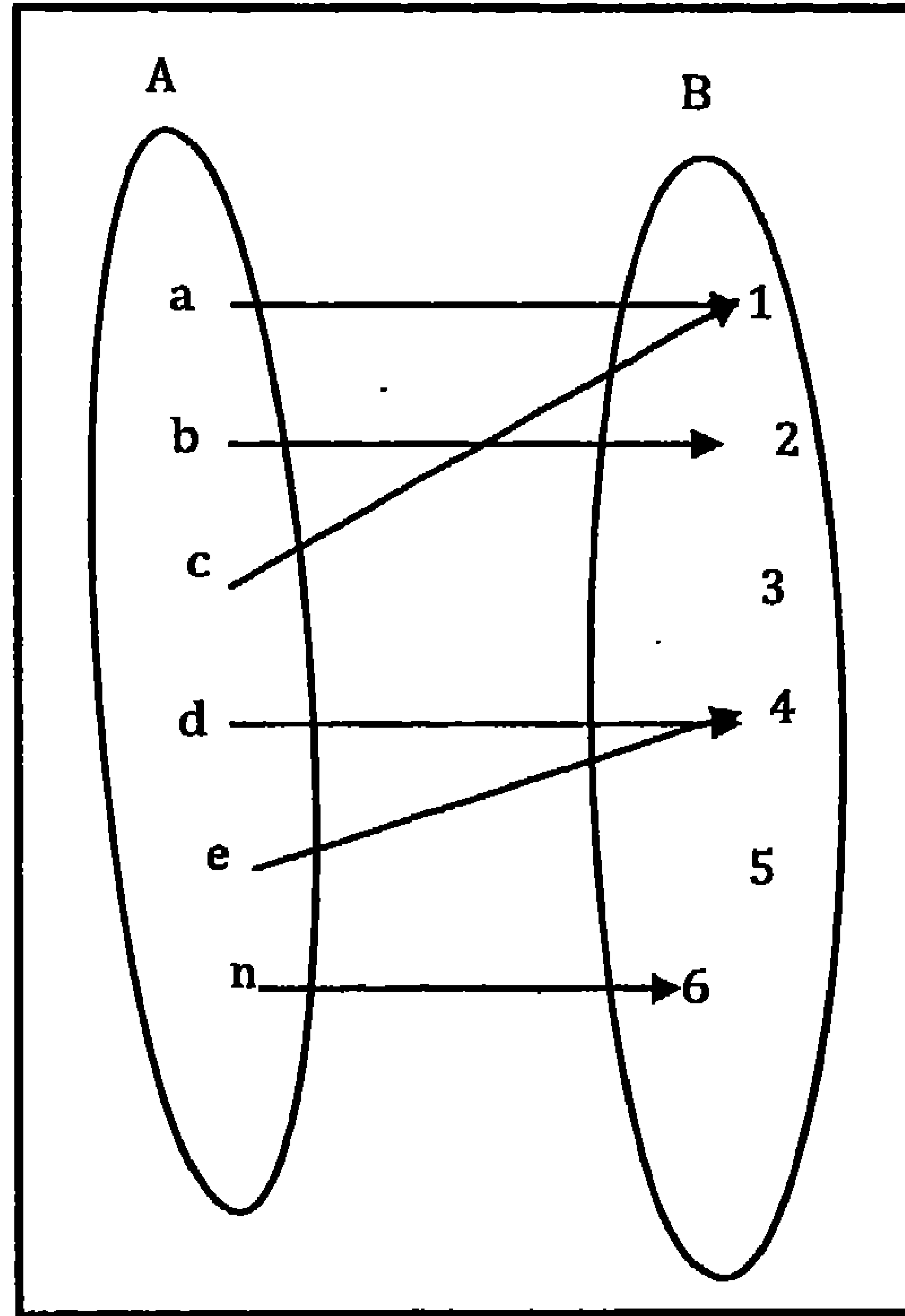
$f = \{(1,5), (2,10), (3,11)\}$

فإن العلاقة العكسية:

$f^{-1} = \{(5,1), (10,2), (11,3)\}$

تمثل دالة عكسية.

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e, n\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وكانت الدالة $f: A \to B$ المعرف بالمخطط السهمي:



فإذا كانت $A_1, A_2 \subseteq A$ و $B_1, B_2 \subseteq B$ حيث:

$A_1 = \{a, b, d\}, A_2 = \{c, d, e\}, B_1 = \{1, 2, 3\}, B_2 = \{2, 4, 5\}$

فإحسب ما يلي:

1. $f(d)$
2. $f^{-1}(1)$
3. $f^{-1}(5)$
4. $f^{-1}(B_1)$
5. $f(A_1)$
6. $f(A)$

7. $f(A_1 \cup A_2)$
8. $f(A_1) \cup f(A_2)$
9. $f(A_1 \cap A_2)$
10. $f(A_1) \cap f(A_2)$
11. $f(f^{-1}(B_1))$
12. $f^{-1}(f(A_1))$
13. $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
14. $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
15. $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$
16. $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
17. $f^{-1}(B_1')$
18. $(f^{-1}(B_1))'$
19. $f'(A_1)$
20. $f(A_1')$

الحل:

1. $f(d) = \{4\}$
2. $f^{-1}(1) = \{a, c\}$
3. $f^{-1}(5) = \varphi$
4. $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{a, c, b\}$
5. $f(A_1) = f(\{a, b, d\}) = \{1, 2, 4\}$
6. $f(A) = \{1, 2, 4, 6\}$
7. $f(A_1 \cup A_2) = f(\{a, b, d, c, e\}) = \{1, 2, 4\}$
8. $f(A_1) \cup f(A_2) = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$

9. $f(A_1 \cap A_2) = f(\{d\}) = \{4\}$

10. $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,2,4\} \cap \{1,4\} = \{1,4\}$

11. $f\big(f^{-1}(B_1)\big) = f(\{a,c,b\}) = \{1,2\} \subset B_1$

12. $f^{-1}\big(f(A_1)\big) = f^{-1}(\{1,2,4\}) = \{a,c,b,d,e\} \supset A_1$

13. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) = \{a,b,c,d,e\}$

14. $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = \{a,c,b\} \cup \{b,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$

15. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\{2\}) = \{b\}$

16. $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \{a,c,b\} \cap \{b,d,e] = \{b\}$

17. $f^{-1}(B_1') = f^{-1}(\{4,5,6\}) = \{d,e,n\}$

18. $\big(f^{-1}(B_1)\big)' = \{a,c,b\}' = \{d,e,n\}$

19. $f'(A_1) = \{3,5,6\}$

20. $f(A_1') = \{1,4,6\}$

مثال: إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = nx$

فإحسب $f(\mathbb{Z})$ و $f^{-1}([a,b])$

الحل:

$f(\mathbb{Z}) = \{f(m): m \in \mathbb{Z}\} = \{nm: m \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$

$f^{-1}([a,b]) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in [a,b]\} = \{x \in \mathbb{R}: a \le nx \le b\}$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{a}{n} \le x \le \frac{b}{n}\right\} = \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$$

نظرية (5.2.2): لتكن $f: X \to Y$ دالة بحيث $A_1, A_2 \subseteq X$ و $B_1, B_2 \subseteq Y$ فإن:

1. $A_1 \subseteq A_2 \to f(A_1) \subseteq f(A_2)$

2. $B_1 \subseteq B_2 \to f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

4. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

5. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

7. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$

8. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$

9. $f^{-1}(B') = \big(f^{-1}(B)\big)'$

البرهان:

أولاً: بما أن $A_1 \subseteq A_2$ إذن:

$$f(A_1) = \{f(x): x \in A_1\} \subseteq \{f(x): x \in A_2\} = f(A_2)$$

ثانياً: بما أن $B_1 \subseteq B_2$ إذن:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in X: y = f(x) \wedge y \in B_1\} \subseteq \{x \in X: y = f(x) \wedge y \in B_2\} = f^{-1}(B_2)$$

ثالثاً: بما أن $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ و $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ فإن:

$$f(A_1) \subseteq f(A_1 \cup A_2), \qquad f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$$

إذن:

$$f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$$

ويتبقى إثبات أن:

$$f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)?$$

لذا نفرض أن $y \in f(A_1 \cup A_2)$ وبالتالي يوجد $x \in A_1 \cup A_2$ بحيث تكون:

$y = f(x)$ إذن:

$$x \in A_1 \vee x \in A_2$$
$$\to f(x) \in f(A_1) \vee f(x) \in f(A_2)$$
$$\to f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$\to f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

رابعاً: بما أن $B_1 \subseteq B_1 \cup B_2$ و $B_2 \subseteq B_1 \cup B_2$ فإن:

$$f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2), \qquad f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2)$$

فإن:

$$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2)$$

ويتبقى إثبات أن:

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)?$$

لذا نفرض أن $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ وبالتالي يوجد $y \in B_1 \cup B_2$ بحيث تكون:

$y = f(x)$ إذن:

$y \in B_1 \vee y \in B_2$

$\rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2$

$\rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$\rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$\rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

خامسا: بما أن $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ و $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ فإن:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), \qquad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$$

فإن:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

سادساً: بما أن $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$ و $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$ فإن:

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1), \qquad f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

فإن:

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

ويتبقى إثبات أن:

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2)?$$

لذا نفرض أن $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ وبالتالي:

$x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)$

يوجد $y \in B_1, y \in B_2$ بحيث تكون $y = f(x)$ إذن:

$y \in B_1 \wedge y \in B_2 \Rightarrow y \in B_1 \cap B_2$

$\rightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2$

$\rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

$\rightarrow f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

سابعاً: نريد إثبات أن $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ ؟

لذا نفرض أن $x \in A$ وبالتالي تكون $f(x) \in f(A)$ وبالتالي تكون $x \in f^{-1}(f(A))$

إذن $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ثامناً: نريد إثبات أن $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ ؟

لذا نفرض أن $y \in f(f^{-1}(B))$ وبالتالي يوجد $x \in f^{-1}(B)$ بحيث تكون $y = f(x)$

إذن:

$$y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$$

إذن:

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

تاسعاً: نريد إثبات أن $f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$؟

أ. نريد إثبات أن $f^{-1}(B') \subseteq (f^{-1}(B))'$؟

نفرض أن $x \in f^{-1}(B')$ وبالتالي $f(x) \in B'$ إذن $f(x) \notin B$

إذن $x \notin f^{-1}(B)$

إذن $x \in (f^{-1}(B))'$

إذن $f^{-1}(B') \subseteq (f^{-1}(B))'$

ب. نريد إثبات أن $(f^{-1}(B))' \subseteq f^{-1}(B')$؟

نفرض أن $x \in (f^{-1}(B))'$ وبالتالي $x \notin f^{-1}(B)$ إذن $f(x) \notin B$

إذن $f(x) \in B'$

إذن $x \in f^{-1}(B')$

إذن $(f^{-1}(B))' \subseteq f^{-1}(B')$

ملاحظات:

1. من الممكن أن نعمم بعض الخصائص الواردة في النظرية السابقة كما يلي:

- $f(\cup_i A_i) = \cup_i f(A_i)$
- $f(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i f(A_i)$

- $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$
- $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$

2. لإثبات أنه قد يكون $f(A') \neq \left(f(A)\right)'$ فإننا نعطي المثال التالي:

نفرض أن:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ by } f(n) = \begin{cases} n-1 \text{ if } n \neq 0 \\ 0 \text{ if } n = 0 \end{cases},$$

$$A = \{0\} \Rightarrow f(A) = \{0\} \Rightarrow \left(f(A)\right)' = \mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*$$

لكن:

$$A' = \mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^* \Rightarrow f(A') = \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(A') \neq \left(f(A)\right)'$$

3. لقد أثبتنا أن $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ ولإثبات أن التساوي ليس ضروري نعطي المثال التالي:

نفرض أن:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ by } \quad f(x,y) = (x,0),$$

$$A_1 = \{(x,y): x \geq 0 \land y = 1\}, \qquad A_2 = \{(x,y): x \leq 0 \land y = 0\}$$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \varphi$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$f(A_1) = \mathbb{R}_+ \times \{0\}, \qquad f(A_2) = \mathbb{R}_- \times \{0\}$$

$$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = \{(0,0)\}$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

4. لقد أثبتنا أن $A \subset f^{-1}(f(A))$ ولإثبات أن التساوي ليس ضروري نعطي المثال التالي

نفرض أن:

$$f: \mathbb{R} \to [-1,1] \text{ by } \quad f(x) = \sin x,$$

$$A = \{0, \pi\} \to f(A) = \{0\} \to f^{-1}\left(f(A)\right) = \pi\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$$

5. لقد أثبتنا أن $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ولإثبات أن التساوي ليس ضروري نعطي المثال التالي نفرض أن:

$f: \mathbb{N} \to \{0,1,2\}$ by $f(x) = 0,$
$B = \{0,1\} \to f^{-1}(B) = \mathbb{N} \to f(f^{-1}(B)) = \{0\}$
$\Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$

(5-3) العمليات الحسابية على الدوال

لتكن لدينا مجموعة غير خالية A ولتكن $f: A \to \mathbb{R}$ و $g: A \to \mathbb{R}$ دالتان معرفتان على A فإن:

1. حاصل ضرب الدالة f في عدد ثابت $k \in \mathbb{R}$ هو الدالة kf ويعرف بأنه لكل $x \in A$ فإن $(kf)(x) = kf(x)$
2. الدالتان f, g تكونا متساويتان إذا كان لكل $x \in A$ فإن $f(x) = g(x)$ وفي هذه الحالة نكتب $f=g$.
3. مجموع الدالتان هو $f+g$ يعرف بأنه لكل $x \in A$ فإن $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
4. فرق الدالتان هو $f-g$ يعرف بأنه لكل $x \in A$ فإن $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
5. حاصل ضرب الدالتان هو $f.g$ يعرف بأنه لكل $x \in A$ فإن $(fg)(x) = f(x).g(x)$
6. حاصل قسمة الدالتان هو $\frac{f}{g}$ يعرف بأنه لكل $x \in A$ فإن $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن $f(x) = 2x$ وكانت $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن $g(x) = 3x + 2$

فإحسب:

1. حاصل ضرب الدالتان f, g في عدد ثابت $k = 7$
2. مجموع الدالتان $f+g$.

3. فرق الدالتان $f-g$

4. حاصل ضرب الدالتان $f.g$

5. حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$

هل الدالتان f, g تكونا متساويتان .

الحل:

أولاً: حاصل ضر ب الدالتان f, g في عدد ثابت $k=7$:

$$7f(x)=7(2x)=14x$$

$$7g(x)=7(3x+2)=21x+14$$

ثانياً: مجموع الدالتان $f+g$:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x)+(3x+2)=5x+2$$

ثالثاً: فرق الدالتان $f-g$:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x)-(3x+2)=-x-2$$

رابعاً: حاصل ضرب الدالتان $f.g$:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(2x)(3x+2)=6x^2+4x$$

خامساً: حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x}{3x+2},\qquad 3x+2\neq 0$$

سادساً: الدالتان f, g ليستا متساويتان لأنه إذا أخذنا مثلا $x=1$ فإن:

$$f(1)=2,\qquad g(1)=5$$

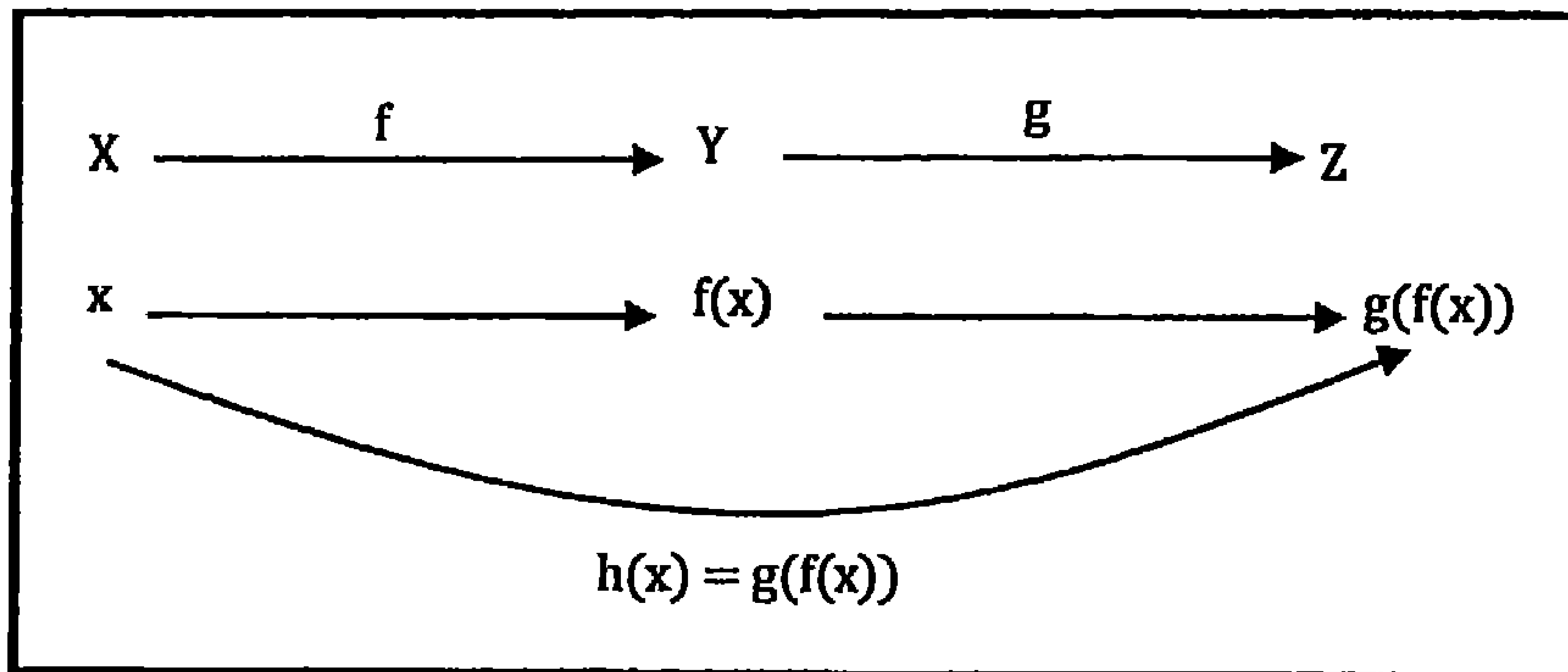
$$\Rightarrow f(1)\neq g(1)$$

$$\Rightarrow f\neq g$$

(5-4) تركيب الدوال Composition of Functions

تعريف (5.4.1): لتكن لدينا الدوال $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ فإن الدالة $h: X \to Z$ المعرف بالشكل $h(x) = g(f(x))$ يسمى تركيب f و g ونرمز له بالرمز $g \circ f$.

ملاحظة: يمكن توضيح عملية تركيب الدوال بالمخطط التالي:



مثـــال: إذا كانـــت $f_1: A \to B$ و $f_2: B \to C$ و $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5,6,7\}$ و $C = \{1,2,3,4\}$ بحيث:

$f_1(1) = 4, \quad f_1(2) = 5, \quad f_1(3) = 6$

$f_2(4) = 1, \quad f_2(5) = 2, \quad f_2(6) = 3, \quad f_2(7) = 4$

فهل:

1. $f_2 \circ f_1$ معرفه
2. $f_1 \circ f_2$ معرفه.

الحل:

أولاً:

$f_2 \circ f_1(1) = f_2(f_1(1)) = f_2(4) = 1$

$f_2 \circ f_1(2) = f_2(f_1(2)) = f_2(5) = 2$

$f_2 \circ f_1(3) = f_2(f_1(3)) = f_2(6) = 3$

إذن $f_2 \circ f_1$ معرفه

ثانياً:

$$f_1 \circ f_2(4) = f_1(f_2(4)) = f_1(1) = 4$$

$$f_1 \circ f_2(5) = f_1(f_2(5)) = f_1(5) = 5$$

$$f_1 \circ f_2(6) = f_1(f_2(6)) = f_1(3) = 6$$

$f_1 \circ f_2(7) = f_1(f_2(7)) = f_1(4) =$ غيرمعرفه

إذن $f_1 \circ f_2$ غير معرفه.

مثـال: إذا كانـت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيـث $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 1$

فإحسب كلاً من:

أ. $g \circ f$

ب. $f \circ g$

ج. مستخدما الفقرة (أ) و (ب) تحقق أن $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$

د. أوجد كلا من f^2 و g^2 ومن ثم إحسب كلا من $f^2(-1)$ و $g^2(-1)$

الحل:

أولاً:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) - 1 = x^2$$

ثانياً:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

ثالثاً: واضح من الفقرتين السابقتين:

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 2 \neq (g \circ f)(x) = x^2$$

وبالتالي يكون:

$$(f \circ g)(2) = 2 \neq (g \circ f)(x) = 4$$

رابعاً:

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$
$$\Rightarrow f^2(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^2 + 2 = 5$$

كذلك:

$$g^2(x) = (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x - 1)$$
$$= x - 1 - 1 = x - 2$$

$\Rightarrow g^2(-1) = -1 - 2 = -3$

نظرية (5.4.2): إذا كانت $f: X \to Y$ و $g: X \to Z$ و $h: Z \to D$ فإن:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

البرهان:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\left(g(f(x))\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f(x)) = h\left(g(f(x))\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

وهذا متحقق لكل $x \in A$ إذن:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث تكون:

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 2x, \qquad h(x) = \sin x$$

فتحقق من كون:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

الحل:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x + 1)$$

$$= h(g(x + 1)) = h(2(x + 1)) = \sin 2(x + 1) \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f(x)) = h\left(g(f(x))\right) = h(g(x + 1))$$

$$= h(2(x + 1)) = \sin 2(x + 1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

مثال: إذا كانت $f: X \to Y$ فإثبت أن $f \circ I_x = I_y \circ f = f$

البرهان:

$$I_x: X \to X, \qquad I_y: Y \to Y, \qquad f(x) = y \; \forall x \in X$$

$$(f\circ I_x)(x)=f\big(I_x(x)\big)=f(x)=y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\big(I_y\circ f\big)(x)=I_y\big(f(x)\big)=I_y(y)=y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$(f\circ I_x)(x)=\big(I_y\circ f\big)(x)$$

وهذا صحيح لكل $x\in X$ وبالتالي:

$$f\circ I_x=I_y\circ f=f$$

مثال: إذا كان $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ و $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ بحيث تكون:

$$f(n)=n+1,\qquad g(n)=0\ \forall n\in\mathbb{N}$$

فإحسب كلاً من $(g\circ f)(n)$ و $(f\circ g)(n)$ ثم علق على النتائج.

الحل:

$$(g\circ f)(n)=g\big(f(n)\big)=g(n+1)=0$$
$$(f\circ g)(n)=f\big(g(n)\big)=f(0)=1$$

وبالتالي:

$$g\circ f\neq f\circ g$$

(5-5) أنواع الدوال

(5-5-1) الدالة المتباينة

تعريف (5.5.1): نقول أن الدالة $f\colon X\to Y$ متباينة أو (أحادية) injective أو (1-1) أو one to one إذا كان كل عنصر من المستقر Y يكون صورة لعنصر واحد على الأكثر من المنطلق X.

وبمعنى أخرفإن هذا يعني أنه إذا كان $y\in Y$ فإن الصورة العكسية $f^{-1}(y)$ تحتوي على عنصر واحد فقط أو تكون المجموعة الخالية.

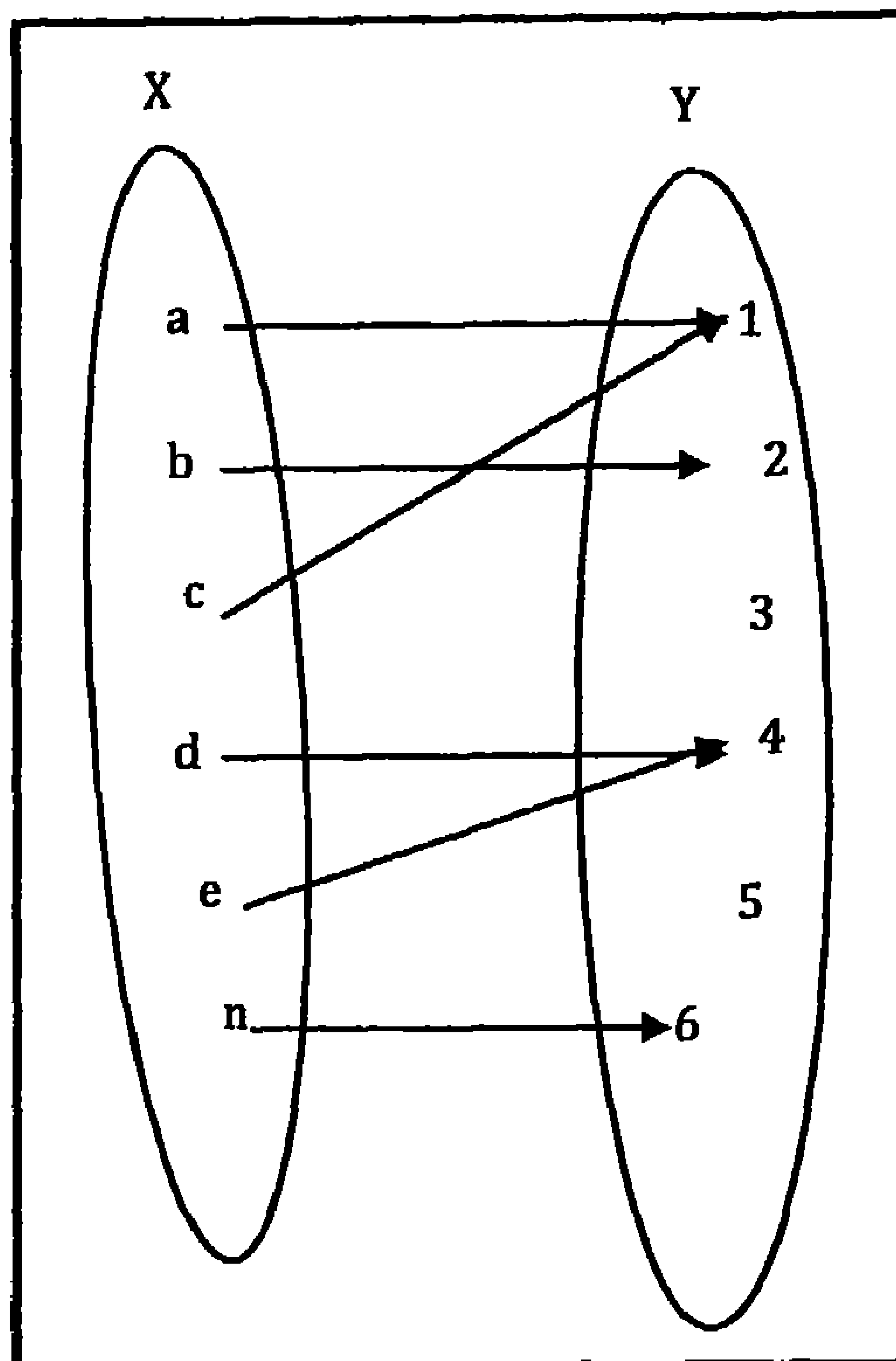
وهذا يعني بالرموز:

$$\forall x_1,x_2\in X\colon f(x_1)=f(x_2)\rightarrow x_1=x_2$$

أو بالعلاقة المكافئة:

$$\forall x_1,x_2\in X\colon x_1\neq x_2\ \rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

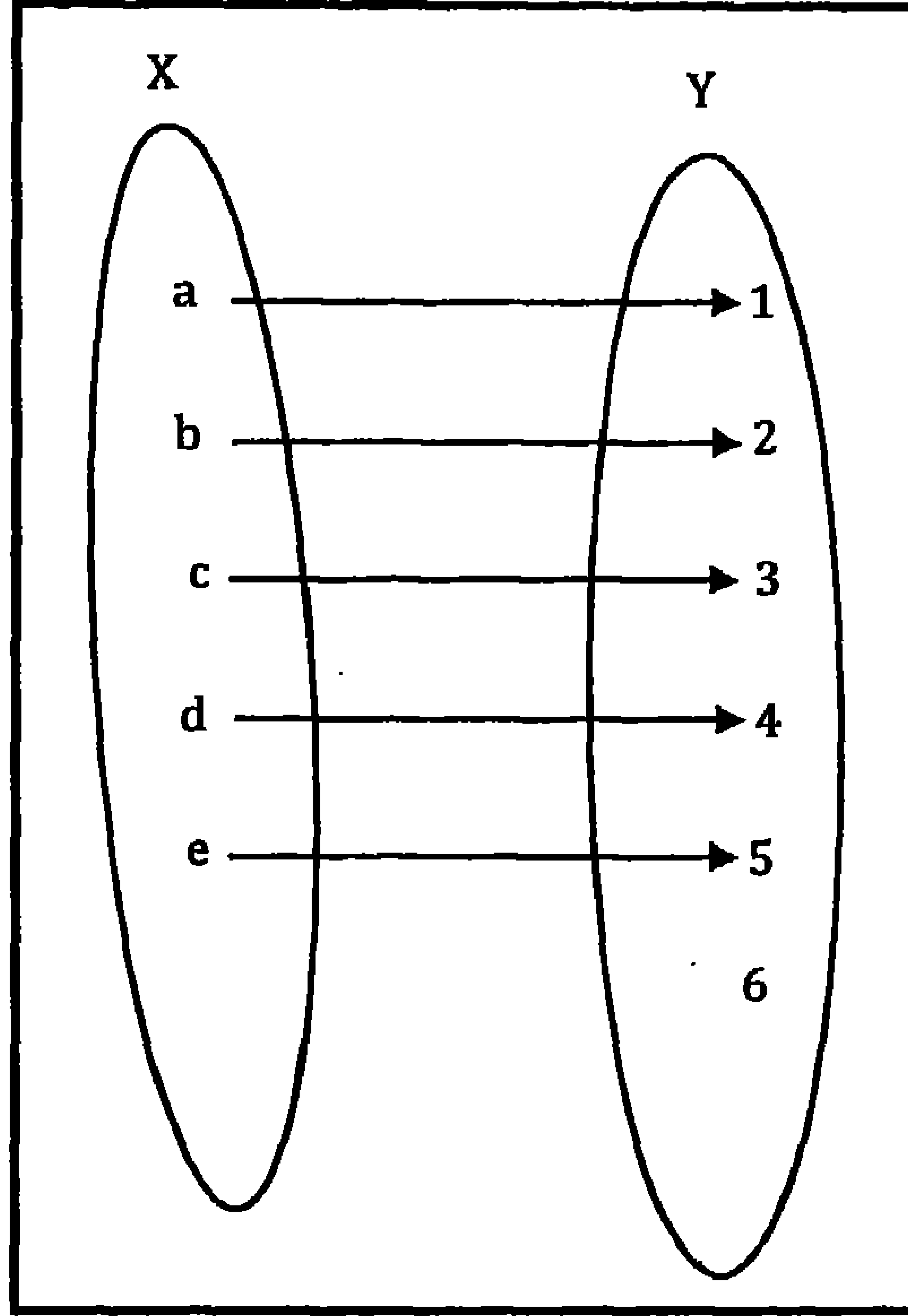
مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة غير متباينة لأن $f(a) = f(c) = 1$ ولكن $a \neq c$

كذلك $f(d) = f(e) = 4$ ولكن $d \neq e$

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة متباينة.

مثال: إذا كانت A, B مجموعتان ومعرف عليهما الدوال f_1, f_2 من A إلى B حيث:

$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4\},$

$f_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)\}, \;\; f_2 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$

فبين أي من الدوال متباينة وأيهما لا؟

الحل:

إذن الدالة f_1 غير متباينة لأن $f(1) = f(3) = 1$ ولكن $1 \neq 3$

والدالة f_2 متباينة

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

المعرفه بـ:

$$f(x) = x^2$$

فهل الدالة متباينه؟

الحل:

الدالة غير متباينة لأن $f(1) = f(-1) = 1$ ولكن $1 \neq -1$

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

المعرفه بـ:

$$f(x) = x^2$$

فهل الدالة متباينه؟

الحل:

نعم الدالة متباينة .

نظرية (5.5.1.1): لتكن $f: X \rightarrow Y$ دالة فإن f تكون متباينة إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(f(A)) = A$ وذلك لكل $A \subseteq X$.

البرهان:

أولا: لقد أثبتنا في نظرية (5.2.2) أن دائماً يكون $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

إذن متبقي لنا إثبات أن $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ ؟

لذا نفرض أن:

$$x \in f^{-1}(f(A))$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A)$$

$$\Rightarrow \exists a \in A: f(x) = f(a)$$

ولكن f متباينة إذن $x = a \in A$

إذن $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

ثانياً: نفرض أن $f^{-1}(f(A)) = A$ وذلك لكل $A \subseteq X$ ونريد إثبات أن الدالة f متباينة؟

لذا نفرض أن:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Rightarrow x_1 \in f^{-1}(f(x_2)) = \{x_2\}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

إذن الدالة f متباينة.

نظرية (5.5.1.2): لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن f تكون متباينة إذا وفقط إذا كان $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ وذلك لكل $A_1, A_2 \subseteq X$.

البرهان:

أولاً: نفرض أن f دالة متباينة ولقد أثبتنا في نظرية (5.2.2) أنه دائماً يكون:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

لذا متبقي إثبات أن $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$؟

لذا نفرض أن:

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$
$$\Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$$
$$\Rightarrow \exists x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 : y = f(x_1) \wedge y = f(x_2)$$
$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

وبما أن الدالة f متباينة فإن:

$$x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$$
$$\Rightarrow y = f(x_1) = f(x_2) \in f(A_1 \cap A_2)$$

ثانياً: نفرض أن:

$$A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\},\ x_1 \neq x_2$$
$$\Rightarrow A_1 \neq A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \varphi$$

ولكن $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ إذن:

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \varphi$$
$$\Rightarrow f(A_1) \neq f(A_2)$$

إذن الدالة f متباينة.

نظرية (5.5.1.3): إذا كانت $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دالتان بحيث تكون $g \circ f$ دالة متباينة فإن الدالة f تكون دالة متباينة.

البرهان:

نفرض أن:

$$x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$$
$$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

ولكن الدالة $g \circ f$ دالة متباينة فإن $x_1 = x_2$ وبالتالي فإن الدالة f هي دالة متباينة.

نظرية (5.5.1.4): لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن الخواص التالية تكون متكافئة:

1. f دالة متباينة.
2. توجد دالة $g: Y \to X$ بحيث يكون $g \circ f = I_x$.
3. إذا كانت $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ دالتان تحققان $f \circ g = f \circ h$ فإن $g = h$.

البرهان:

(i) →(ii)

نفرض أن f دالة متباينة.

إذن لكل عنصر y من f(x) هو صورة وحيدة لعنصر وحيد x من X وبالتالي يمكننا أن نعرف دالة $g: Y \to X$ على النحو التالي:

$$g(y) = \begin{cases} x \text{ if } y \in f(X) \\ x_0 \text{ if } y \in Y \backslash f(X) \end{cases}$$

$$\forall x \in X \Rightarrow (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = x$$
$$\Rightarrow g \circ f = I_x$$

(ii)→(iii)

نفرض أن $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ دالتان بحيث:

$$f \circ g = f \circ h = I_y$$
$$\Rightarrow (f \circ g)(y) = (f \circ h)(y) = y$$

$\Rightarrow f(g(y)) = f(h(y)) = y$

$\Rightarrow g(y) = h(y) \quad \forall y \in Y$

$\Rightarrow g = h$

(iii)→(i)

Let $x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2)$

Let $g: Y \to X,\ h: Y \to X,\ g(y) = x_1,\ h(y) = x_2$

$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_1) = f(x_2) = f(h(y)) = (f \circ h)(y)$

$\Rightarrow f \circ g = f \circ h$

(iii) $\Rightarrow g = h\ \forall y \in Y$

$\Rightarrow g(y) = h(y)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

إذن الدالة f دالة متباينة.

نظرية (5.5.1.5):لتكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دالتان فإن إذا كانت f و g دالتان متباينان فإن $g \circ f$ دالة متباينة.

البرهان:

بما أن f و g دالتان متباينان وبالتالي بإستخدام نظرية (5.5.1.4) فإنه توجد دالتان $f_1: Y \to X,\ g_1: Z \to Y$ بحيث: $f_1 \circ f = I_x,\ g_1 \circ g = I_y$ إذن:

$(f_1 \circ g_1)(g \circ f) = f_1 \circ (g_1 \circ g) \circ f = f_1 \circ I_y \circ f = f_1 \circ f = I_x$

إذن الدالة $g \circ f$ دالة متباينة.

نظرية (5.5.1.6): لتكن $f: X \to Y$ دالة متباينة وكانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ عدد n من المجموعات الغير خالية من X فإن $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)$ تمثل تجزئة للمجموعة $f(X)$ إذا وفقط إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ تمثل تجزئة ل X .

البرهان:

أولاً: نفرض أن الدالة f دالة متباينة وأن $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)$ تمثل تجزئة للمجموعة $f(X)$ إذن:

$$f(A_i) \cap f(A_j) = \varphi \;\; \forall i \neq j$$

$$f^{-1}(f(A_i)) \cap f^{-1}(f(A_j)) = \varphi \;\; \forall i \neq j \quad \dots\dots(1)$$

$$f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots \cup f(A_n) = f(X)$$

$$f^{-1}(f(A_1)) \cup f^{-1}(f(A_2)) \cup \dots \cup f^{-1}(f(A_n)) = f^{-1}(f(X)) \quad \dots\dots(2)$$

ولكن بما أن الدالة f متباينة فمن نظرية (5.5.1.1) فإن f تكون متباينة إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(f(A)) = A$ وذلك لكل $A \subseteq X$ وبالتالي فإن (1) تعطى:

$$A_i \cap A_j = \varphi \;\; \forall i \neq j \quad \dots\dots(3)$$

كذلك (2) تعطى:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X \quad \dots\dots(4)$$

إذن من (3) و (4) نحصل على أن $A_1, A_2, \dots, A_n$ تمثل تجزئة ل X .

ثانياً: نفرض أن الدالة f دالة متباينة وأن $A_1, A_2, \dots, A_n$ تمثل تجزئة ل X إذن:

$$A_i \cap A_j = \varphi \;\; \forall i \neq j$$

وبالتالي:

$$f(A_i) \cap f(A_j) = \varphi \;\; \forall i \neq j \quad \dots\dots(5)$$

كذلك

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X$$

وبالتالي:

$$f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots \cup f(A_n) = f(X) \quad \dots\dots(6)$$

إذن من (5) و (6) نحصل على أن $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)$ تمثل تجزئة للمجموعة $f(X)$.

(5-5-2) الدالة الشاملة

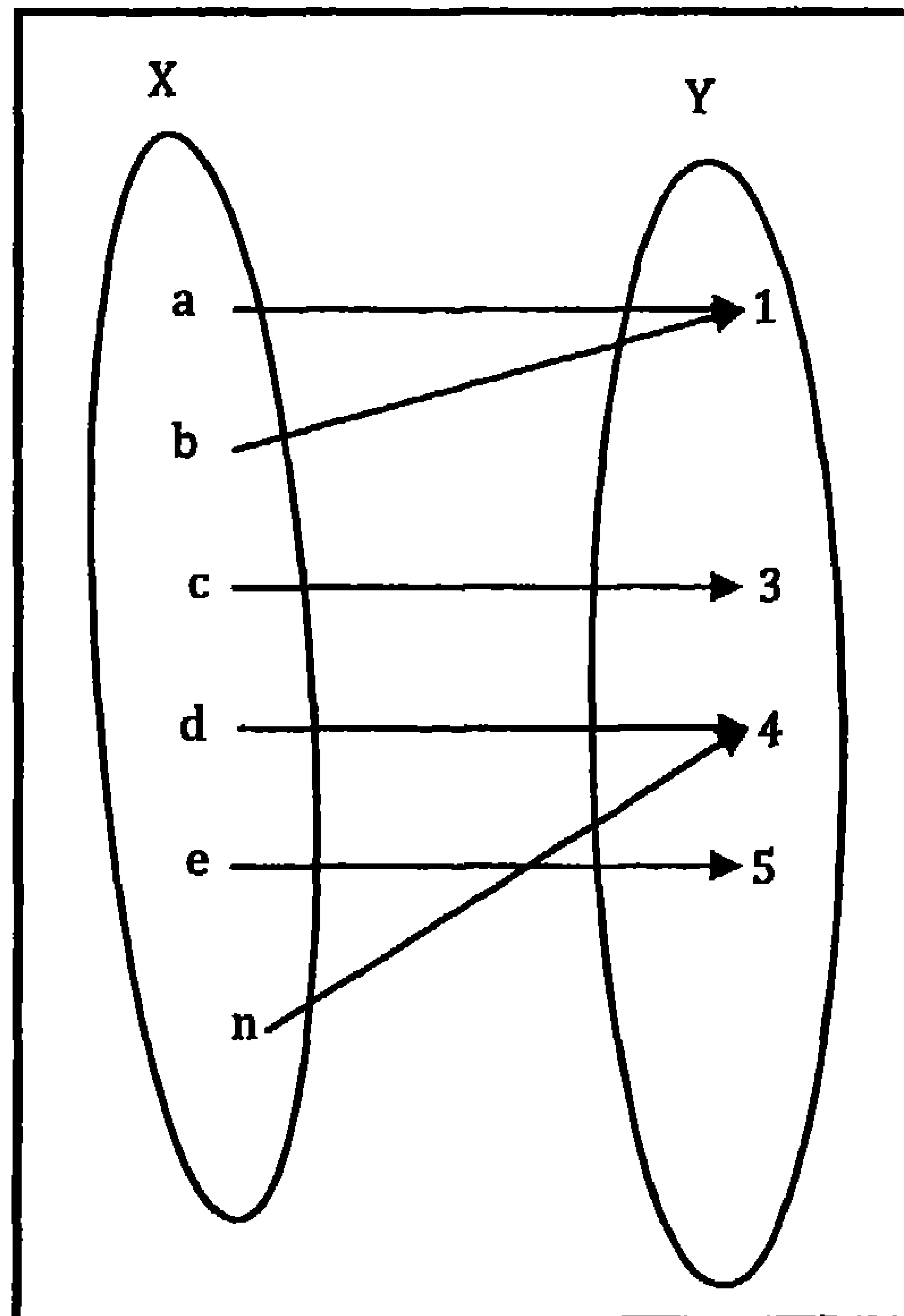
تعريف (5.5.2): نقول أن الدالة $f: X \to Y$ غامرة أو (شاملة) surjective أو onto إذا كان كل عنصر من المستقر Y يمثل صورة لعنصر واحد على الأقل من المنطلق X وهذا يعني أن $f(X) = Y$ أي أن مدى f يساوي المستقر.

وهذا يعني أيضا أنه إذا كان $y \in Y$ فإن الصورة العكسية $f^{-1}(y)$ تكون مجموعة غير خالية.

وهذا يعني بالرموز:

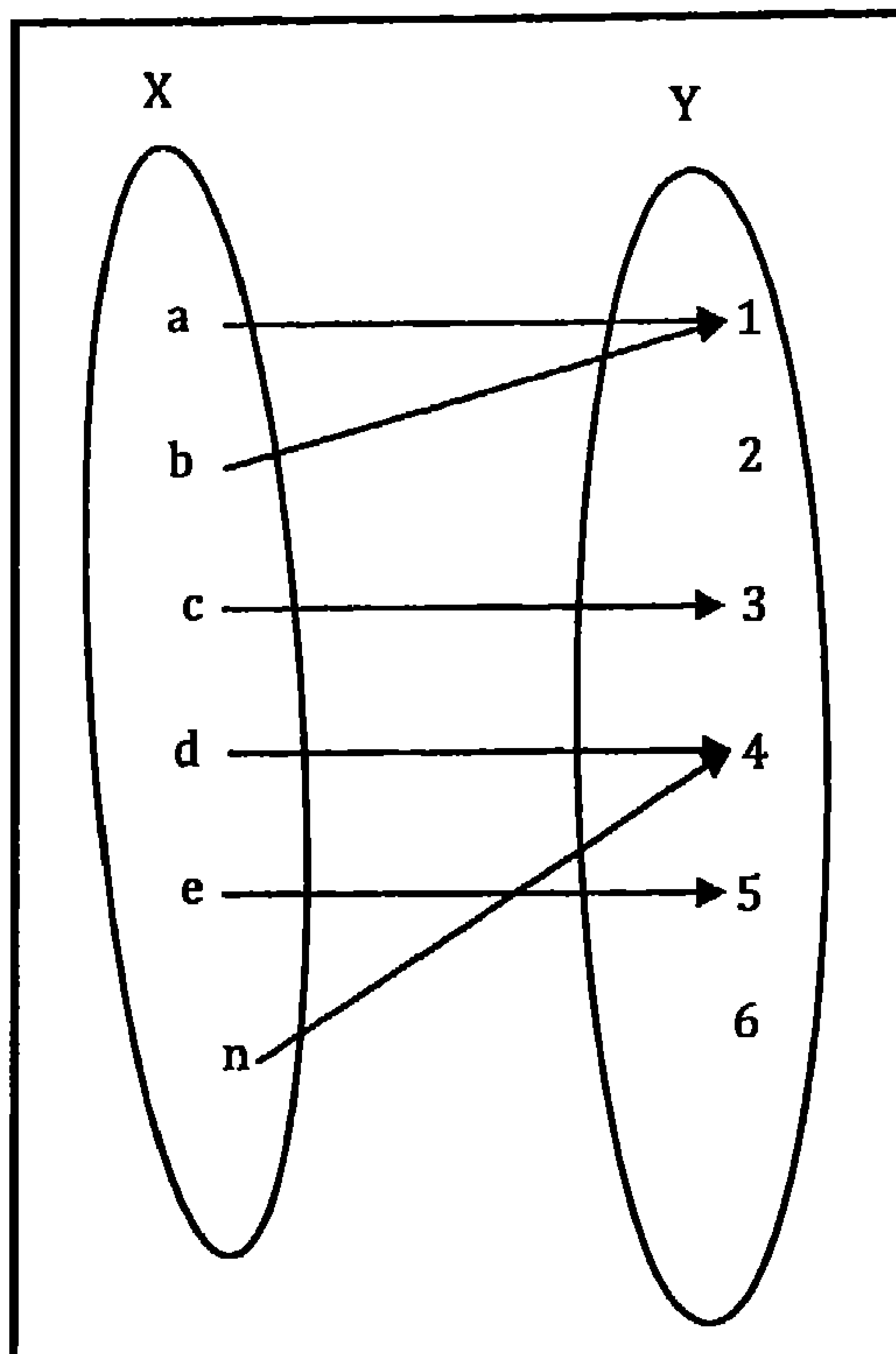
$\forall y \in Y \exists\, x \in X: y = f(x)$

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة شاملة.

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة ليست شاملة لأن العنصر $2 \in Y$ ولا يوجد لها $x \in X$ يحقق $2 = f(x)$ كذلك العنصر $6 \in Y$ ولا يوجد لها $x \in X$ يحقق $6 = f(x)$.

مثال: إذا كانت A, B مجموعتان ومعرف عليهما الدوال f_1, f_2 من A إلى B حيث:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$

$f_1 = \{(1,1), (2,3), (3,1), (4,4), (5,1), (6,3)\},$

$f_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,2), (6,1)\}$

فبين أي من الدوال شاملة وأيهما لا؟

الحل:

إذن الدالة f_1 غير شاملة لأن $2 \in B$ ولكن $f^{-1}(2) \notin A$

والدالة f_2 شاملة.

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

المعرفه بـ:

$f(x) = x^2$

فهل الدالة شاملة؟

الحل:

الدالة غير غير شاملة لأن $-1 \in B$ ولكن $f^{-1}(-1) \notin A$

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$

المعرفه بـ:

$f(x) = x^2$

فهل الدالة شاملة؟

الحل:

نعم الدالة شاملة لأن إذا كانت $y = x^2$ فإن $x = \pm\sqrt{y}$ وبالتالي يكون لكل y في المستقر فإنه يوجد x في المنطلق يحقق y=f(x) .

مثال: لتكن لدينا الدالة :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

المعرفه بـ:

$f(x) = 2x + 1$

فهل الدالة شاملة؟

الحل:

نعم الدالة شاملة لأن إذا كانت $y = 2x + 1$ فإن $x = \frac{y-1}{2}$ وبالتالي يكون لكل y في المستقر فإنه يوجد x في المنطلق يحقق y=f(x) .

نظرية (5.5.2.1): لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن f تكون شاملة إذا وفقط إذا كان $f(f^{-1}(B)) = B$ وذلك لكل $B \subseteq Y$.

البرهان:

أولا: لقد أثبتنا في نظرية (5.2.2) أن دائما يكون $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

إذن متبقي لنا إثبات أن $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ ؟

لذا نفرض أن $y \in B$ ولكن f شاملة إذن يوجد $x \in X$ بحيث $y = f(x)$

إذن:

$$f(x) \in B\, x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$$

إذن $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

ثانيا: نفرض أن $f(f^{-1}(B)) = B$ وذلك لكل $B \subseteq Y$ ونريد إثبات أن الدالة f شاملة؟

لذا نفرض أن:

$B = Y$

$\Rightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y$

$\Rightarrow X = f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow f(X) = Y$

إذن الدالة f شاملة.

ملاحظه: الدالة $f: X \to Y$ تكون شاملة إذا كان $Ran(f) = f(X) = Y$

نظرية (5.5.2.2): إذا كانت $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دالتان بحيث تكون $g \circ f$ دالة شاملة فإن الدالة g تكون دالة شاملة.

البرهان:

بما أن $g \circ f$ دالة شاملة فإن $g(f(X)) = Z$.

وهذا يعني أن $g(Y) = Z$ وبالتالي فإن g دالة شاملة.

نظرية (5.5.2.3): لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن الخواص التالية تكون متكافئة:

1. f دالة شاملة.
2. توجد دالة $g: Y \to X$ بحيث تكون $f \circ g = I_Y$.

3. إذا كانت $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ دالتان تحققان $g \circ f = h \circ f$ فإن $g = h$.

البرهان:

(i)→(ii)

نفرض أن f دالة شاملة وبالتالي $f^{-1}(y) \neq \varphi$ لكل $y \in Y$

إذن لكل $y \in Y$ يوجد $x \in f^{-1}(y)$

إذن يمكننا أن نعرف دالة $g: Y \to X$ بحيث $g(y) = x \; \forall y \in Y$ وبالتالي:

$$\forall y \in Y \Rightarrow (f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x) = y$$

$$\Rightarrow f \circ g = I_y$$

(ii)→(iii)

نفرض أن $h: Y \to X$, $g: Y \to X$ بحيث $g \circ f = h \circ f = I_x$ وبالتالي:

$$(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = x$$

$$\Rightarrow g\big(f(x)\big) = h\big(f(x)\big) = x$$

$$\Rightarrow g = h$$

(iii)→(i)

سوف نستخدم البرهان العكسي ولذلك نفرض أن f دالة غير شاملة.

إذن $f(X) \subset Y$ إذن $Y \backslash f(X) \neq \varphi$

نفرض أن $x_0 \neq x_1$ عنصرين من X ونعرف دالة $g: Y \to X$

بحيث $g(y) = x_0$ لكل $y \in Y$

ونعرف دالة $h: Y \to X$

بحيث $h(y) = x_0$ لكل $y \in f(X)$

و $h(y) = x_1$ لكل $y \in Y \backslash f(X)$

إذن واضح أن $g \neq h$

ولكن:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x_0$$

$$(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = x_0$$

إذن:

$$(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$$

$$\Rightarrow g \circ f = h \circ f$$

إذن من الخاصية (iii) تكون $g = h$ ولكن هذا يعارض $g \neq h$ وبالتالي لفك هذا التعارض يجب أن تكون الدالة f شاملة.

نظرية (5.5.2.4): لتكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دالتان فإنه إذا كانت f و g دالتان شاملتان فإن $g \circ f$ تكون دالة شاملة.

البرهان: بما أن f و g دالتان شاملتان وبالتالي بإستخدام نظرية (5.5.2.3) فإنه توجد دالتان $f_1: Y \to X,\ g_1: Z \to Y$ بحيث: $f \circ f_1 = I_y,\ g \circ g_1 = I_z$

إذن:

$$(f \circ g)(f_1 \circ g_1) = g \circ (f \circ f) \circ g_1 = g \circ I_y \circ g_1 = g \circ g_1 = I_z$$

إذن الدالة $g \circ f$ هي دالة شاملة.

نظرية (5.5.2.5): لتكن X و Y مجموعتين غير خاليتين فإن الخاصيتين التاليتين تكونا متكافئتين:

1. توجد دالة متباينة من X إلى Y .
2. توجد دالة شاملة من Y إلى X .

البرهان:

(i)→(ii)

إذا كانت الدالة $f: X \to Y$ دالة متباينة فإنه من نظرية (5.5.1.4) توجد دالة $g: Y \to X$ بحيث تكون $g \circ f = I_x$

إذن الدالة g تكون شاملة.

(ii)→(iii)

إذا كانت الدالة $g: Y \to X$ شاملة فإنه من نظرية (5.5.2.3) توجد دالة $f: X \to Y$ بحيث تكون $g \circ f = I_x$

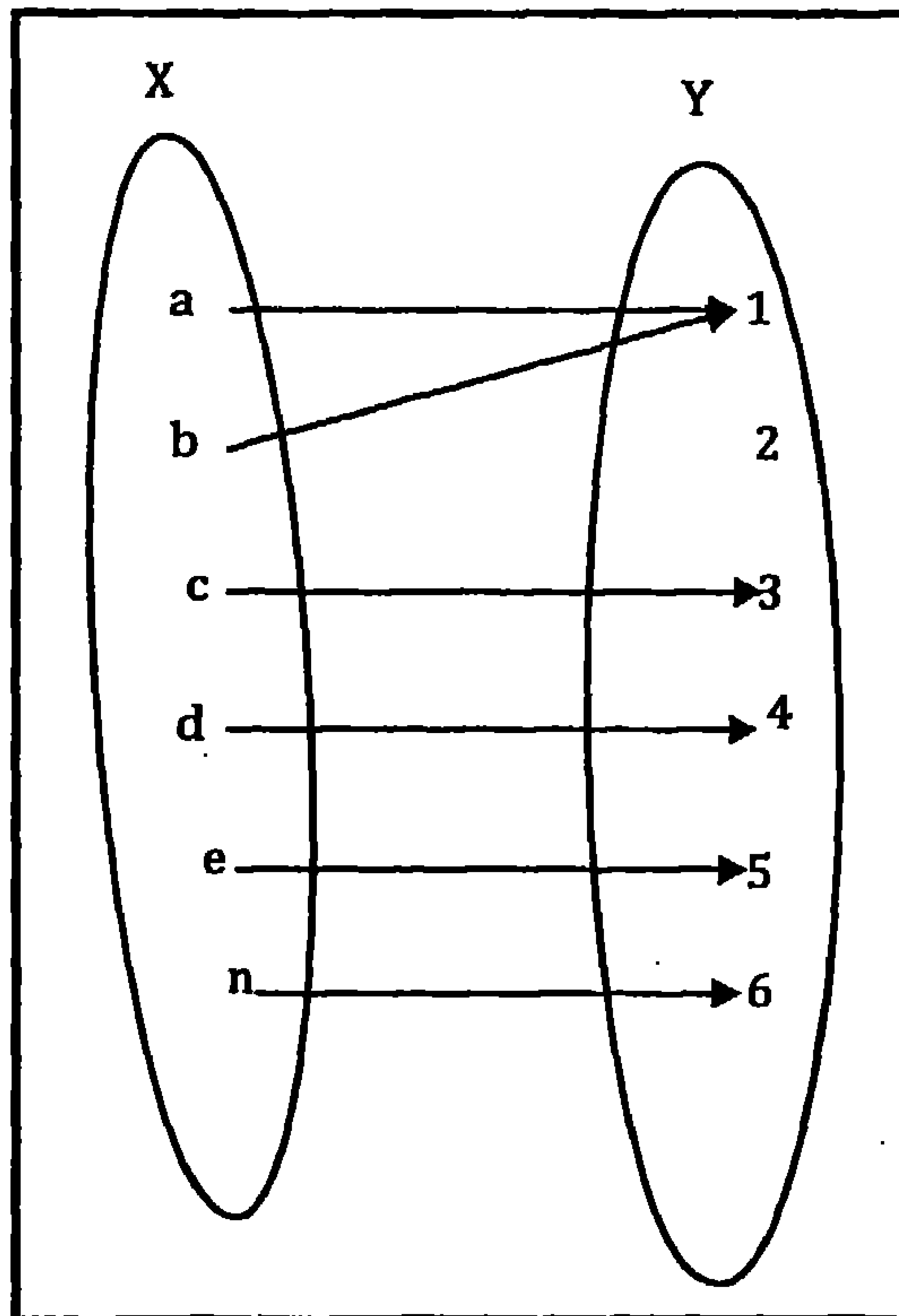
إذن الدالة f تكون متباينة.

(5-5-3) الدالة المتقابلة

تعريف (5.5.3): نقول أن الدالة $f: X \to Y$ دالة متقابلة Bijective إذا كان متباينة و شاملة في أن واحد.

ملاحظة: إذا كانت الدالة $f: X \to Y$ دالة متقابلة فإن هذا يعني أن لكل عنصر y من المستقر Y توجد له صورة وحيدة $f^{-1}(y)$ من المنطلق X .

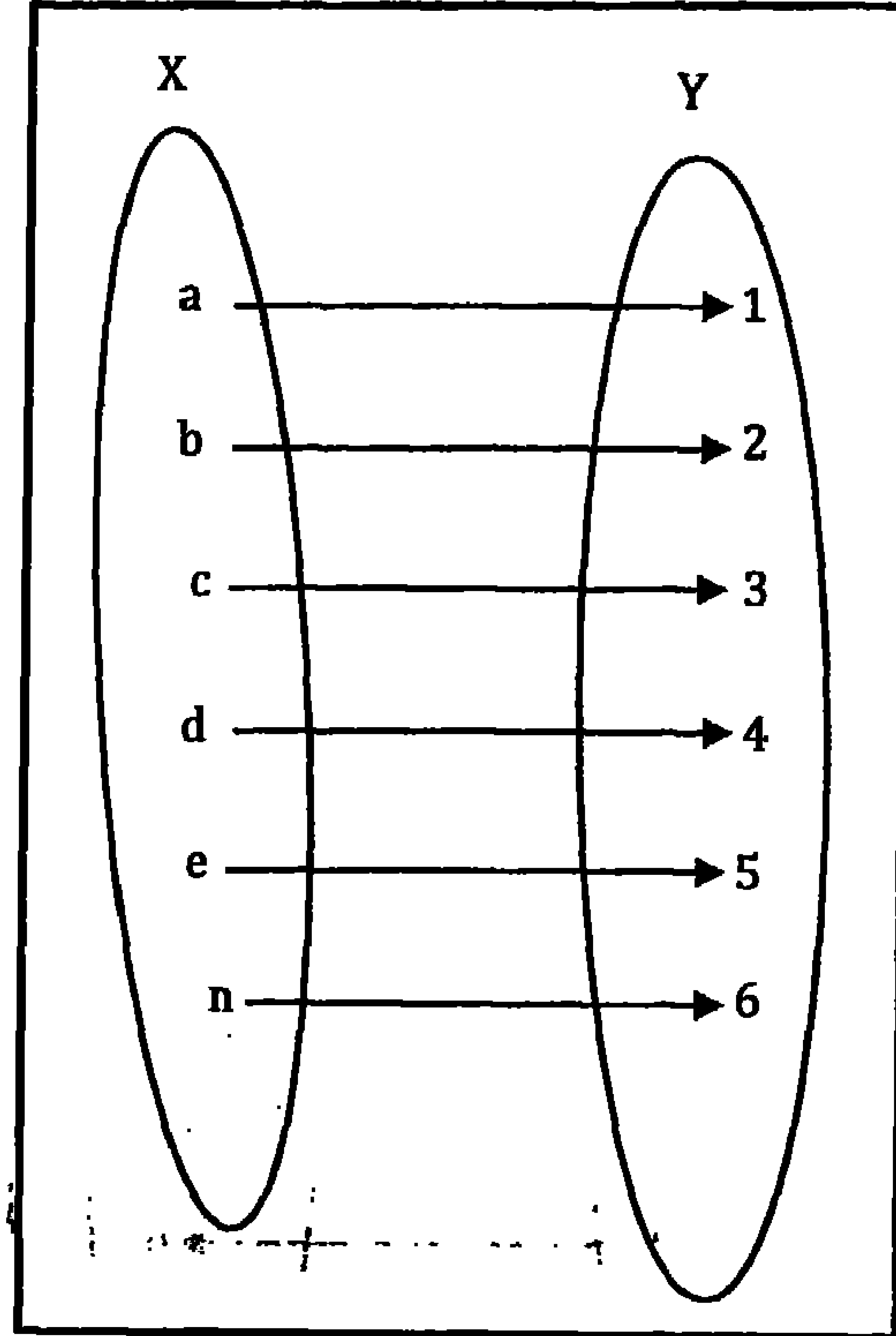
مثال: الدالة $f: X \to Y$



الدالة f هي دالة غير متباينة لأن $f(a) = f(c) = 1$ ولكن $a \neq c$

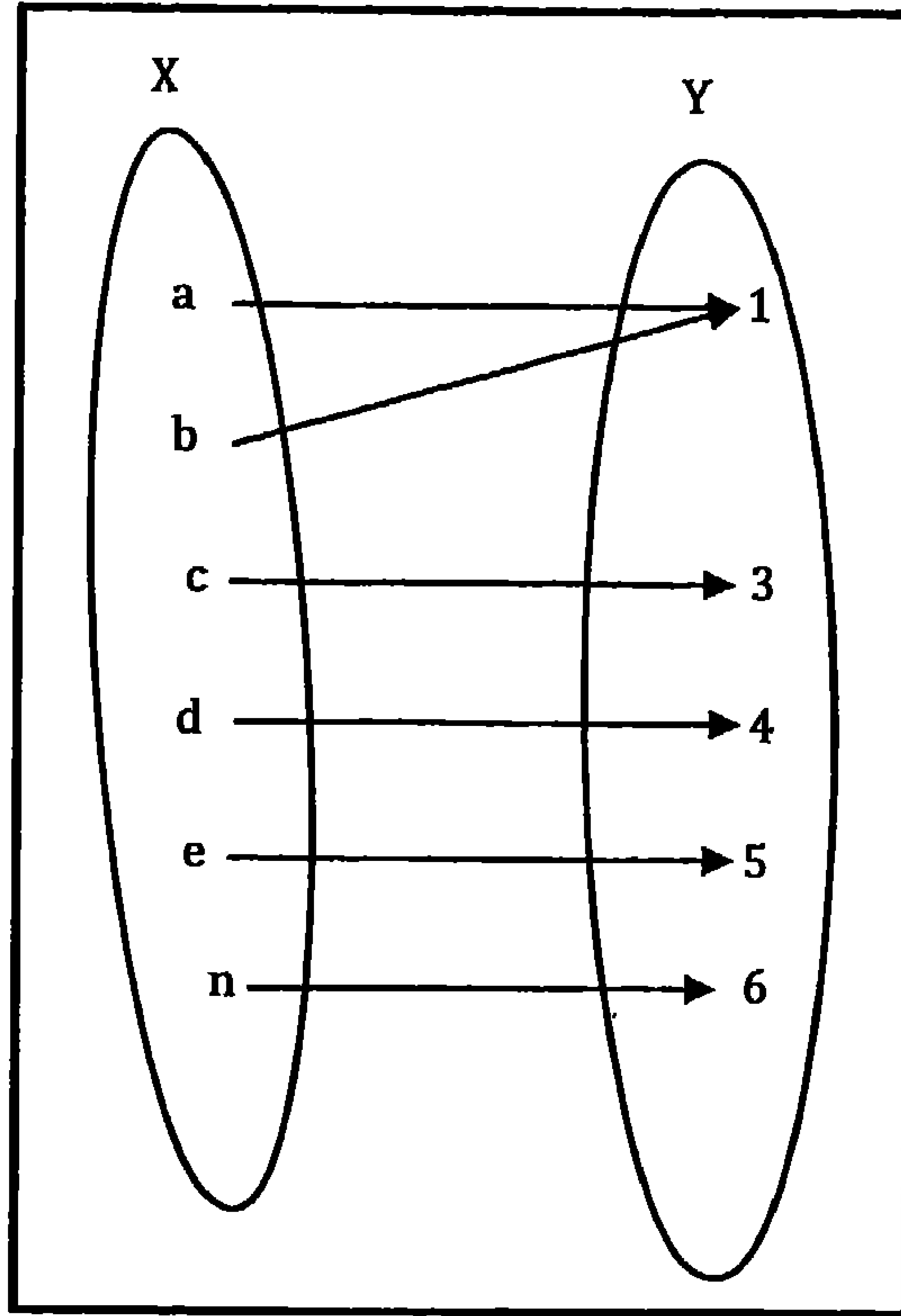
كذلك الدالة f هي دالة ليست شاملة لأن العنصر $2 \in Y$ ولا توجد لها $x \in X$ يحقق $2 = f(x)$ وبالتالي الدالة f لا تمثل تقابل.

مثال: الدالة $f: X \rightarrow Y$



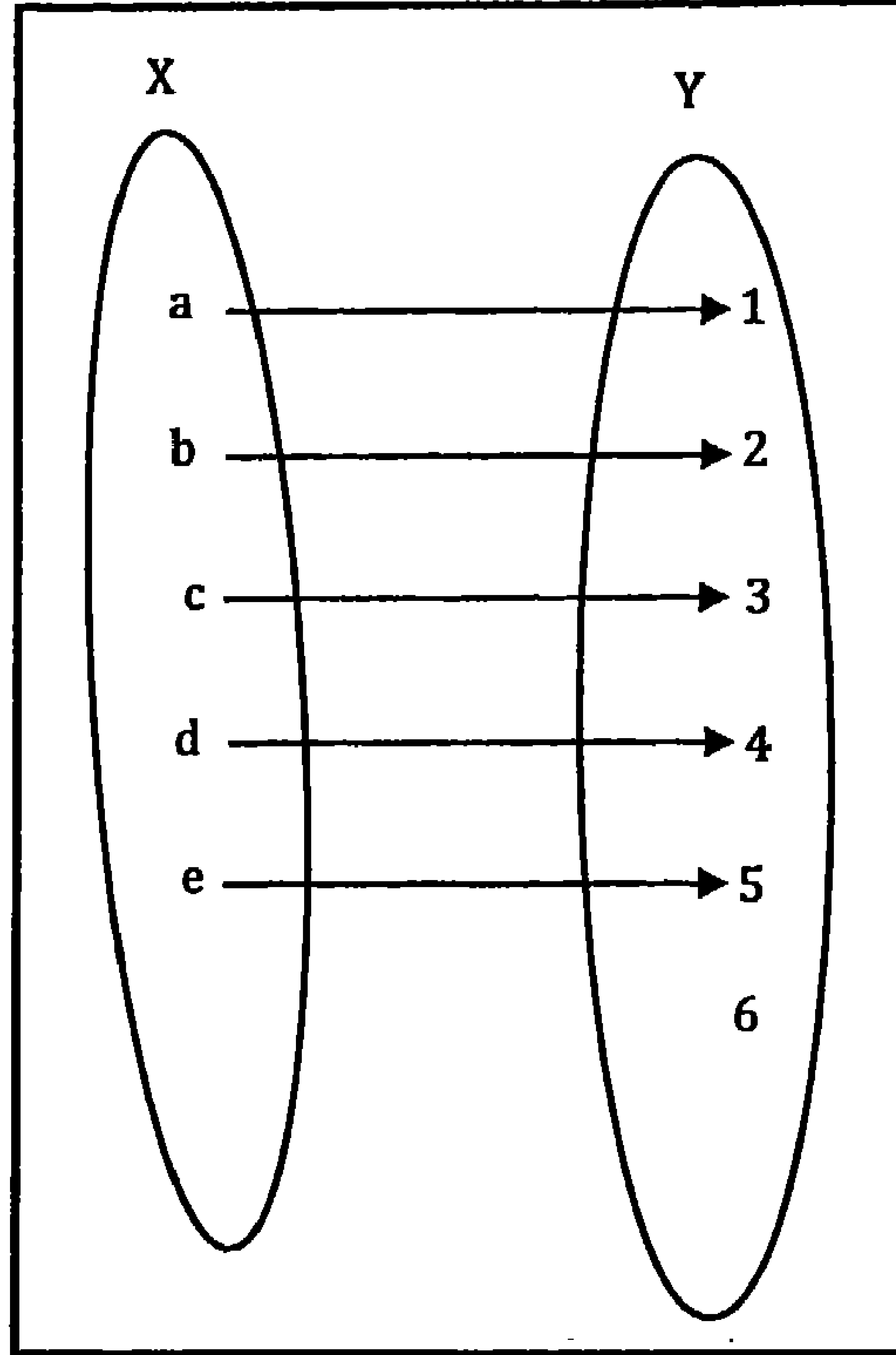
الدالة f هي دالة متباينة و شاملة وبالتالي فهي دالة تمثل تقابل.

مثال: الدالة $f: X \to Y$



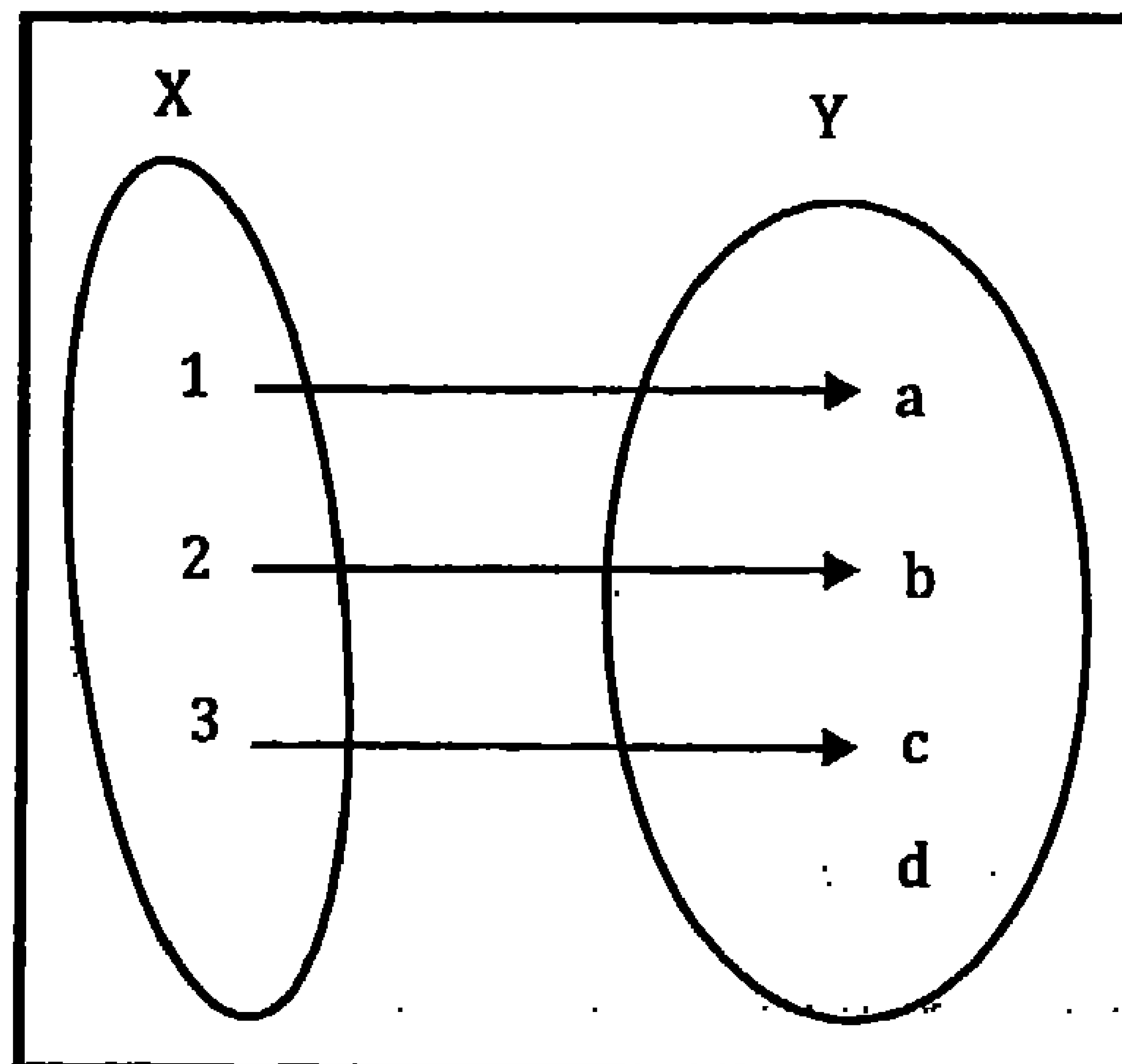
هي دالة شاملة لكنها دالة ليست متباينة لأن $f(a) = f(b) = 1$ ولكن $a \neq b$ وبالتالي فالدالة لا تمثل تطابق.

مثال: الدالة $f: X \to Y$



هي دالة متباينة لكنها ليست شاملة لأن العنصر $6 \in Y$ لا توجد له $x \in X$ يحقق $6 = f(x)$ وبالتالي فالدالة لا تمثل تقابل.

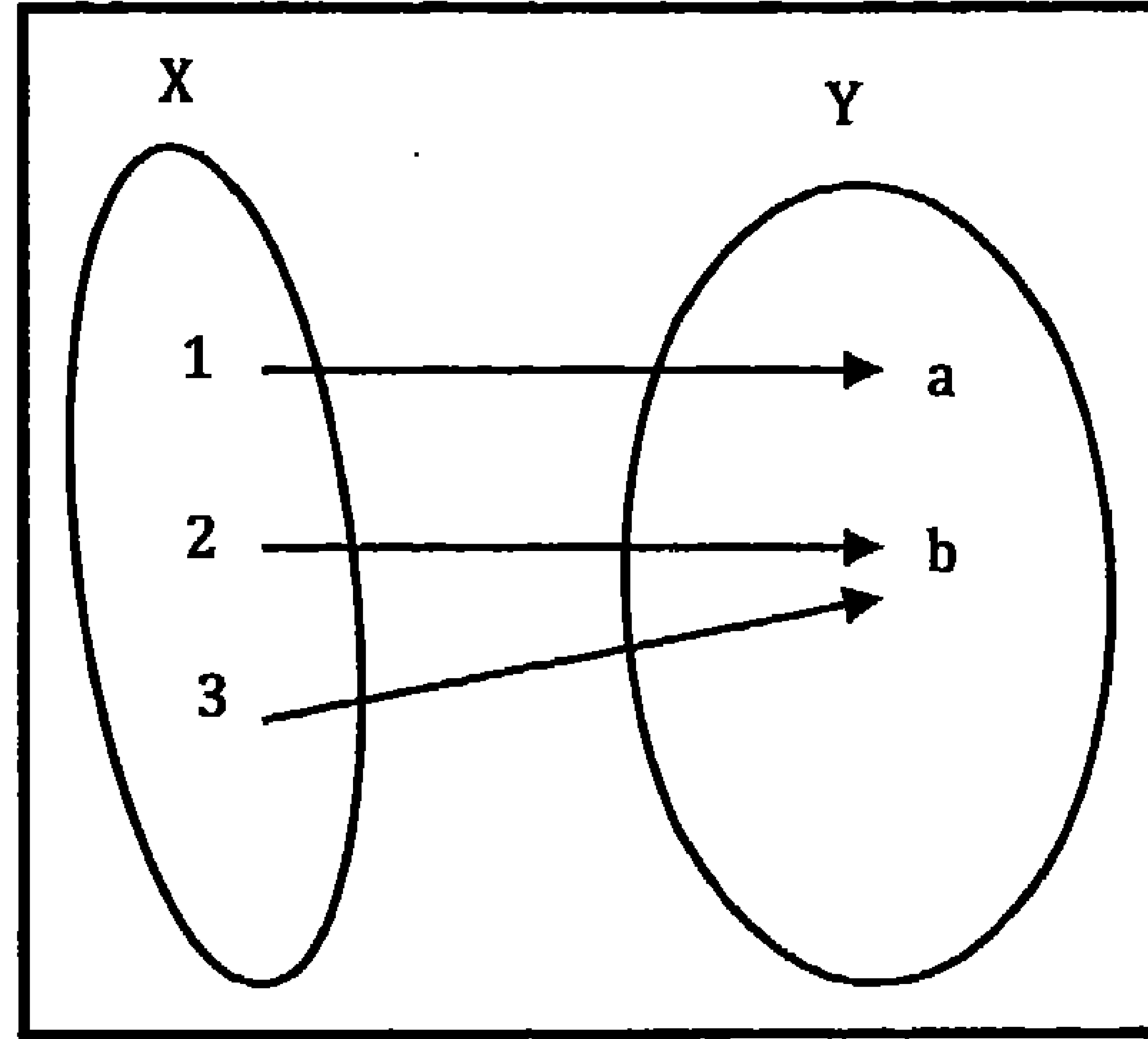
مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة متباينة لكنها ليست شـاملة لأن العنصـر $d \in Y$ ولكـن $f^{-1}(d)$ غـير معرفـه وبالتالي فالدالة f لا تمثل تقابل.

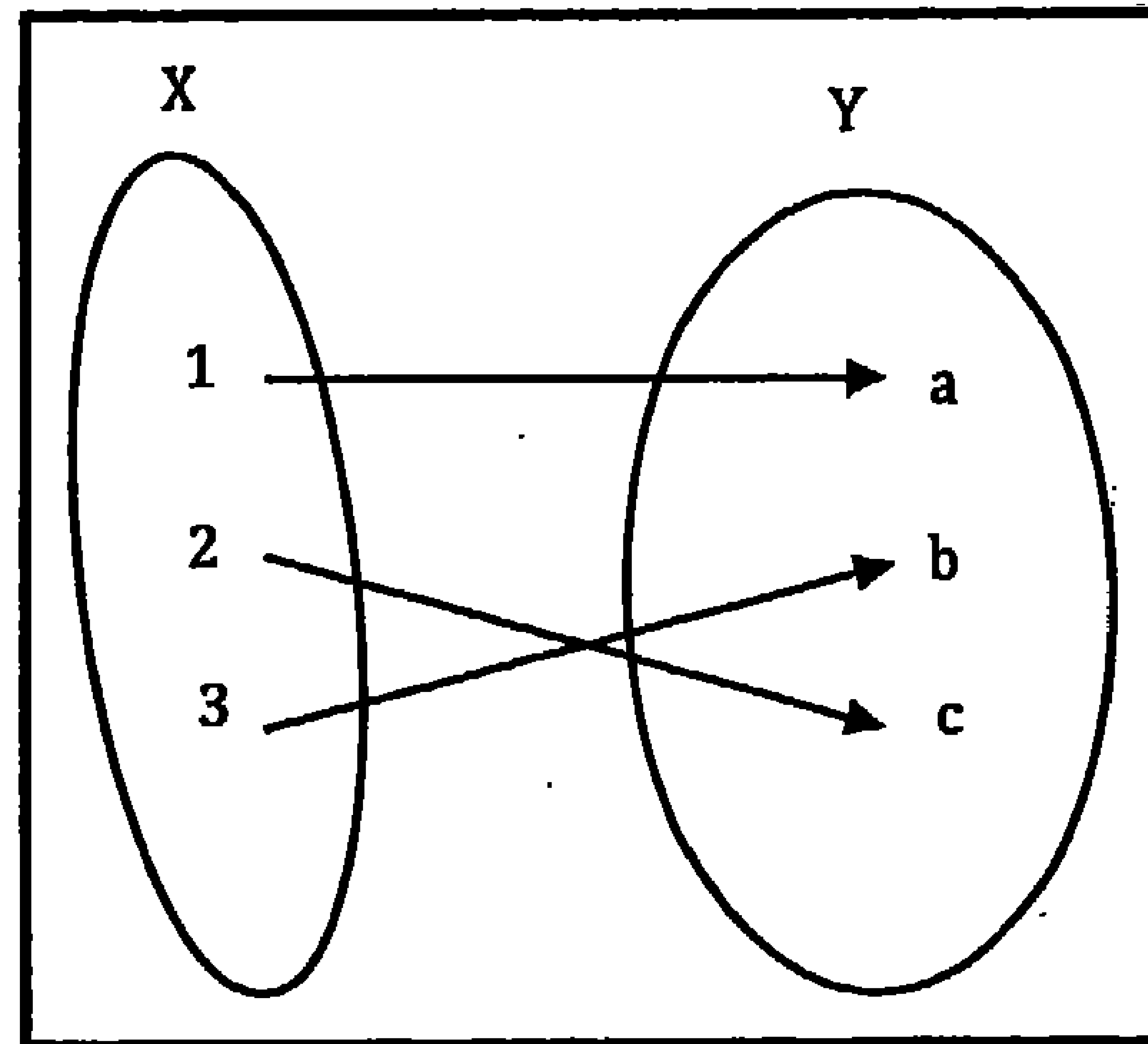
مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة شاملة لكنها ليسـت متباينـة لأن $f(2) = f(3) = b$ ولكـن $3 \neq 2$ وبالتـالي فالدالة f لا تمثل تقابل.

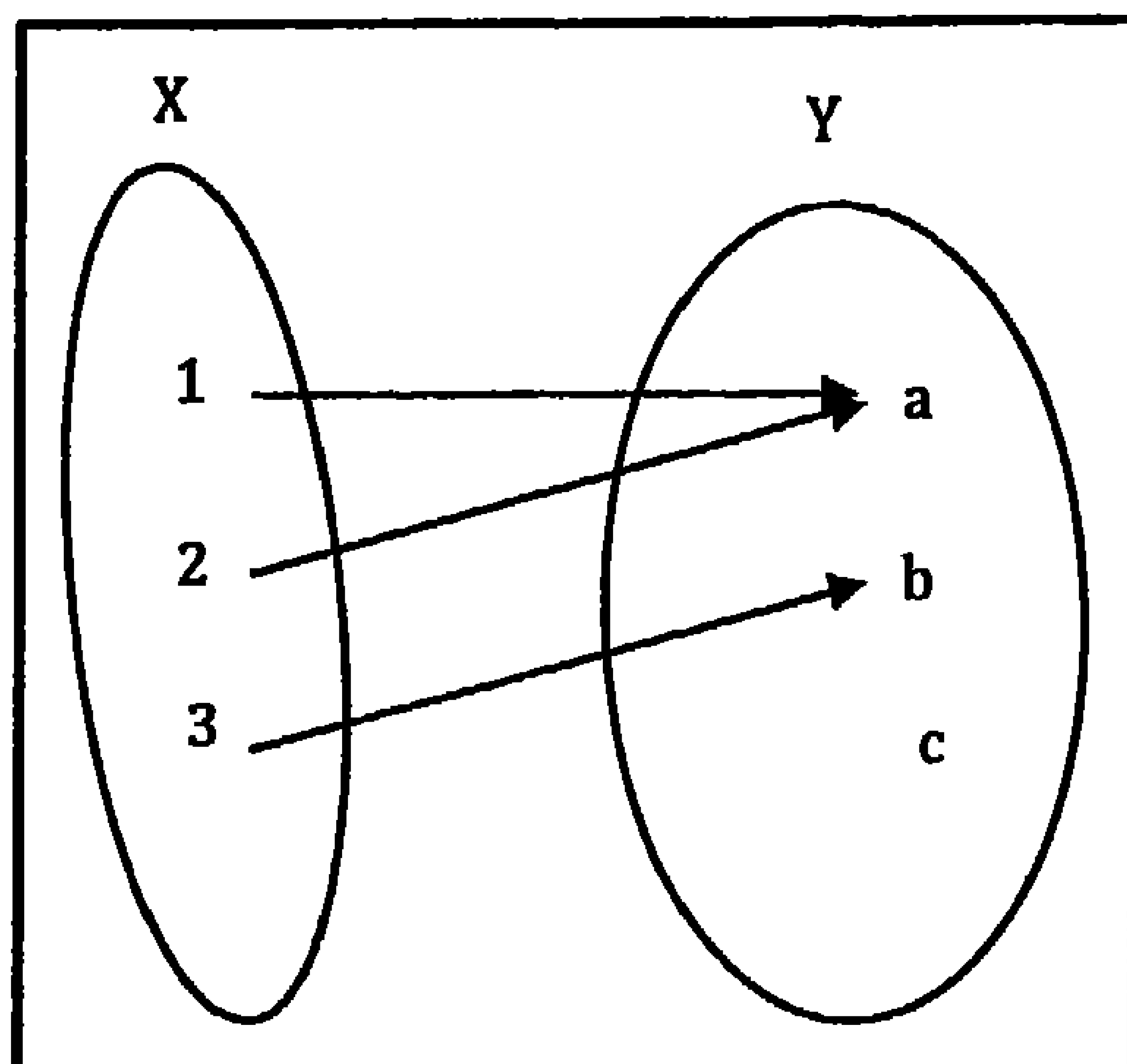
مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة متباينة وشاملة وبالتالي فهي تمثل تقابل.

مثال: إدرس الدالة من حيث كونها هل هي متباينة وهل هي شاملة وهل هي تمثل تقابل؟



الحل:

الدالة ليست متباينة لأن $f(1) = f(2) = a$ لكن $1 \neq 2$.

وكذلك الدالة ليست شاملة لأن العنصر $c \in Y$ ولكن $f^{-1}(c)$ غير معرفه .

وبالتالي فالدالة لا تمثل تقابل.

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ المعرف بالشكل $f(x) = 2x$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

الحل:

أولاً: لإختبار هل الدالة متباينة نفرض أن

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

إذن الدالة متباينة.

ثانيا: الدالة ليست شاملة لأن إذا كانت $f(x) = 1 \in \mathbb{N}$ فإن $2x = 1$

إذن $x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

إذن $f^{-1}(1)$ غير معرف.

وبالتالي الدالة لا تمثل تقابل.

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ المعرفة بالشكل $f(x) = 2x + 1$ فهل الدالة f متباينة أو شـاملة أو تمثل تطابق؟

الحل:

اولا: لإختبار هل الدالة متباينة نفرض أن

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

إذن الدالة متباينة.

ثانيا: الدالة ليست شاملة لأن إذا كانت $f(x) = 0 \in \mathbb{N}$ فإن $2x + 1 = 0$

إذن $x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

إذن $f^{-1}(0)$ غير معرف.

وبالتالي الدالة لا تمثل تقابل.

مثال: إذا كانت $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ دالة معرف بالشكل $f(x) = x + 1$

1. إدرس هل الدالة متباينة – شاملة – تقابل؟
2. أوجد $f(5)$ و $f(\{-1, 3\})$ و$f^{-1}(0)$ و $f^{-1}(\{1,7\})$.
3. إرسم مخططا سهما بحيث يبين فيه صور العناصر $-2 \leq x \leq 2$.
4. هل f^{-1} تمثل دالة من $\mathbb{Z}$ إلى نفسها ؟ إذا كان الجواب بنعم فإكتب تعريف f^{-1} .

الحل:

أولاً: لإختبار هل الدالة f متباينة؟ لذا نفرض أن:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

إذن الدالة f متباينة.

ومن الواضح أن الدالة f دالة شاملة وبالتالي فهي تمثل تقابل.

ثانياً:

$f(5) = 6, f(\{-1,3\}) = \{0,4\}, f^{-1}(0) = \{-1\}, f^{-1}(\{1,7\}) = \{0,6\}$

ثالثاً:

...	-2	-1	0	1	2	...
	↓	↓	↓	↓	↓	
...	-1	0	1	2	3	...

رابعا: طالما أن f دالة تمثل تقابل فإن الدالة العكسية f^{-1} تمثل أيضا تقابل ولتعينه نستخدم الدالة العكسية:

$y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = y - 1$

$\Rightarrow f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ المعرف ب $f(n,m) = n + 1$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f هي دالة غير متباينة لأن

$f(1,1) = f(1,2) = 2$

ولكن $(1,1) \neq (1,2)$

ثانياً: من الواضح أن الدالة f شاملة.

ثالثاً: الدالة f لا تمثل تقابل لإنها ليست متباينة.

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف ب $f(x) = x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟ ثم حدد مدى الدالة؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة غير متباينة لأن

$f(-1) = f(1) = 1$

ولكن $1 \neq -1$

ثانياً: الدالة f دالة ليست شاملة لأن جميع الأعداد السالبة في المستقر $\mathbb{R}$ ليست لها صورة في المنطلق فعلى سبيل المثال $f^{-1}(-2)$ غير معرف وبالتالي فالدالة ليست شاملة.

ثالثاً: الدالة f ليست تقابل.

رابعاً: المدى يمكن وصفه كما يلي:

$$R(f) = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ المعرف ب $f(x) = x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة غير متباينة لأن

$$f(-1) = f(1) = 1$$

ولكن $1 \neq -1$

ثانياً: الدالة f دالة شاملة

ثالثاً: الدالة f ليست تقابل.

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ المعرف ب $f(x) = x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة متباينة.

ثانياً: الدالة f دالة ليست شاملة لأن جميع الأعداد السالبة في المستقر $\mathbb{R}$ ليست لها صورة في المنطلق فعلى سبيل المثال $f^{-1}(-2)$ غير معرف وبالتالي فالدالة ليست شاملة.

ثالثاً: الدالة f ليست تقابل.

مثال: إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ المعرف ب $f(x) = x^2$

فهل f دالة متباينة – شاملة – تقابل؟

الحل:

أولاً: الدالة f دالة متباينة.

ثانياً: الدالة f دالة شاملة

ثالثاً: الدالة f تمثل تقابل.

نظرية (5.5.3.1): لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن f تكون تقابل إذا وفقط إذا كان $f(X\backslash A) = Y\backslash f(A)$ وذلك لكل $A \subseteq X$.

{أو بإسلوب أخر $f(A') = f'(A)$ وذلك لكل $A \subseteq X$ }.

البرهان:

أولاً: نفرض أن الدالة f تمثل تقابل و أن $A \subseteq X$ ونريد إثبات أن $f(A') = f'(A)$ ؟

بما أن:

$$A \cap A' = \varphi, \qquad A \cup A' = X$$

وبما أن الدالة f تقابل فإنها متباينة و شاملة وبالتالي:

$$f(A) \cap f(A') = \varphi, \qquad f(A) \cup f(A') = f(X) = Y$$

إذن $f(A')$ لها مكملة $f(A)$ وهذا يعني أن:

$$f(A') = Y\backslash f(A) = f'(A)$$

عكسياً: نفرض أن $f(A') = f'(A)$ وذلك لكل $A \subseteq X$ ونريد إثبات أن الدالة f تمثل تقابل أي إنها متباينة و شاملة؟

1. لإثبات أن الدالة متباينة؟ نفرض أن

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 \notin \{x_2\} \Rightarrow x_1 \in \{x_2\}'$$

$$\Rightarrow f(x_1) \in f(\{x_2\}')$$

$$\Rightarrow f(x_1) \in f'(\{x_2\})$$

$$\Rightarrow f(x_1) \notin f(\{x_2\})$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(\{x_2\})$$

2. لإثبات أن الدالة f شاملة؟

بما أن:

$$X = A \cup A'$$

$$\Rightarrow f(X) = f(A) \cup f(A') = f(A) \cup f'(A) = Y$$

إذن الدالة شاملة.

نظرية (5.5.3.2): إذا كانت $f: X \to Y$ دالة و X و Y مجموعتين غير خاليتين فإن الخاصيتين التاليتين تكونا متكافئتين:

1. f دالة متقابلة .
2. توجد دالة g من Y إلى X بحيث تكون $g \circ f = I_x$ و $f \circ g = I_y$.

البرهان:

(i)→(ii)

بما أن الدالة $f: X \to Y$ دالة متباينة فإنها من نظرية (5.5.1.4) توجد دالة $g_1: Y \to X$ بحيث تكون $g_1 \circ f = I_x$.

وبما أن الدالة $f: X \to Y$ شاملة فإنها من نظرية (5.5.2.3) توجد دالة $g_2: Y \to X$ بحيث تكون $f \circ g_2 = I_y$.

وبالتالي يكون لدينا:

$$g_2 = I_x \circ g_2 = (g \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ I_y = g_1$$

إذن:

$$f \circ g = I_y, \qquad g \circ f = I_x$$

(ii)→(iii)

نفرض أنه توجد دالة $g: Y \to X$ بحيث تكون $g \circ f = I_x$

إذن من نظرية (5.5.1.4) فإن الدالة f تكون متباينة.

كذلك إذا وجدت دالة $g: Y \to X$ بحيث تكون $f \circ g = I_y$

إذن من نظرية (5.5.2.3) فإن الدالة f تكون شاملة.

إذن الدالة f دالة متقابلة.

ملاحظة: كل دالة تمثل تقابل $f: X \to Y$ تكون مرتبطة بدالة وحيدة $g: Y \to X$ تمثل أيضا تقابل وتحقق $g \circ f = I_x$ و $f \circ g = I_y$ وفي هذه الحالة الدالة g تسمى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها بالرمز f^{-1} وتحقق:

$$\forall x \in X, y \in Y: f(x) = y \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

نظرية (5.5.3.3): لتكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دالتان فإن:

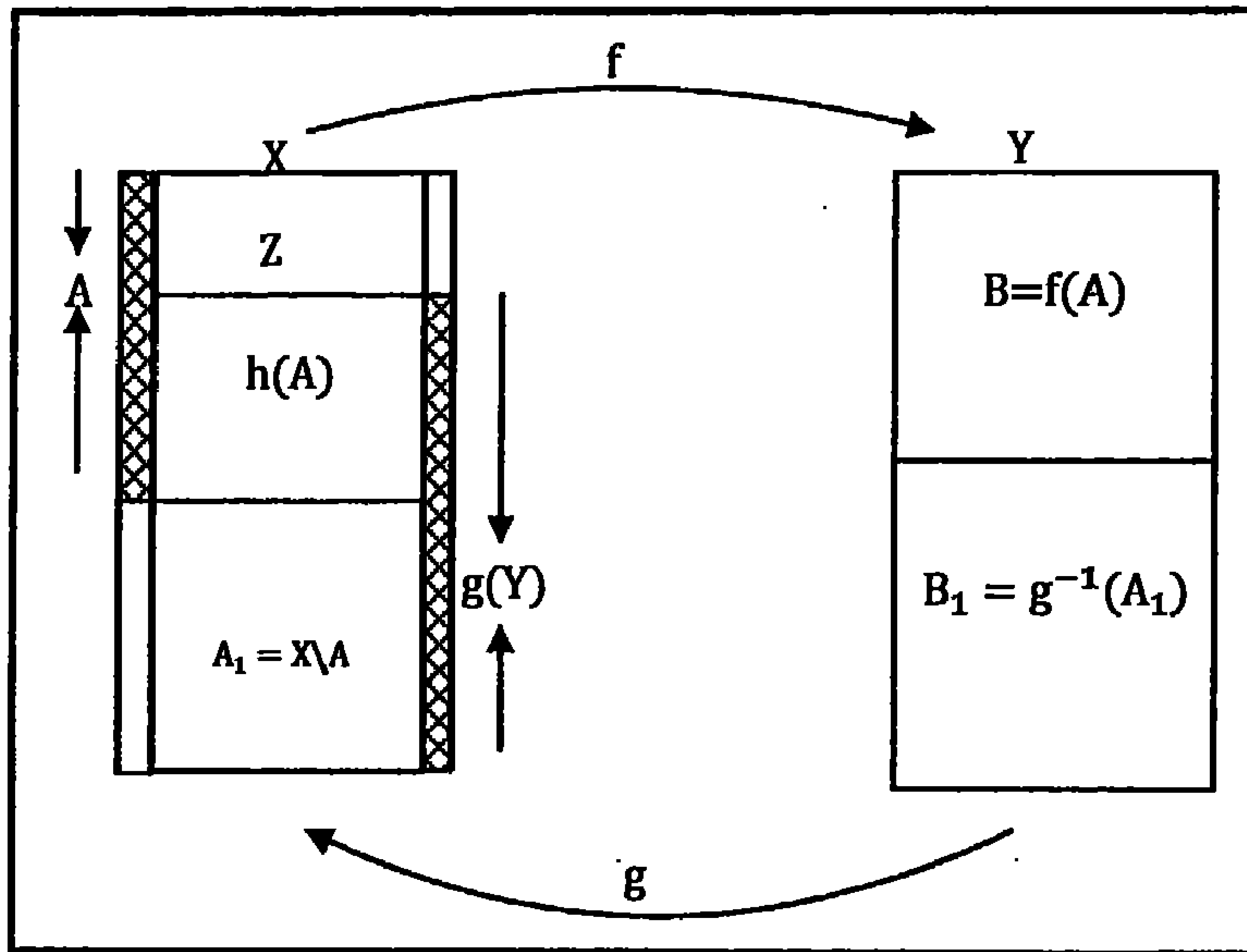
إذا كانت f و g دالتان متقابلتان فإن $g \circ f$ دالة متقابلة.

البرهان: إذا كانت كلا من f و g تمثل تقابل فإنهما متباينان وشاملتان وبالتالي من نظرية (5.5.1.5) ونظرية (5.5.2.4) تكون دالة التركيب $g \circ f$ أيضا تكون دالة متباينة وشاملة وبالتالي تمثل تقابل.

نظرية (5.5.3.4): Schroder Bernstein's Theorem : لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين فإذا وجدت دالة متباينة $f: X \to Y$ ودالة متباينة أخرى $g: Y \to X$ فإنه توجد دالة من X إلى Y تمثل تقابل.

البرهان:

الشكل التالي لتوضيح البرهان:



نفرض أن $Z = X \backslash g(Y)$ و $h = g \circ f$ و $J = \{M \in P(X): Z \cup h(M) \subseteq M\}$

بما أن $X \in J$ إذن $J \neq \varphi$ وبالتالي نضع $A = \cap_{M \in J} M$ ثم نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: إثبات أن $A \in J$ ؟

بما أن f دالة متباينة

إذن $h(A) = h(\cap_{M \in J} M) = \cap_{M \in J} h(M)$

وبما أن $Z \cup h(M) \subseteq M \quad \forall M \in J$

إذن: $Z \cup h(M) = \cap_{M \in J} Z \cup h(M) \subseteq \cap_{M \in J} M = A$

إذن: $A \in J$

الخطوة الثانية: إثبات أن $A = Z \cup h(A)$ ؟

بما أن $Z \cup h(A) \subseteq A$ وبما أن $A \in J$

إذن $Z \cup h(A) \in J$

إذن $h(Z \cup h(A)) \subseteq h(A)$

إذن $Z \cup h(Z \cup h(A)) \subseteq Z \cup h(A)$

وبما أن A هي تقاطع كل عناصر J فإن $A \subseteq Z \cup h(A) \subseteq A$

إذن $A = Z \cup h(A)$

الخطوة الثالثة: تكوين تجزئة للمجموعة Y ؟

نضع $A_1 = X \backslash A$ و $B = f(A)$ و $B_1 = g^{-1}(A_1)$

ونريد إثبات أن $[B, B_1]$ تشكل تجزئة للمجموعة Y ؟ لذا

أولاً: نثبت أن $[A_1, h(A)]$ تشكل تجزئة للمجموعة $g(Y)$ ؟

بما أن $h(A) \subseteq A$

إذن:

$A_1 \cap h(A) = (X \backslash A) \cap h(A) = \varphi$ ....(1)

$A_1 \cup h(A) = (X \backslash A) \cup h(A) = (X \backslash A) \cup (A \backslash Z) = X \backslash Z$

$= X(X \backslash g(Y)) = g(Y)$..(2)

إذن من (1) و (2) نحصل على أن $[A_1, h(A)]$ تشكل تجزئة للمجموعة $g(Y)$

إذن $[g^{-1}(A_1), g^{-1}(h(A))]$ تشكل تجزئة للمجموعة $g^{-1}(g(Y)) = Y$

إذن $[B, B_1]$ تشكل تجزئة للمجموعة Y

وذلك لأن $g^{-1}(A_1) = B_1$ و $g^{-1}(h(A)) = f(A) = B$

الخطوة الرابعة:

بما أن دالة المقصور $f|_A : A \rightarrow B = f(A)$ تمثل تقابل.

كذلك دالة المقصور $g|_{B_1}: B_1 \to A_1 = g(B_1)$ تمثل تقابل.

كذلك دالة المقصور $g^{-1}|_{A_1}: A_1 \to B_1 = g^{-1}(A_1)$ تمثل تقابل.

وبالتالي نعرف دالة:

$$\psi: X = A \cup A_1 \to Y = B \cup B_1$$

بالشكل:

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{if } x \in A_1 \end{cases}$$

وهذا الدالة ψ حسنة التعريف لأن كلاً من f و g^{-1} دالة متباينة كما أن الدالة ψ تمثل تقابل لأن $\psi = f|_A + g^{-1}|_{A_1}$.

نظرية (5.5.3.5): لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين فإذا وجدت دالة شاملة $f: X \to Y$ ودالة شاملة أخر $g: Y \to X$ فإنها توجد دالة من X إلى Y تمثل تقابل.

البرهان: بإتباع نفس إسلوب برهان نظرية (5.5.3.4).

تمارين

1. لتكن $A = \{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ مجموعة ولتكن:

$$f(x) = x^2 + x + 3, \quad g(x) = 2x - 5$$

فإحسب:

- المدى لكلاً من f, g
- بيان كلاً من f, g

2. لتكن $A = \{-3, -1, 0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ مجموعة ولتكن:

فإحسب:

- كم عدد الدوال من A إلى B.
- إذا كانت $f(x) = x^2 - 3, g(x) = 2x^2 - 5$ فإحسب بيان ومدى كلاً من الدوال f, g.

3. لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{a, b, c, d, d, e\}$ بين أي من العلاقات الأتية تكون دالة وحدد مجموعة تعريفها وإذكر سبباً واحد على الأقل في حالة كون العلاقة ليست دالة:

- $R = \{(1, e), (2, d), (3, c), (4, b), (5, a)\}$
- $R = \{(1, c), (2, c,), (3, c), (4, b), (5, b)\}$
- $R = \{(2, c), (3, d), (4, d), (5, e)\}$
- $R = \{(1, d), (2, c), (3, e), (4, a), (2, b)\}$
- $R = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3), (e, 3)\}$
- $R = \{(a, 1), (c, 3), (d, 4), (e, 3)\}$

4. إرسم مخططا سهمياً لكل علاقة وردت في التمرين الأول.

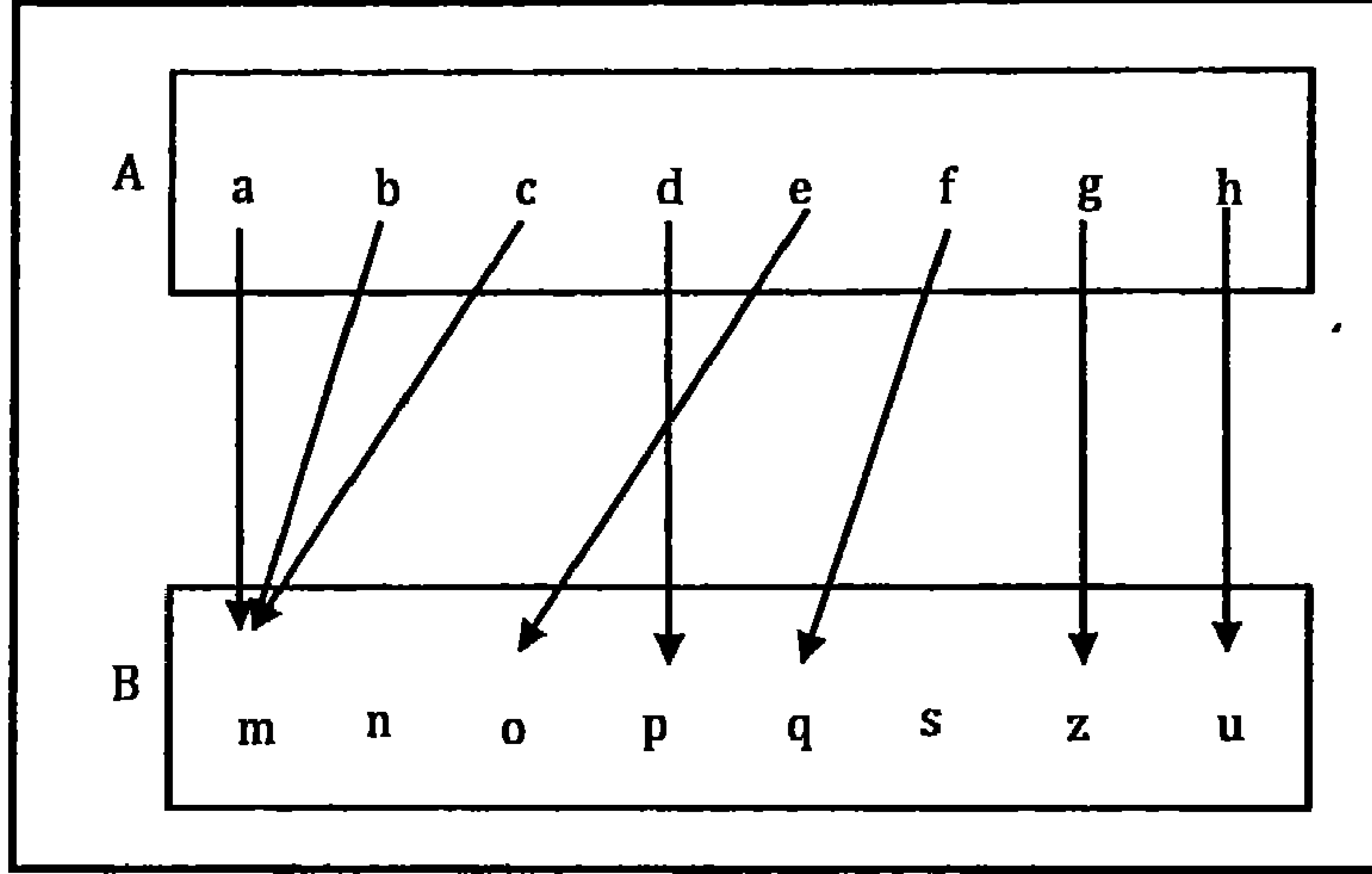
5. إذا كانت $R \subseteq \mathbb{R}^2$ فبين ما إذا كانت R دالة أم لا مع التعليل في كلاً من الحالات الأتية:

- $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 4\}$
- $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge 4x - y = 1\}$

- $R = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \land x^2 + y^2 = 4 \land -2 \leq x \leq 2\}$

6. لتكن $f: A \to B$ دالة معرفة بالمخطط السهمي التالي حيث:

$A_1 = \{c,d\}, A_2 = \{a,d,f\}, B_1 = \{m,p,q\}, B_2 = \{n,o,q\}$



أوجد كلا من:

- $f(d)$ و $f^{-1}(n)$.
- $f(A_1 \cup A_2)$ و $f(A_1) \cup f(A_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f(A_1 \cap A_2)$ و $f(A_1) \cap f(A_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ و $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ و $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ ثم قارن بينهما.
- $f(A_1)$ و $f^{-1}(f(A_1))$ وتحقق أن $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.
- $f^{-1}(B_2)$ و $f(f^{-1}(B_2))$ وتحقق أن $f(f^{-1}(B_2)) \subset B_2$.
- $f^{-1}(B_1')$ و $(f^{-1}(B_1))'$ ثم قارن بينهما.

7. لتكن $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ دالة معرفة على النحو التالي $f(x) = 2x - 5$

- مثل هذا الدالة بالمخطط السهمي في الفترة $4 \leq x \leq 10$.
- هل هذا الدالة متباينة ؟ ولماذا؟
- هل هذا الدالة شاملة؟ ولماذا؟

- هل هذا الدالة تمثل تقابل؟ ولماذا؟
- أوجد كلاً من $f(1)$ و $f^{-1}(-1)$ و $f^{-1}(0)$ و $f^{-1}(-3)$.
- أوجد $f^{-1}(\{y \in \mathbb{Z}: y \leq -4\})$

8. لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين كما يلي:

$$f(x) = x^2 - 2, \qquad g(x) = 2x + 1$$

- عرف كلاً من الدالتين $h_1 = g \circ f$ و $h_2 = f \circ g$.
- أوجد كلاً من $h_1(4)$ و $h_2(4)$.

9. إدرس الدوال الآتية من حيث كون الدالة متباينة – شاملة – تقابل:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ f(x) = x^2$
3. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
4. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^2$

10. لتكن $f: A \to B$ دالة معرف كما يلي:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}, \qquad A = \mathbb{R} - \{2\}, \qquad B = \mathbb{R} - \{1\}$$

إثبت أن f تمثل تقابل ومن ثم عرف الدالة f^{-1} من B إلى A .

11. لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$ فأي من العلاقات يمثل دالة من X إلى X ولماذا؟

1. $f = \{(2,3), (1,4), (2,1), (3,2), (4,4)\}$
2. $f = \{(2,1), (3,4), (1,4), (2,1), (4,4)\}$
3. $f = \{(3,1), (4,2), (1,1), (4,4)\}$

12. لتكن $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $f: X \to \mathbb{R}^+$ و $g: X \to \mathbb{R}^+$

حيث $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = x + 2$ فأوجد مدى كلا من f و g .

13. إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ حيث $f(x) = x^2 - 4$ فهل f متباينة – شاملة – تقابل؟

14. لتكن كلاً من h, g, f علاقة على $\mathbb{R}^+$ حيث

$$f(x) = \frac{x+2}{x}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

فأي من هذه العلاقات تمثل دالة من $\mathbb{R}^+$ إلى $\mathbb{R}^+$ ولماذا؟

15. هل من الممكن أن تكون الدالة الثابتة متباينة؟ شاملة؟ تقابل؟

16. لتكن $X = \mathbb{R}^+ \backslash \{-\frac{3}{2}\}$ و $Y = \mathbb{R}^+ \backslash \{\frac{1}{2}\}$ و $f: X \to Y$ حيث $f(x) = \frac{x-2}{2x+3}$ فبرهن أن الدالة f دالة عكسية وعينها؟

17. لتكن $f: \mathbb{R} \backslash \{5\} \to \mathbb{R} \backslash \{2\}$ حيث $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ برهن أن f دالة تقابلية ثم أوجد f^{-1} .

18. إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 2$ فإحسب كلاً من:

$f(x+6), g(x+5), \quad f(f(x)), \quad g(g(x)), \quad g \circ f, \quad f \circ g$

19. إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$

فإحسب كلاً من:

$g \circ f, \quad f \circ g, \quad f \circ f, \quad g \circ g$

20. إذا كانت $f: \mathbb{R} \backslash \{2\} \to \mathbb{R} \backslash \{0\}$ و $g: \mathbb{R} \backslash \{-3\} \to \mathbb{R} \backslash \{1\}$ حيث $f(x) = \frac{4}{x-2}$ و $g(x) = \frac{x}{x+3}$

فإحسب كلاً من:

$f+g, \quad f-g, \quad f \circ g, \quad g \circ f, \quad g \circ g$

21. إذا كانت $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ المعرف بالشكل $f(x) = 2x - 3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

22. إذا كانت $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ المعرف بالشكل $f(x) = 2x^2 - 3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

23. إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x) = 2x^3 - 3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

24. إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x) = 2x^2 - 3$ فهل الدالة f متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

25. إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x) = 2x - 3$ فعرف الدالة العكسية إن أمكن ثم حدد هل الدالة f^{-1} متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

26. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=x^3$ فعرف الدالة العكسية إن أمكن ثم حدد هل الدالة f^{-1} متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

27. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=x^2$ فعرف الدالة العكسية إن أمكن ثم حدد هل الدالة f^{-1} متباينة أو شاملة أو تمثل تطابق؟

28. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $f(x)=5x+7$ وكانت $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $g(x)=x^2+3x+2$

فإحسب:

- حاصل ضر ب الدالتان f, g في عدد ثابت $k=7$
- مجموع الدالتان $f+g$
- فرق الدالتان $f-g$
- حاصل ضرب الدالتان $f.g$
- حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$
- هل الدالتان f, g تكونا متساويتان .

29. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $f(x)=x^3+1$ وكانت $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعرف بأنها لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $x\neq-1,\ g(x)=\frac{1}{x^3+1}$

فإحسب:

- حاصل ضر ب الدالتان f, g في عدد ثابت $k=7$
- مجموع الدالتان $f+g$
- فرق الدالتان $f-g$
- حاصل ضرب الدالتان $f.g$
- حاصل قسمة الدالتان $\frac{f}{g}$
- هل الدالتان f, g تكونا متساويتان .

30. إذا كانت $B=\mathbb{R}\backslash\{2\},\ A=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ و $f:A\to B$ تعرف بأنها لكل $x\in A$ فإن $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ فبرهن أن للدالة f يوجد لها دالة عكسية ثم عينها ثم إذا كانت $f:A\to\mathbb{R}$ فهل يوجد في هذه الحالة دالة عكسية ل f .

الفصل السادس

الجبر البولياني
Boolean Algebra

(6-1) علاقة الترتيب

(6-2) العناصر الشهيرة في المجموعة المرتبة

(6-3) الشبكة

(6-4) الجبر البولياني

(6-5) الدوال البوليانية

(6-6) الدوائر المنطقية

(6-7) خرائط كارنوف

تمارين

الفصل السادس

الجبر البولياني

(6-1) علاقة الترتيب

تعتبر علاقة الترتيب من العلاقات المهمة في الرياضيات والتي نحتاج إليها كثيرا في الجبر والتحليل الرياضي وحديثا أصبحت هذه العلاقة مهمة في الحاسبات والمواضيع المتعلقة بها مثل الشبكات و نظرية البيانات والدوائر المنطقية وبالتالي سوف ندرس في هذا الفصل علاقة الترتيب وخواصها الجبرية المتنوعة ثم ندرس الشبكات كنوع خاص من علاقات الترتيب ثم ننتقل بعدها لدرسة الجبر البولياني كنوع خاص من الشبكات.

تعريف (6.1.1): ليكن R علاقة على المجموعة A فإننا نقول أن العلاقة R هي علاقة ترتيب (علاقة ترتيب جزئي) على A أو أن A مجموعة مرتبة بواسطة R إذا كانت R تحقق ثلاث شروط:

1. R تكون إنعكاسية Reflexive بمعنى:

$aRa \ \forall a \in A$

2. R تكون تخالفية Antisymmetric بمعنى:

$\text{if } aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

3. R تكون متعدية Transitive بمعنى:

$\text{if } aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

ملاحظات:

1. إذا كانت R علاقة ترتيب و x,y عنصران من A مرتبطين بواسطة العلاقة R فإننا عادة نستخدم الرمز $\leq$ أو $\preccurlyeq$ أو $>$ أو $\succ$ للدالة على علاقة الترتيب .

2. إذا كانت R علاقة ترتيب و x,y عنصران من A مرتبطين بواسطة العلاقة R وكانت $x < y$ فإن x تسمى العنصر السابق (precedes element) للعنصر y بينما y تسمى العنصر اللاحق (succeeds element) للعنصر x .

3. إذا كانت $\preceq$ علاقة ترتيب على مجموعة غير خالية A فإن العلاقة العكسية $\succeq$ تكون أيضا علاقة ترتيب على نفس المجموعة ونسمى هذه العلاقة (علاقة مذدوجة) Dual Order .

4. إذا كانت R علاقة ترتيب على مجموعة A وكانت x,y عنصران من A مرتبطين بواسطة العلاقة R فإننا نقول أن x , y قابلين للمقارنه comparable .

5. في المجموعة المرتبة A إذا كان أي عنصرين فيها قابلين للمقارنه فإن علاقة الترتيب R تسمى علاقة ترتيب كلي أو علاقة ترتيب خطي Linearly ordered وفي هذه الحالة نسمى A بأنها سلسلة Chain بينما إذا كان يوجد بعض عناصر المجموعة المرتبة A قابلين للمقارنة والبعض الأخر غير قابل للمقارنة noncomparable فإن العلاقة R تسمى علاقة ترتيب جزئي.

6. مخطط هاس Hass Diagram : إذا كانت المجموعة المحدودة الغير خالية A معرفة تحت علاقة ترتيب ما فإننا نستطيع أن ننشأ المخطط السهمي بطريقة مبسطة تسمى مخطط هاس بحيث تكون فيه:

أ. نمثل الإنعكاس بنقطة.

ب. إذا كان $a, b \in A$ حيث $a \neq b$ و $a \leq b$ فإننا نضع b في مستوي أعلى من مستوي a ونصل بينها بخط مستقيم ونتجاهل الخطوط التي نحصل عليها تلقائيا من خاصة التعدي. فمثلاً إذا كان: $a \leq b , b \leq c$ فإننا نصل أولاً بين a , b ثم نصل بين b, c ولا نصل أبدا بين a, c وبالتالي فمخطط هاس يكون إتجاهة دائما من أسفل إلى أعلى.

7. غطاء العنصر cover : إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وكان $a, b \in A$ ، نقول عن b أنه غطاء للعنصر a إذا تحقق :

أ. $a \leq b$.

ب. إذا كان $x \in A$ وكان $a \leq x \leq b$ فإن $x = a$ أو $x = b$ أي إنه لا يوجد عنصر $c \in A$ بحيث يكون $a \leq c \leq b$.

8. إذا كانت لدينا مجموعتان A و B فإننا نستطيع أن ننشأ علاقة ترتيب للأزواج المرتبة معرفة في حاصل الضرب الكرتيزي $A \times B$ وذلك بأحد الطريقتين:

أ. الطريقة الأولى:

$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ if $a_1 \leq a_2$ and $b_1 \leq b_2$

ب. الطريقة الثانية:

$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ if $a_1 < a_2$ or if $a_1 = a_2$, $b_1 < b_2$

مثال: لتكن العلاقة

$R = \{(a, b): a, b \in \mathbb{Z} \wedge a|b\}$

فهل العلاقة R (علاقة تقسم على الأعداد الصحيحة) تمثل علاقة ترتيب على $\mathbb{Z}$ وإذا كانت الإجابة بنعم فحدد هل الترتيب كلي أم جزئي.

الحل:

أولاً: العلاقة R إنعكاسية لأن :

$a|a \forall a \in \mathbb{Z}$

ثانياً: العلاقة R تخالفية لأن:

$2|4$ but $4 \nmid 2$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

إذن علاقة تقسم على الأعداد الصحيحة تمثل علاقة ترتيب.

علاقة الترتيب على المجموعة $\mathbb{Z}$ علاقة ترتيب جزئي لأن$2|6$ و $3|6$ ولكن $3 \nmid 2$ و $2 \nmid 3$

مثال: لتكن العلاقة:

$R = \{(a, b): a, b \in A \wedge a|b\}$

حيث:

$A = \{2, 6, 12, 24, 48\}$

فهل العلاقة R (علاقة تقسم على أعداد المجموعة A) تمثل علاقة ترتيب على A وإذا كانت الإجابة بنعم فحدد هل الترتيب كلي أم جزئي.

الحل:

أولاً: العلاقة R إنعكاسية لأن :

$a|a \ \forall a \in A$

ثانياً: العلاقة R تخالفية لأن:

$2|6$ but $6 \nmid 2$

ثالثاً: العلاقة R متعدية لأن:

$\forall a, b, c \in A, \qquad a|b \;\wedge\; b|c \Rightarrow a|c$

إذن علاقة علاقة تقسم على أعداد المجموعة A تمثل علاقة ترتيب.

علاقة الترتيب على المجموعة A علاقة ترتيب كلـي لأن $2|6$ و $6|12$ و $12|24$ و $24|48$ وبالتالي يمكن أن نمثل هذه المجموعة على هيئة متسلسلة خطية:

$2 < 6 < 12 < 24 < 48$

مثال: لتكن $A = \{a, b, c\}$ وعرف عليها العلاقة:

$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

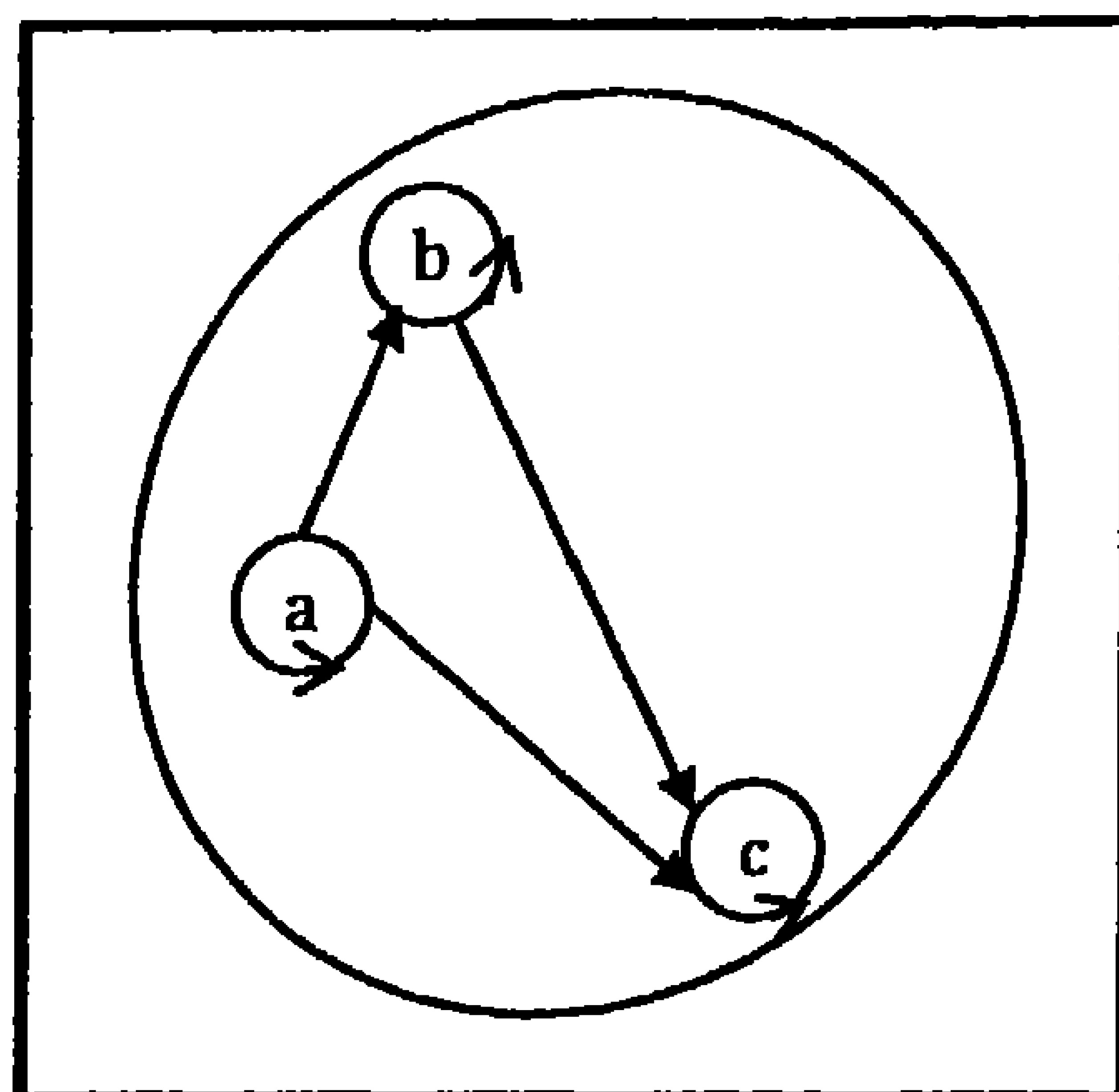
1. فهل العلاقة R تمثل علاقة ترتيب على A؟
2. وإذا كانت الإجابة نعم فحدد نوع علاقة الترتيب ثم إرسـم المخطـط السـهمي ومخطـط هاس لها.
3. حدد العنصر السابق للعنصر b والعنصر اللاحق للعنصر b.

الحل:

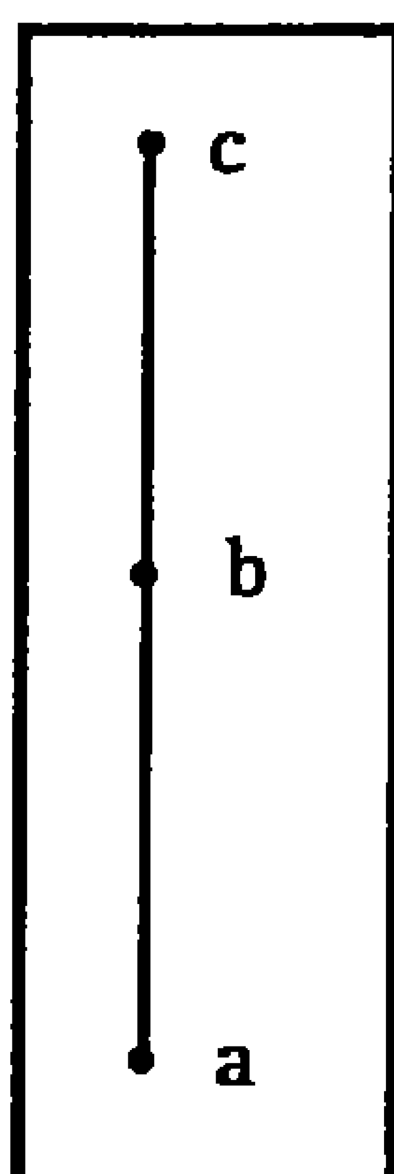
أولاً: واضح أن العلاقة R هي علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية وبالتالي فهي تمثـل علاقـة ترتيب.

ثانياً: حيث أن أي عنصرين في A قابلين للمقارنة تحت العلاقة R فإن علاقة الترتيب R هي علاقة ترتيب كلي.

المخطط السهمي هو:



مخطط هاس هو:



ثالثا: العنصر السابق للعنصر b هو العنصر a بينما العنصر اللاحق للعنصرb هو العنصرc.

مثال: لتكن $A = \{a, b, c, d, e\}$ وعرف عليها العلاقة:

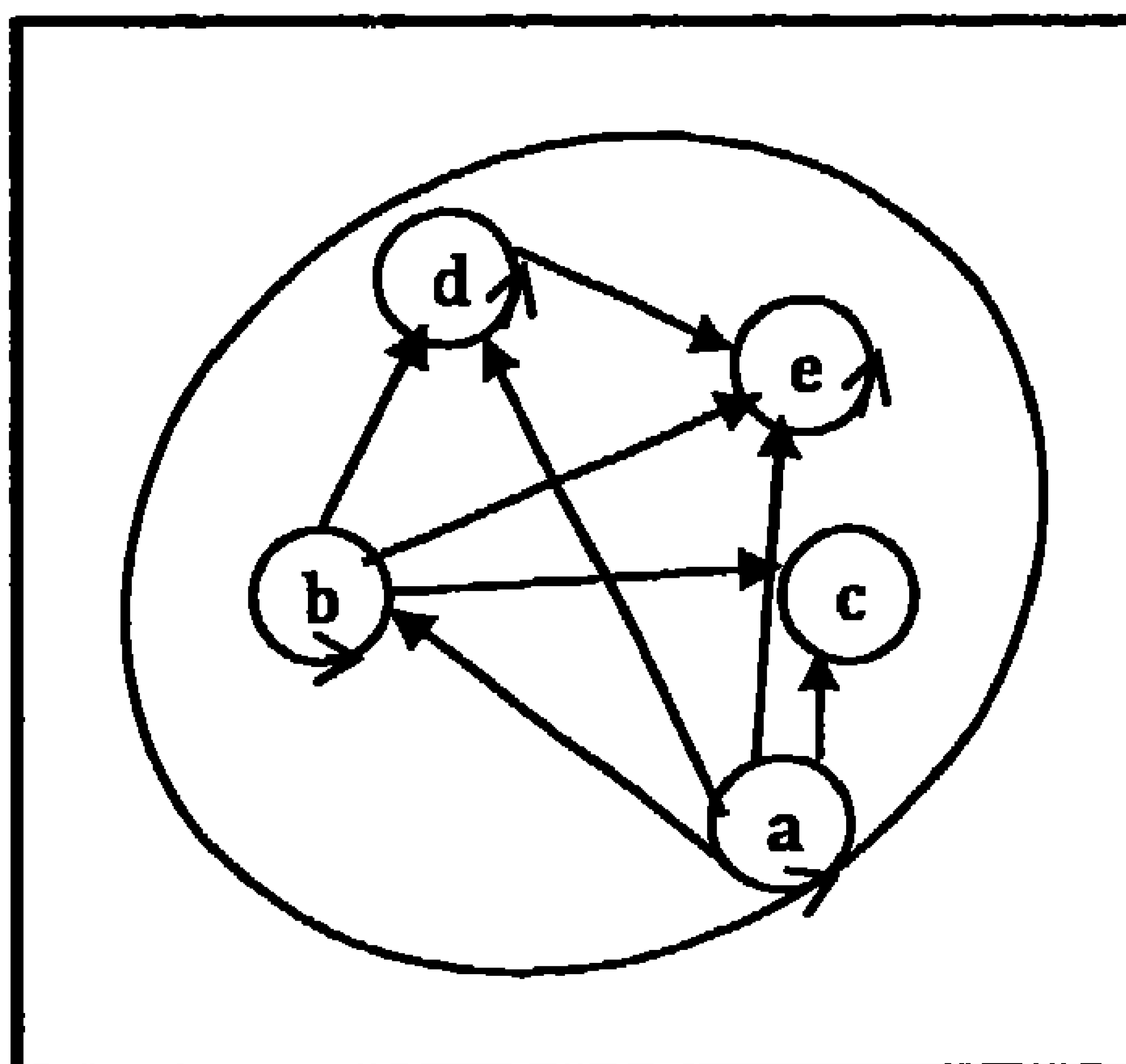
$$R = \left\{\begin{matrix} (a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,c), \\ (b,d),(d,e),(a,c),(b,e),(a,d),(a,e) \end{matrix}\right\}$$

1. فهل العلاقة R تمثل علاقة ترتيب على A؟ وإذا كانت الإجابة نعم فحدد نوع علاقة الترتيب ثم إرسم المخطط السهمي ومخطط هاس لها.
2. حدد العنصر السابق للعنصر b والعنصر اللاحق للعنصر b.

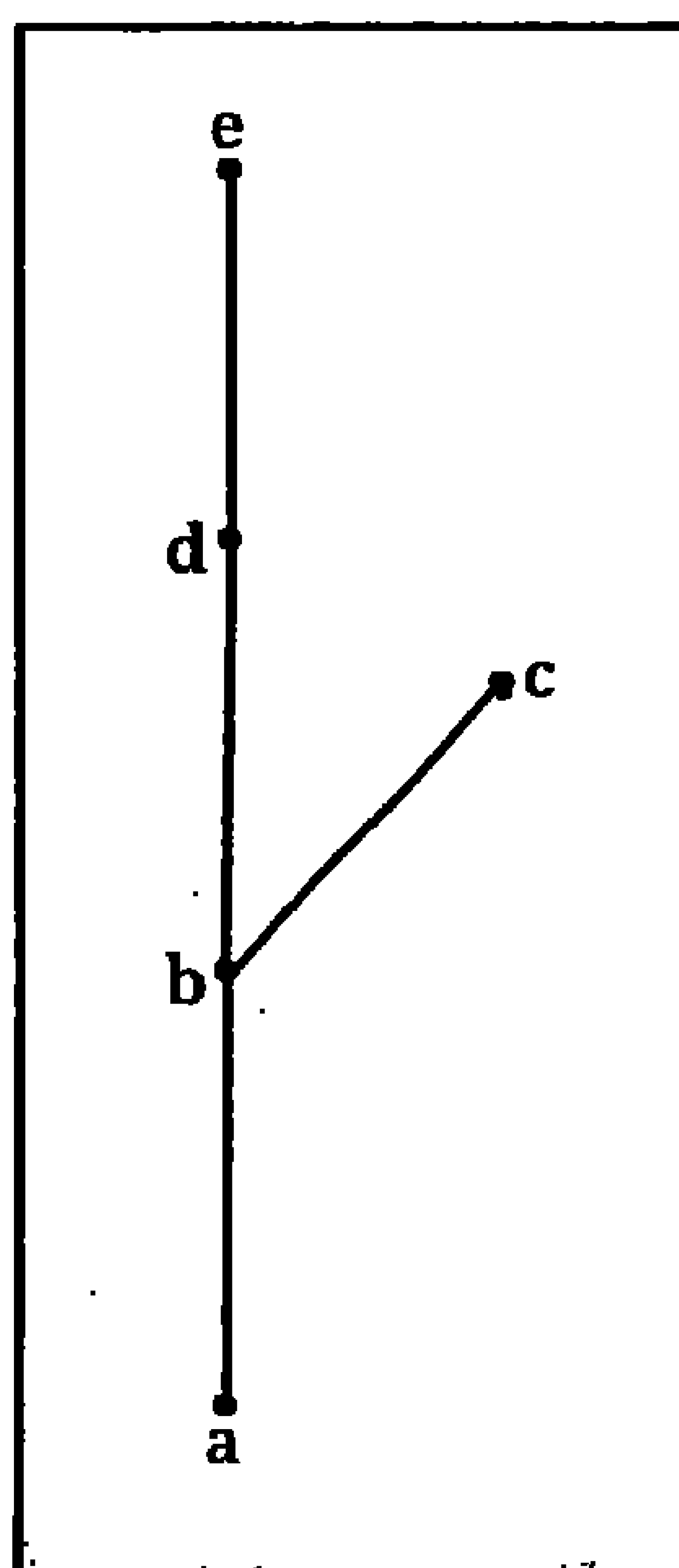
الحل:

أولاً: واضح أن العلاقة R هي علاقة انعكاسية وتخالفيه ومتعدية وبالتالي فهي تمثل علاقة ترتيب.

المخطط السهمي هو:



مخطط هاس هو:



ولكن العنصران d, c غير قابلين للمقارنة إذن فالعلاقة هي علاقة ترتيب جزئي.

ثانياً: العنصر السابق للعنصر b هو العنصر a بينما العنصر اللاحق للعنصر b هو العنصر c والعنصر d.

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c\}$, فإثبت أن $(P(A), \subseteq)$ تكون مجموعة مرتبة ثم حدد نوع علاقة الترتيب ثم إرسم مخطط هاس؟

الحل:

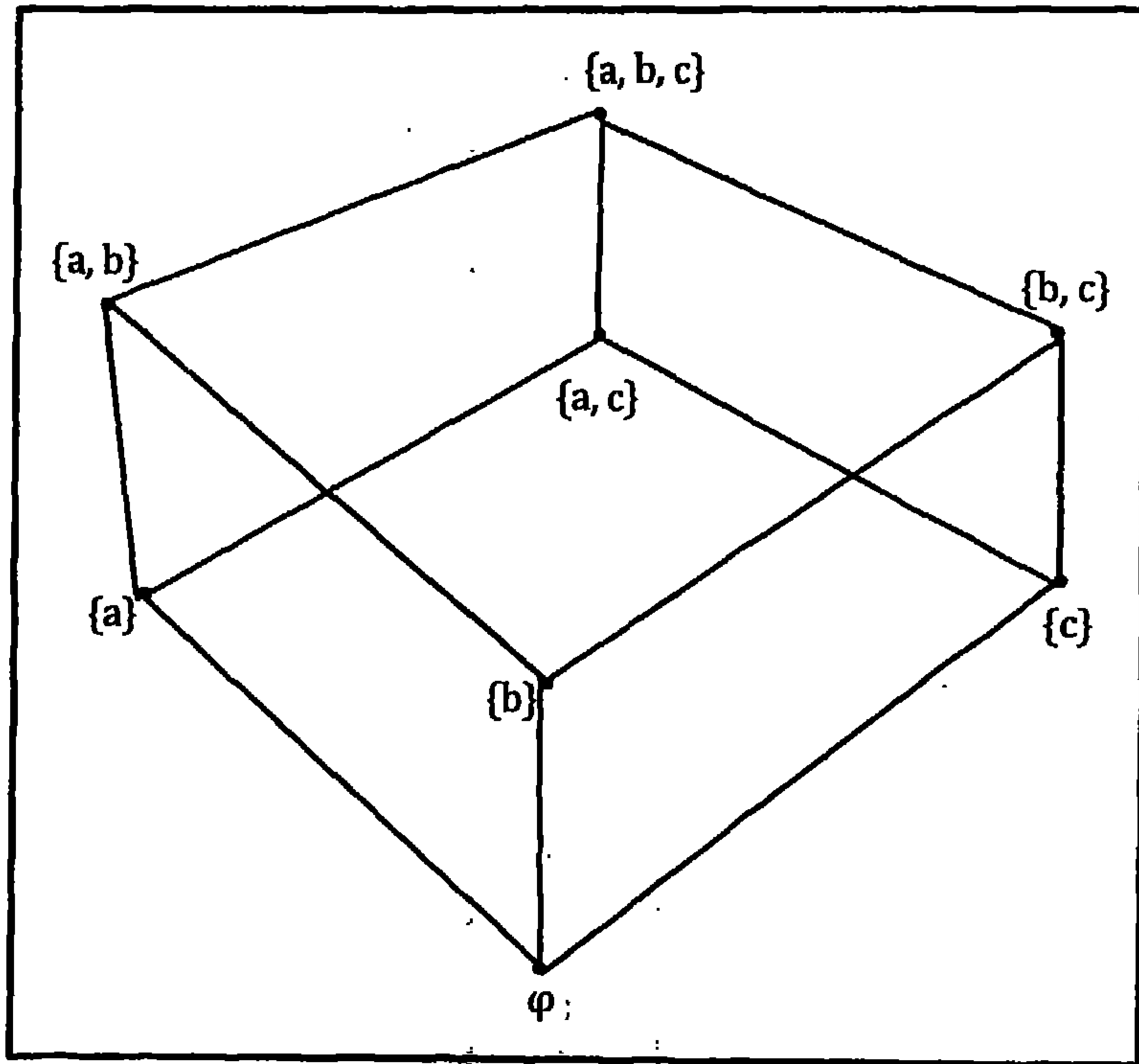
$A = \{a, b, c\}$

$P(A) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

وحيث أن علاقة الإحتواء $\subseteq$ تكون:

1. علاقة الإحتواء تكون إنعكاسية لأن $x \subseteq x \; \forall x \in A$
2. علاقة الإحتواء تكون تخالفية لأن $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ ولكن $\{a, b\} \nsubseteq \{a\}$
3. علاقة الإحتواء تكون متعدية لأن إذا كان $x \subseteq y, y \subseteq z$ فإن $x \subseteq z$

إذن علاقة الإحتواء $\subseteq$ تكون علاقة ترتيب.



وحيث أن العنصرين $\{a\},\{b\}$ غير قابلين للمقارنة

إذن علاقة الإحتواء تمثل علاقة ترتيب جزئي.

مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3,5,6,10,15\}$ ومعرف عليها علاقتان:

1. العلاقة R_1 هي علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$
2. العلاقة R_2 هي علاقة القاسم $|$

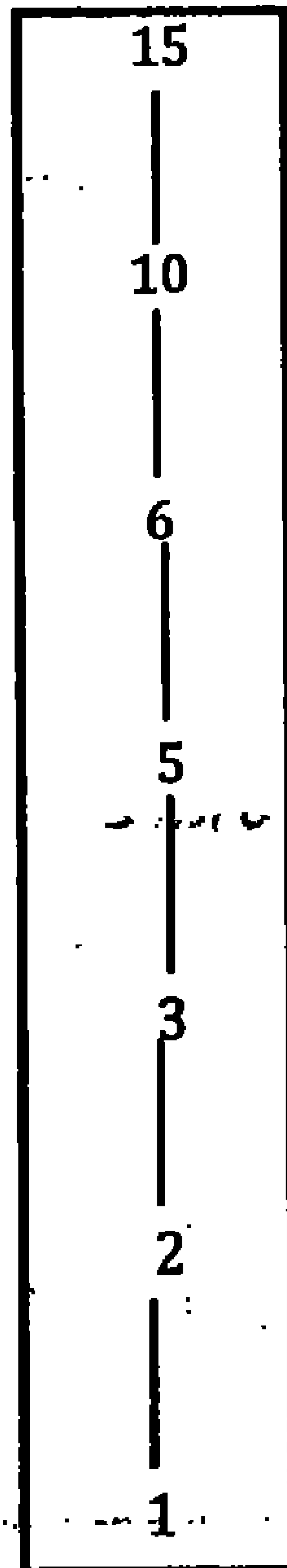
إثبت أن R_1,R_2 هما علاقتا ترتيب وإرسم مخطط هاس وحدد نوعيته.

الحل:

أولاً: العلاقة R_1 هي علاقة أصغر من أو يساوي $\leq$

1. العلاقة R_1 هي علاقة إنعكاسية لأن $x \leq x \; \forall x \in A$
2. العلاقة R_1 هي علاقة تخالفية لأن إذا كان $x \leq y,\; y \leq x$ فإن $x = y$
3. العلاقة R_1 هي علاقة متعدية لأن إذا كان $x \leq y,\; y \leq z$ فإن $x \leq z$

إذن العلاقة R_1 هي علاقة ترتيب ولها مخطط هاس:



إذن العلاقة R_1 هي علاقة ترتيب كلي (ترتيب خطي).

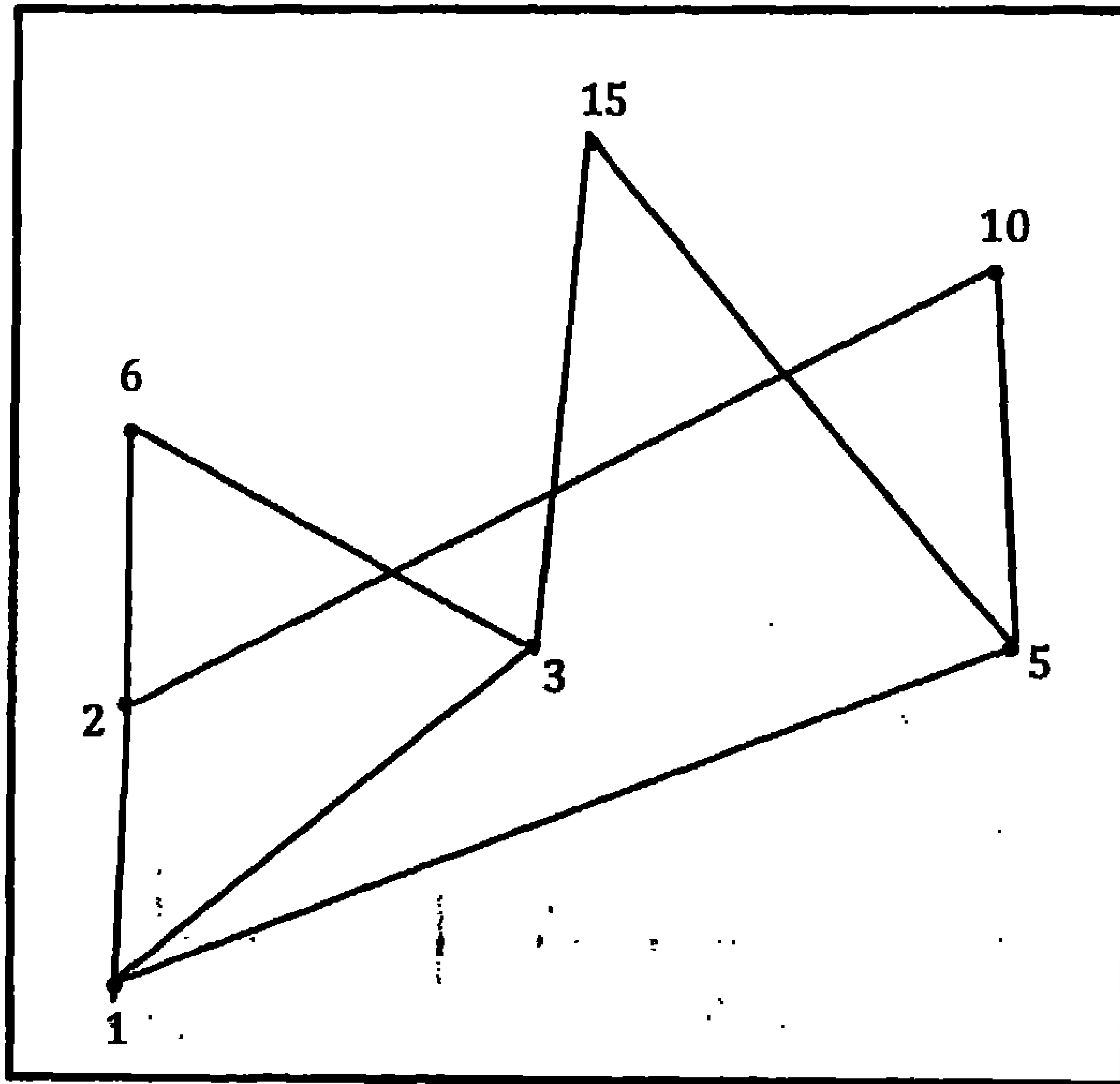
ثانياً: العلاقة R_2 علاقة القاسم |

1. علاقة القاسم R_2 هي علاقة إنعكاسية لأن دائما $x|x$

2. علاقة القاسم R_2 هي علاقة تخالفية لأن $2 \nmid 6$,$2|6$.

3. علاقة القاسم R_2 هي علاقة متعدية لأن إذا كان $x|y, y|z$ فإن $x|z$

إذن علاقة القاسم R_2 هي علاقة ترتيب ولها مخطط هاس:



وحيث أن العنصران 3 ,2 غير قابلين للمقارنة لأن العدد 2 لا يقسم العدد 3 وكذلك العدد 3 لا يقسم العدد 2 وبالتالي تكون علاقة القاسم هي علاقة ترتيب جزئي.

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ ومعرف عليها العلاقة R هي علاقة القاسم | إثبت أن العلاقة R هي علاقة ترتيب ثم إرسم مخطط هاس لها وحدد نوعية علاقة الترتيب.

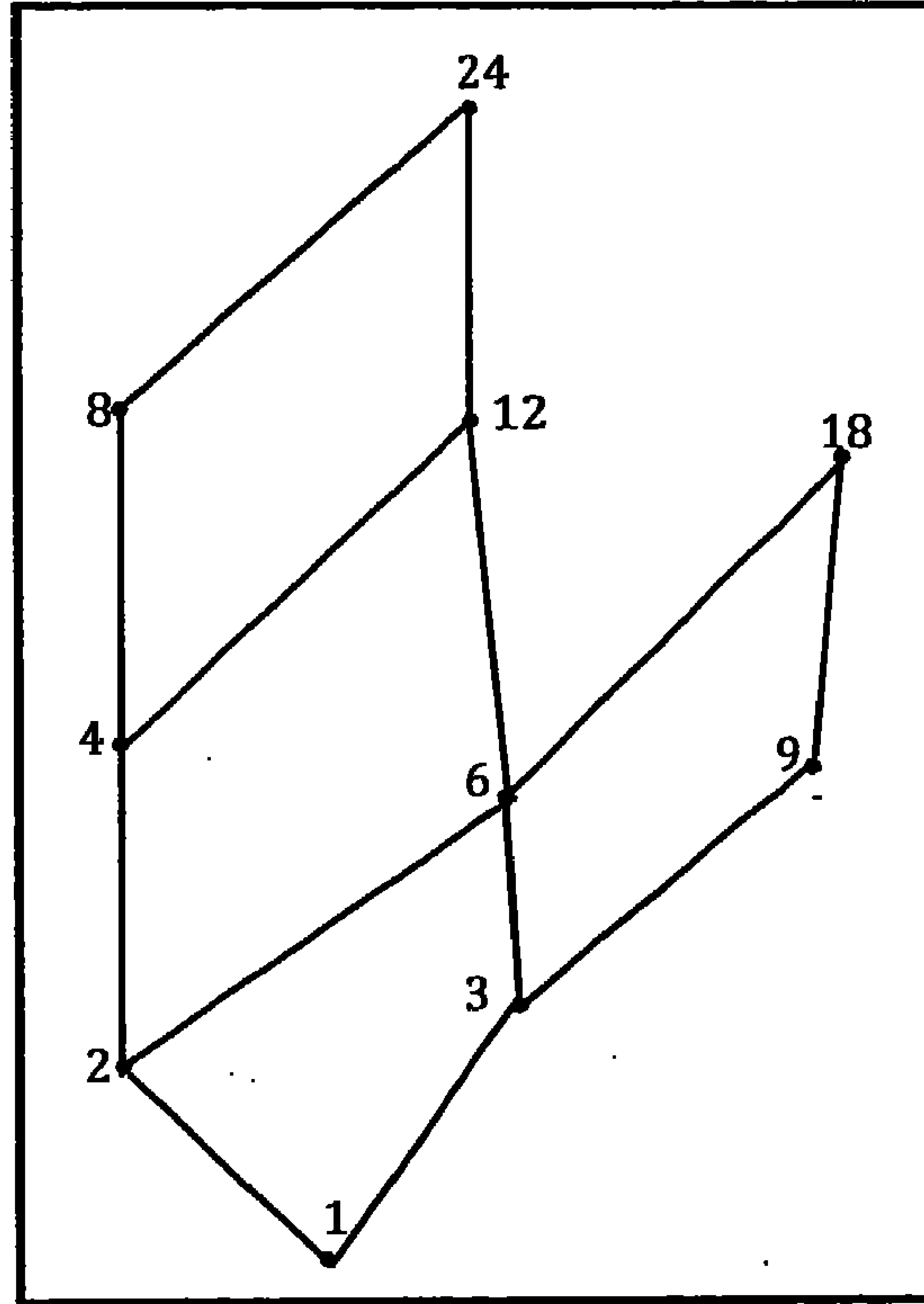
الحل:

1. علاقة القاسم R هي علاقة إنعكاسية لأن دائما $x|x$

2. علاقة القاسم R هي علاقة تخالفية لأن $2 \nmid 6, 6|2$.

3. علاقة القاسم R هي علاقة متعدية لأن إذا كان $x|y, y|z$ فإن $x|z$

إذن علاقة القاسم R هي علاقة ترتيب ولها مخطط هاس:



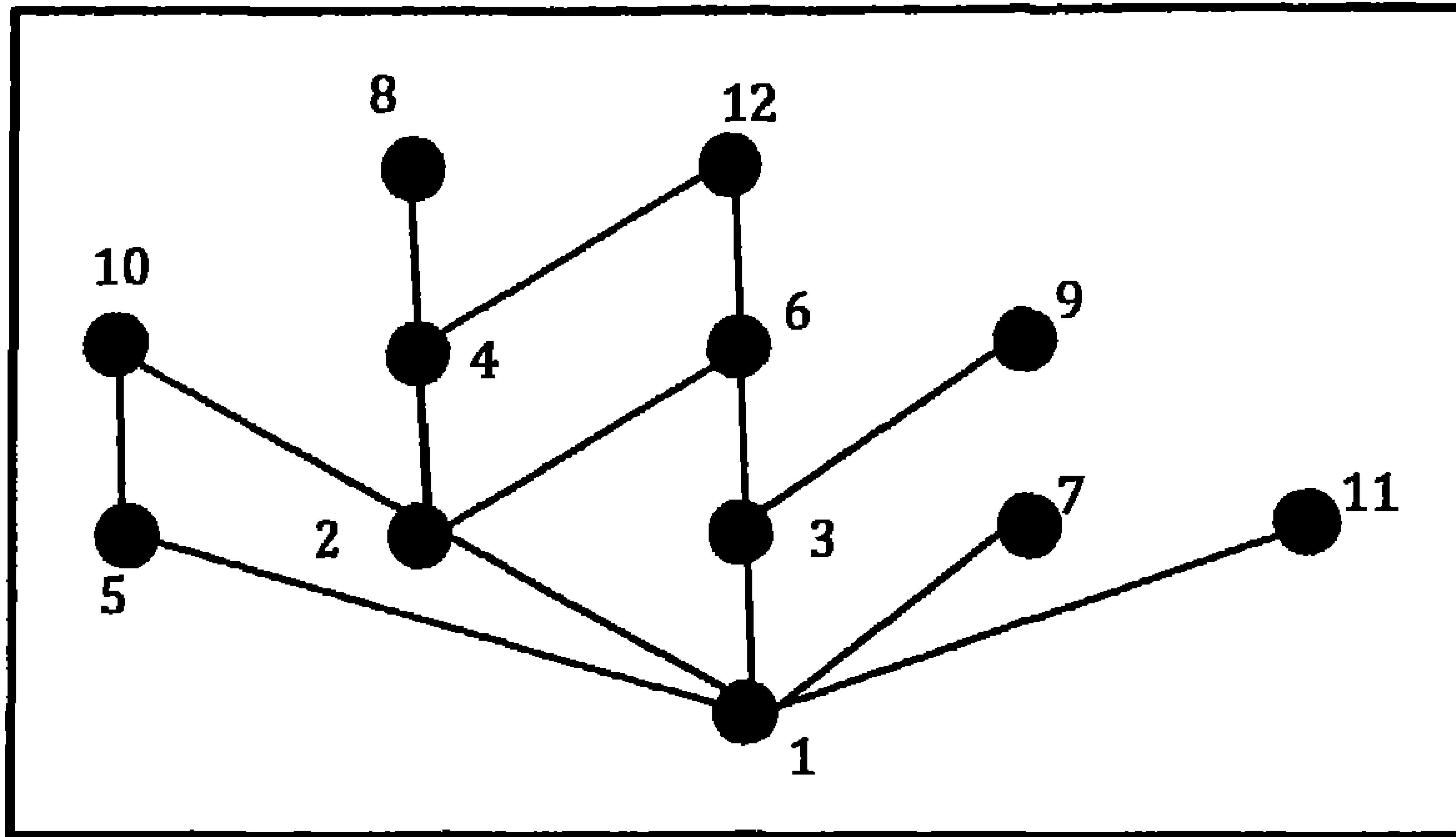
وحيث أن العنصران 2, 3 غير قابلين للمقارنة لأن العدد 2 لا يقسم العدد 3 وكذلك العدد 3 لا يقسم العدد 2 وبالتالي تكون علاقة القاسم هي علاقة ترتيب جزئي.

مثال: إرسم مخطط هاس للمجموعة A تحت علاقة الترتيب x تقسم y حيث:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

ثم إحسب غطاء للعنصر 1 وغطاء للعنصر 2 وغطاء للعنصر 4

الحل:



وبالتالي فإنّ كلاً من العناصر 11 ,5,3,7, 2 هو غطاء للعنصر 1

و10 ,6 , 4 كلاً منهم يمثل غطاء للعنصر 2

و12 , 8 كلاً منهم هو غطاء للعنصر 4

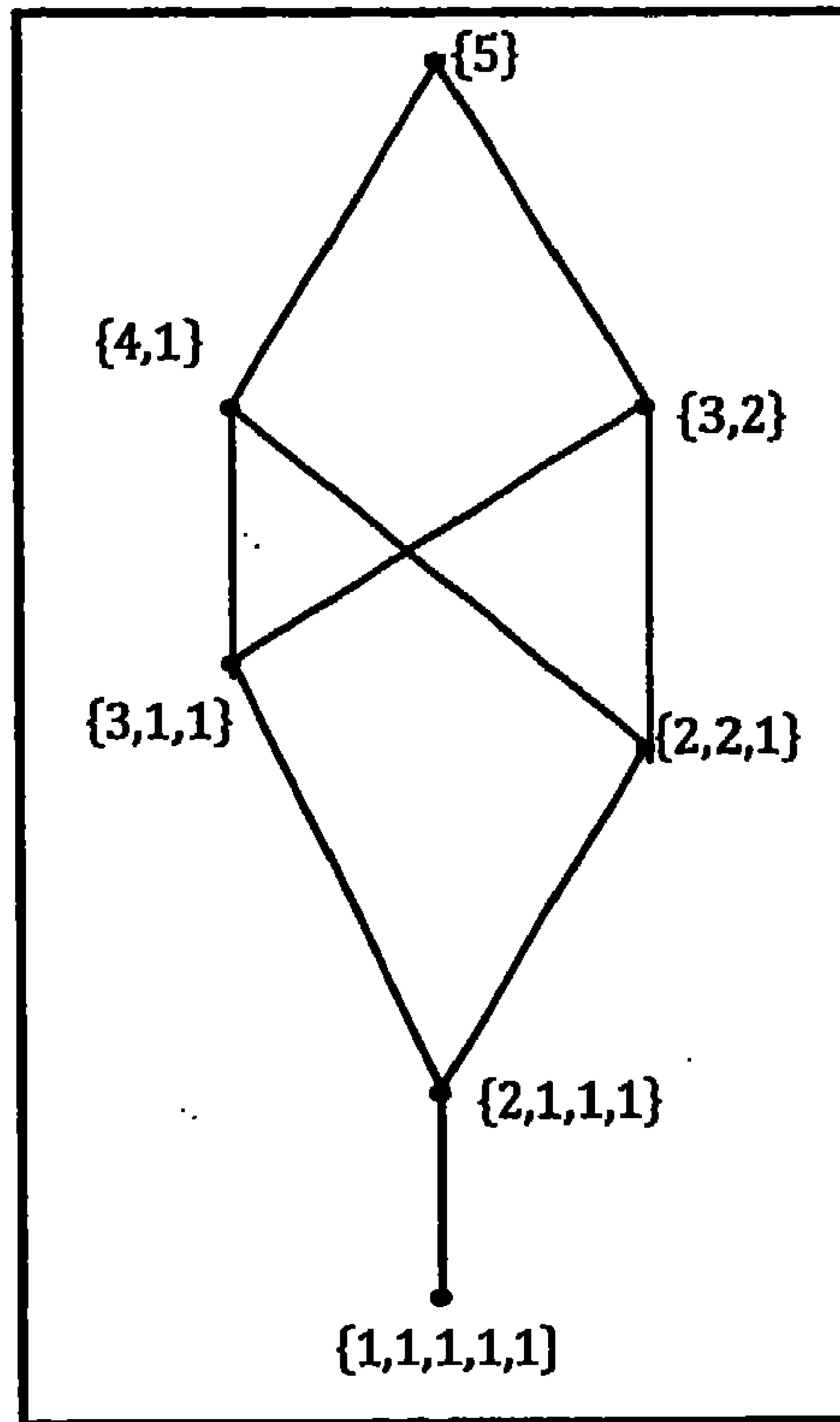
مثال: إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 5

الحل:

مجموعة تجزئة العدد 5 هي:

{[5], [4,1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1] }

إذن مخطط هاس هو:



ملاحظات:

1. إذا كانت المجموعة A مرتبة كلياً تحت علاقة الترتيب R بحيث تكون أي مجموعة غير خالية جزئية من A يكون لها عنصر أصغر فإن المجموعة A تحت علاقة الترتيب الكلي R تسمى علاقة حسنة التريب well-ordered set .
2. كل مجموعة محدودة ومرتبة كلياً تكون حسنة الترتيب.
3. كل مجموعة حسنة الترتيب تكون سلسلة (مرتبة خطياً).
4. كل مجموعة جزئية من مجموعة حسنة الترتيب تكون أيضاً حسنة الترتيب.
5. مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت الترتيب الطبيعي (علاقة أصغر من أو يساوي) فهي تمثل علاقة ترتيب كلي ولكنها لا تكون حسنة الترتيب لعدم وجود العنصر الأصغر للمجموعة الجزئية المتمثلة في مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية أو مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية أو مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة وهكذا من الممكن أن نوجد مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ لا تحتوي عنصر أصغر.

6. مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ تحت الترتيب الطبيعي (علاقة أصغر من) هي علاقة ترتيب كلي وهي تكون حسنة الترتيب وذلك لوجود العنصر الأصغر لأي مجموعة جزئية.

(6-2) العناصر الشهيرة في المجموعة المرتبة

تعريف (6.2.1): إذا كانت A مجموعة مرتبة فإننا نقول أن:

1. M هو عنصر أعظم (Maximum element) في A ونرمز له Max(A) إذا كان لا يوجد في A عنصر يكون أكبر تماما من M بمعنى أن:

$\forall x \in A, M \le x \to M = x$

2. m هو عنصر أصغر (Minimum element) في A ونرمز له Min(A) إذا كان لا يوجد في A عنصر يكون أصغر تماما من m بمعنى أن:

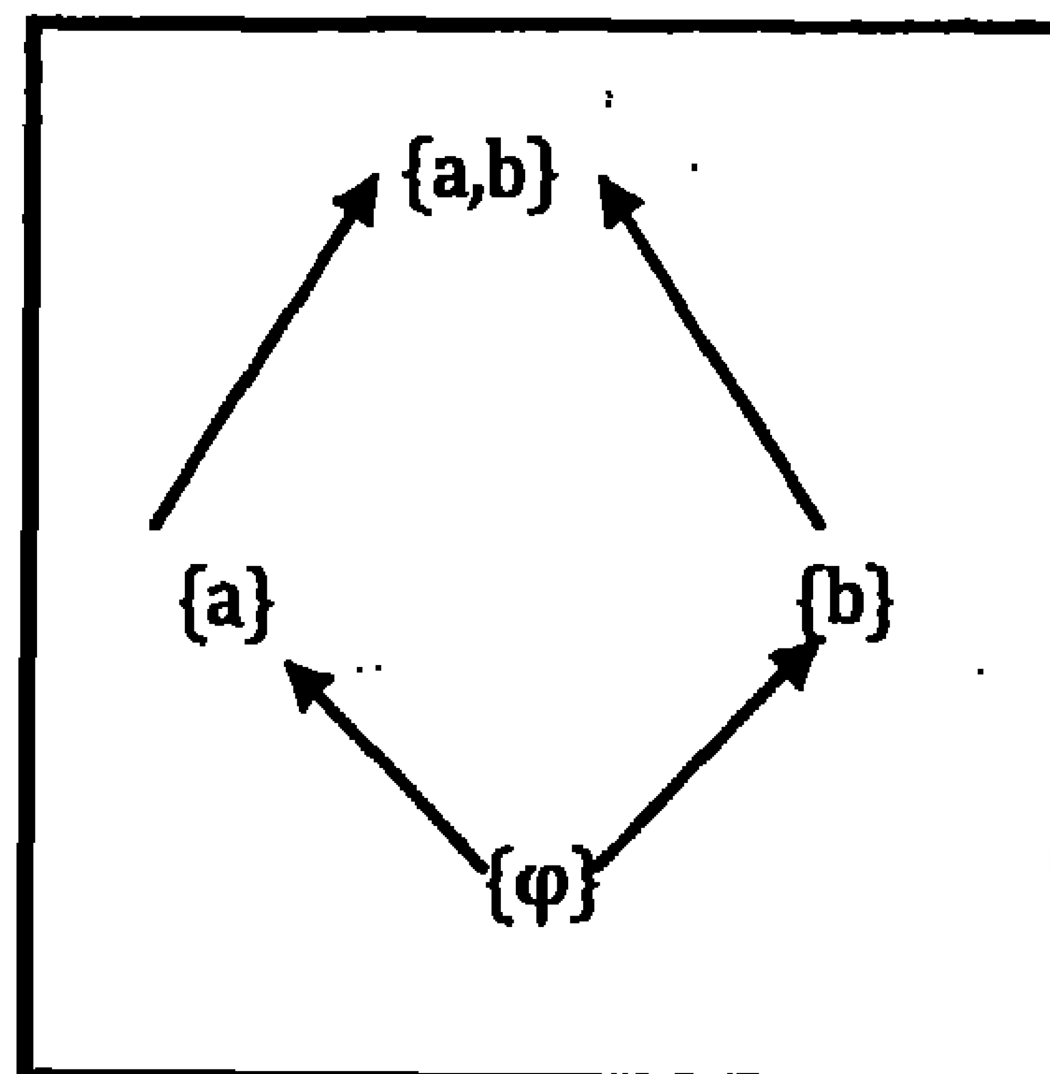
$\forall x \in A, x \le m \to m = x$

ملاحظات:

1. دائما يتواجد العنصر الأعظم Max(A) في قمة المخطط بينما يتواجد العنصر الأصغر Min (A) في أسفل المخطط.
2. قد يتواجد أكثر من عنصر أعظم Max(A) وكذلك قد يتواجد أكثر من عنصر أصغر Min (A) .

مثال: إذا كانت $A = \{a, b\}$ و $(P(A), \subseteq)$ تمثل علاقة ترتيب فحدد أعظم عنصر في A وحدد أصغر عنصر في A

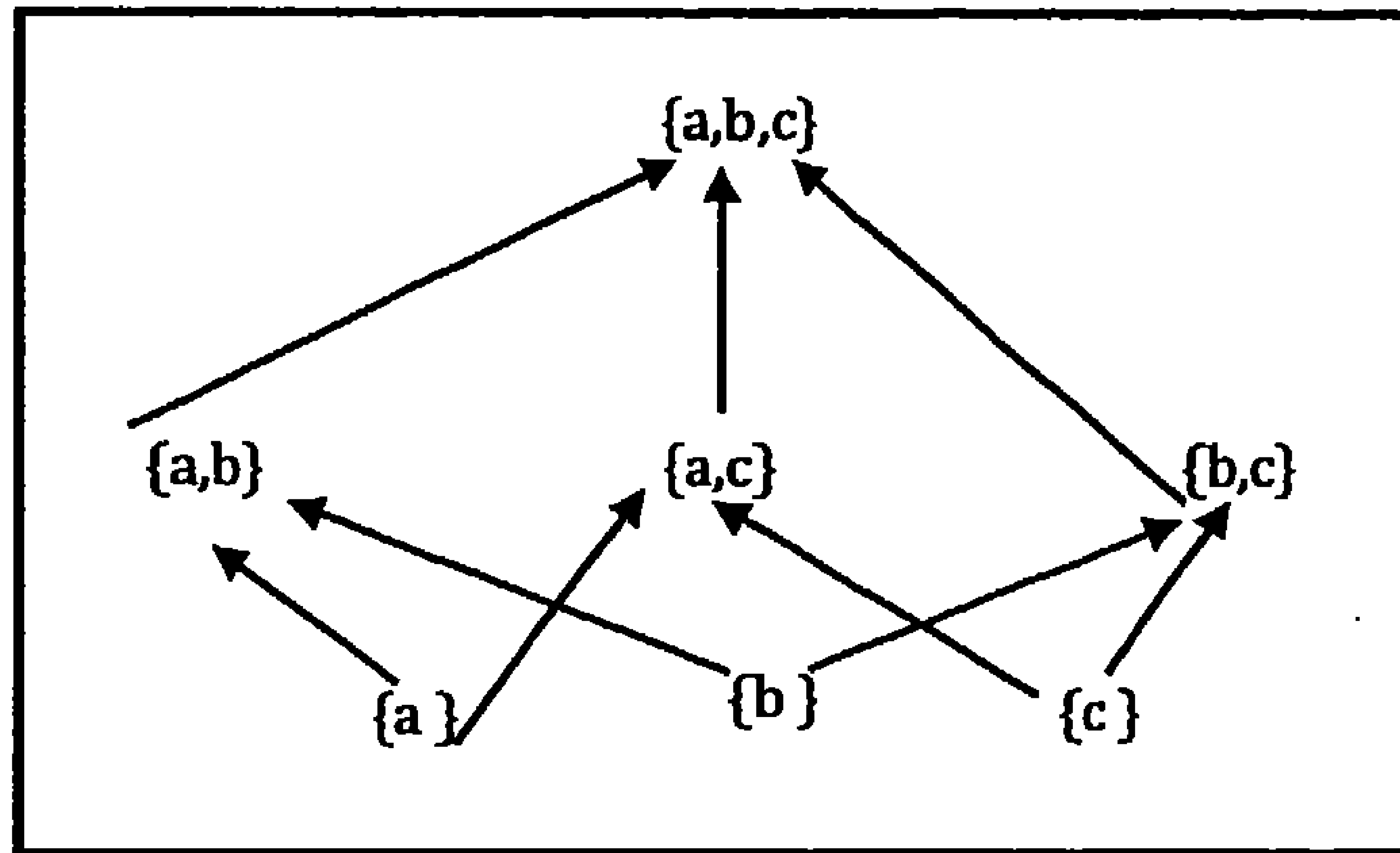
الحل:



إذن {a, b} هو العنصر الأعظم في المجموعة المرتبة $(P(A),\subseteq)$ بينما {φ} هو العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة $(P(A),\subseteq)$.

مثال: إذا كانت $B = \{a, b, c\}$ و المجموعة $A = P(B) - \{\varphi\}$ تحت علاقة الإحتواء $\subseteq$ تمثل علاقة ترتيب فحدد العنصر الأعظم وكذلك العنصر الأصغر في A

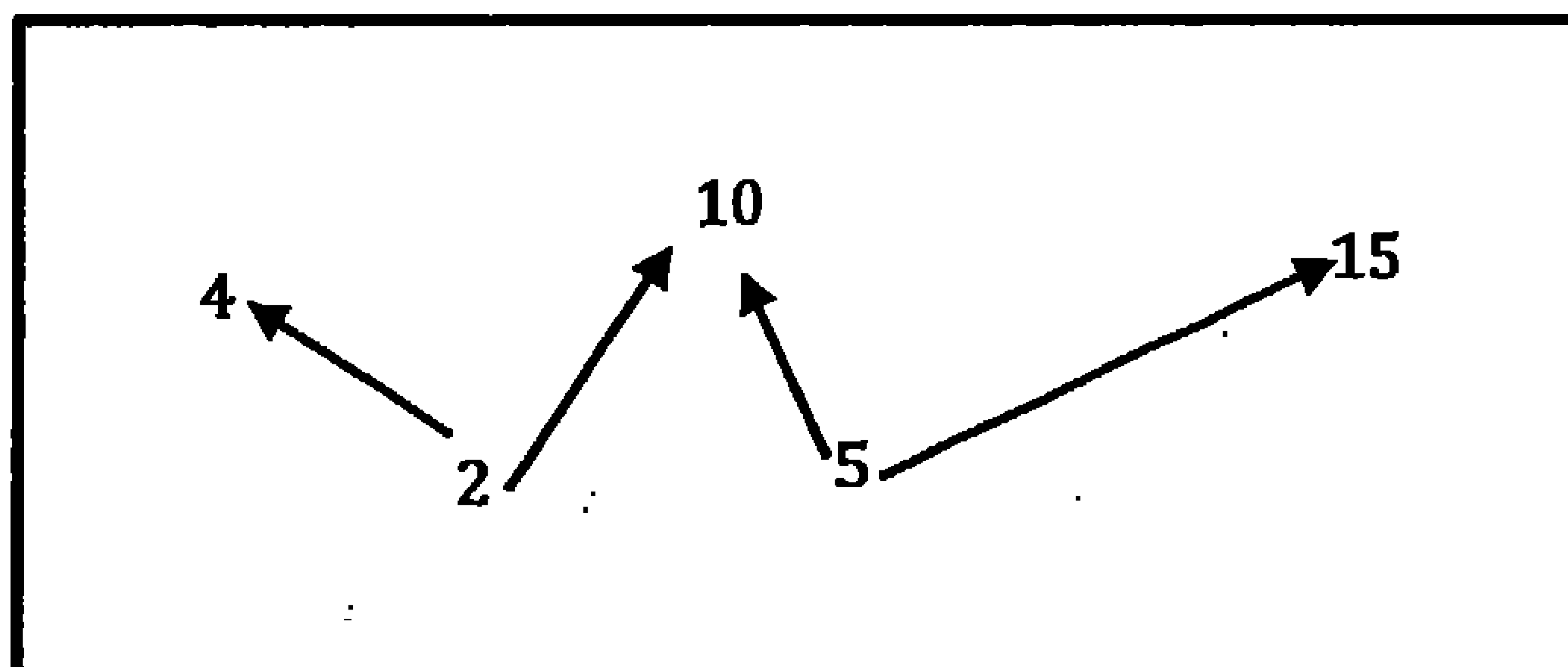
الحل:



إذن العنصر {a,b,c}هي العنصر الأعظم بينما العناصر {a}, {b}, {c} كلا منهم يمثل العنصر الأصغر .

مثال: في المجموعة المرتبة (A, |) تحت علاقة القسمة حيث $A = \{2,4,5,10,15\}$ فحدد العنصر الأعظم وكذلك العنصر الأصغر في المجموعة A

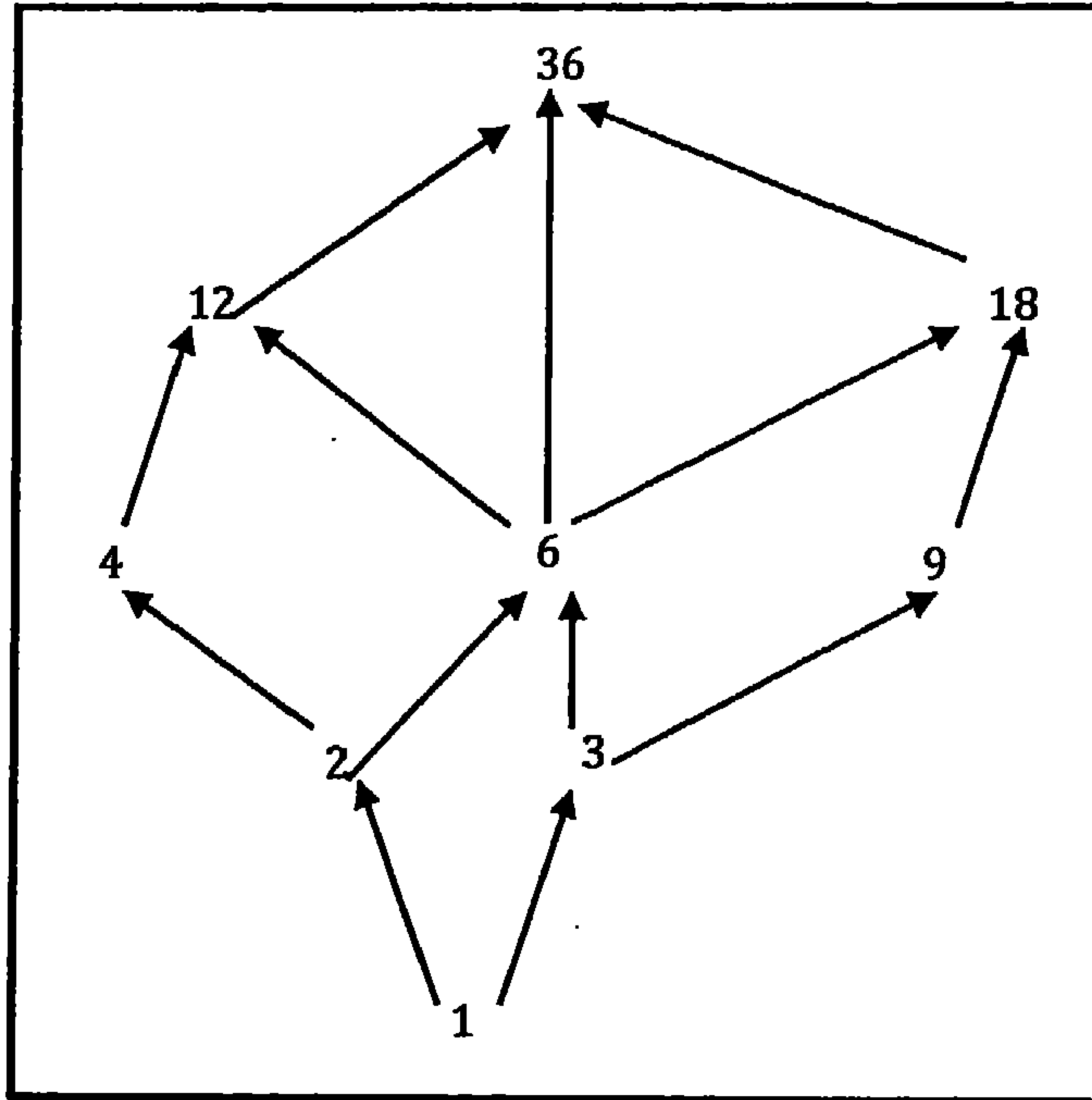
الحل:



العناصر 4 و 10و 15 كلاً منهم يمثل عنصر أعظم في المجموعة المرتبة A بينما العناصر 2 و 5 كلاً منهم يمثل عنصر أصغر في المجموعة المرتبة A .

مثال: في المجموعة المرتبة (A, l) تحت علاقة القسمة حيث A={1,2,3,4,6,9,12,18,36} تمثل علاقة ترتيب فحدد العنصر الأعظم وكذلك العنصر الأصغر في المجموعة A.

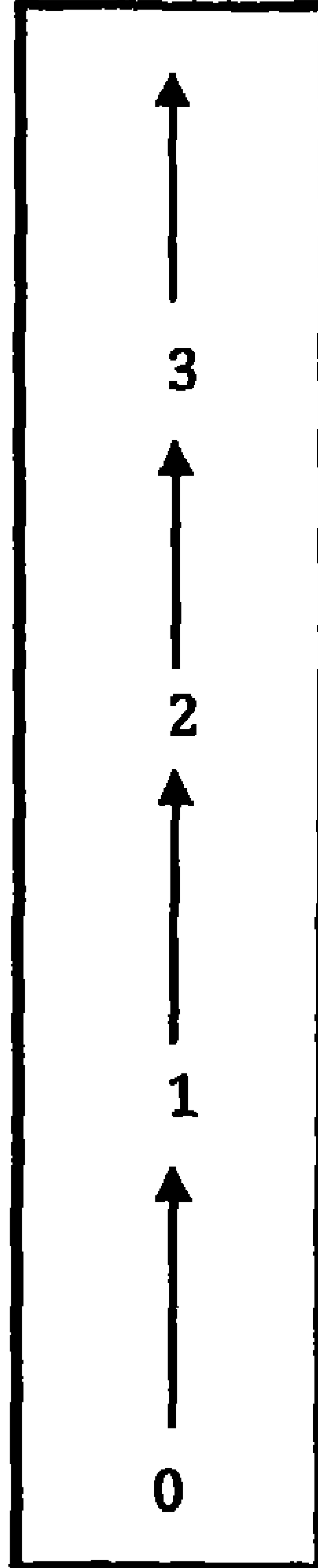
الحل:



العنصر 1 يمثل العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة (A, l) بينما العنصر 36 يمثل العنصر الأعظم في المجموعة المرتبة (A, l).

مثال: المجموعة المرتبة $(\mathbb{N}, \leq)$ تحت علاقة الترتيب الطبيعي فحدد العنصر الأعظم والعنصر الأصغر في المجموعة.

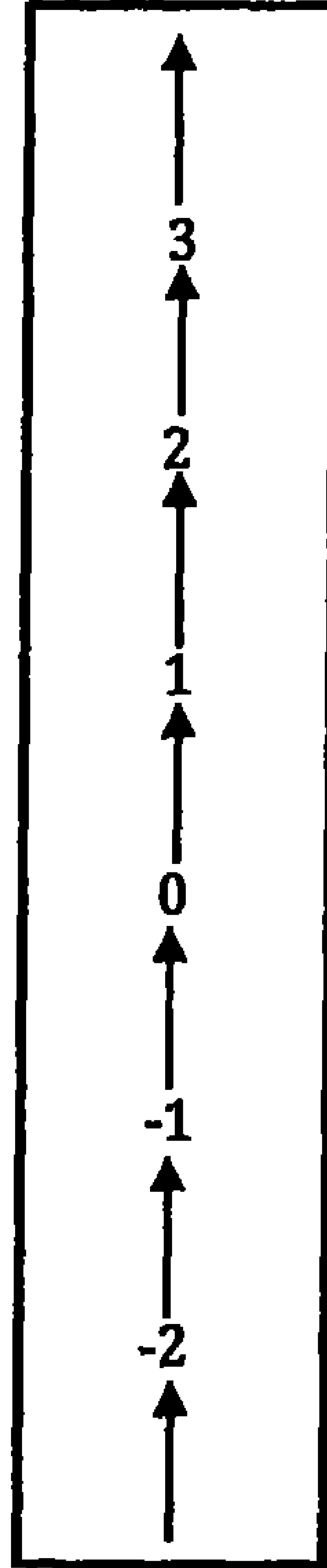
الحل:



العنصر 0 يمثل العنصر الأصغر بينما لا يوجد عنصر أعظم

مثال: المجموعة المرتبة $(\mathbb{Z}, \leq)$ تحت علاقة الترتيب الطبيعي فحدد العنصر الأعظم والعنصر الأصغر في المجموعة.

الحل:



من الواضح أنه لا يوجد أي عنصر أعظم أو عنصر أصغرفي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت علاقة الترتيب الطبيعي.

تعريف (6.2.2): إذا كانت A مجموعة مرتبة و B مجموعة جزئية من A فإننا نقول أن:

1. العنصر u من المجموعة A يسمى حد أعلى للمجموعة B إذا كان لا يوجد في B عنصر يكون أكبر تماما من u بمعنى أن:

$\forall x \in B \to x \leq u$

2. العنصر L من المجموعة A يسمى حد أدنى للمجموعة B إذا كان لا يوجد في B عنصر يكون أصغر تماما من L بمعنى أن:

$\forall x \in B \to L \leq x$

3. المجموعة B تكون محدودة من أعلى إذا وجد حد أعلى للمجموعة B .
4. المجموعة B تكون محدودة من أسفل إذا وجد حد أدنى للمجموعة B .
5. إذا كانت المجموعة المتكونة من جميع الحدود العليا تحتوي حد أصغر فإننا ندعوة أصغر حد أعلى (Supermum element) ونرمز له بالرمز Sup B .
6. إذا كانت المجموعة المتكونة من جميع الحدود الأدنى تحتوي حد أعلى فإننا ندعوة أكبر حد أدنى (Infimum element) ونرمز له بالرمز Inf B .

ملاحظة:

1. العناصر Sup B و Inf B ليس ضروري أن تكون ضمن عناصر المجموعة B وإذا حدث وكانت ضمن عناصر المجموعة B ففي هذه الحالة يكون:

$\text{Inf } B = \text{Min } B \quad , \qquad \text{Sup } B = \text{Max } B$

2. العناصر Sup B و Inf B تكون عناصر وحيدة .

مثال: إذا كانت B هي الفترة المفتوحة $B=(1, 5)$ فحدد Sup B و Inf B و Max B و Min B

الحل:

$\text{Sup } B=5, \text{Inf } B=1$ وهما ليستا ضمن عناصر المجموعة B بينما لا توجد Max B ولا توجد Min B .

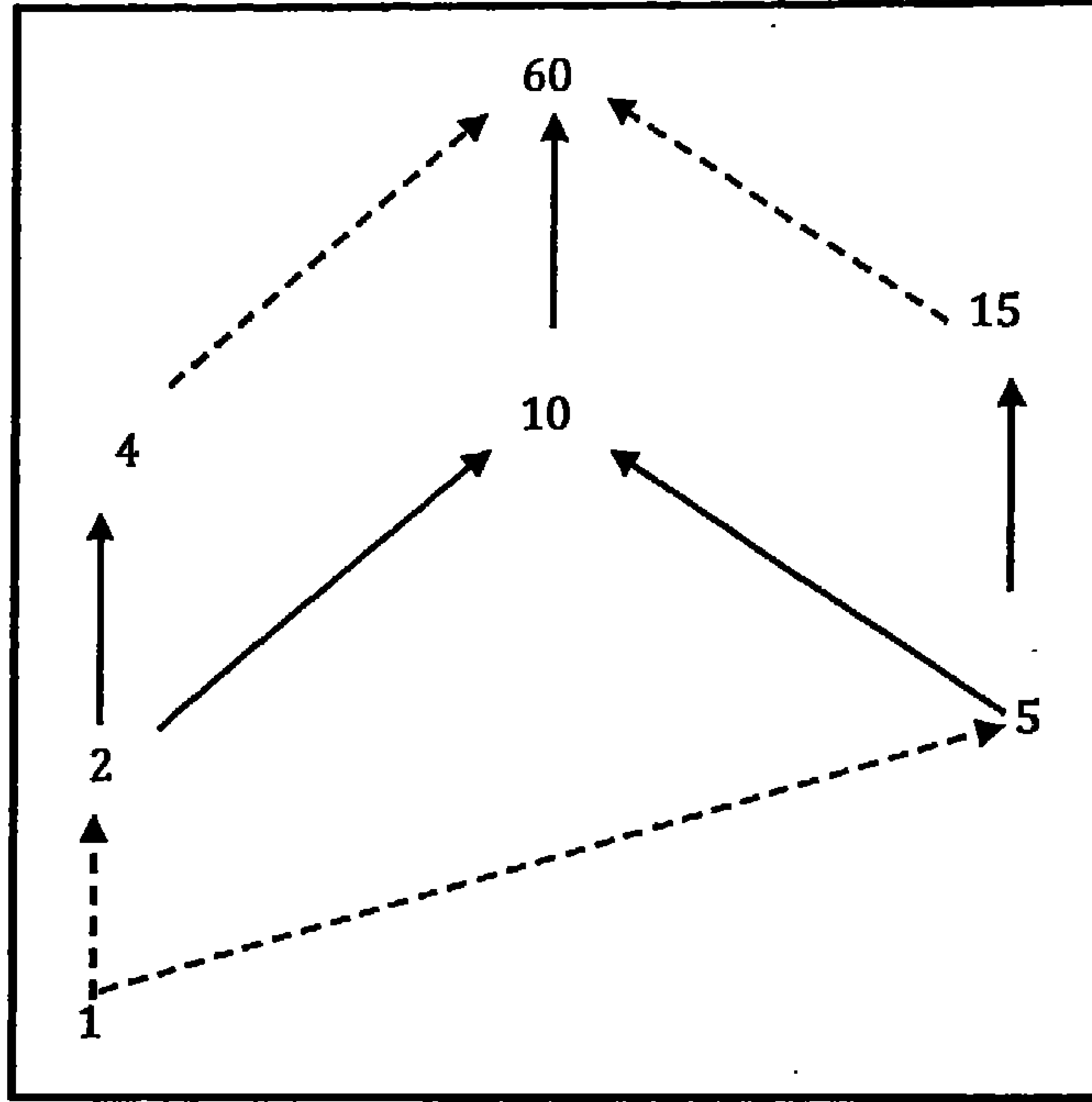
مثال: إذا كانت B هي الفترة المغلقة $B=[1, 5]$ فحدد Sup B و Inf B و Max B وMin B

الحل:

$\text{Inf } B = \text{Min } B=1 \qquad , \qquad \text{Sup } B = \text{Max } B=5$

مثال: إذا كانت المجموعة المرتبة (A, |) تحت علاقة القاسم حيث A={2,4,5,10,15}
فحدد Sup B و Inf B و Max B و Min B

الحل:



Min A=2, 5

Max A=4, 10, 15

Inf A=1 وهو يمثل القاسم المشترك الأعظم للعناصر {2, 5} بينما Sup A=60 وهو يمثل المضاعف المشترك الأصغر للعناصر {4, 10, 15}.

ملحوظة: في المجموعة المرتبة $(P(A), \subseteq)$ حيث $A = \{A_i\}_{i \in N}$ فإن:

$\text{Sup } B = \cup_i A_i, \ \text{Inf } B = \cap_i A_i$

(6-3) الشبكة

> تعريف (6.3.1): ليكن (A, ≤) مجموعة مرتبة جزئيا فإننا نقول أن المجموعة A تمثل شبكة إذا كانت كل مجموعة جزئية منها من النوع{x, y}لها أصغر حد أعلى Sup وأكبر حد أدنى Inf

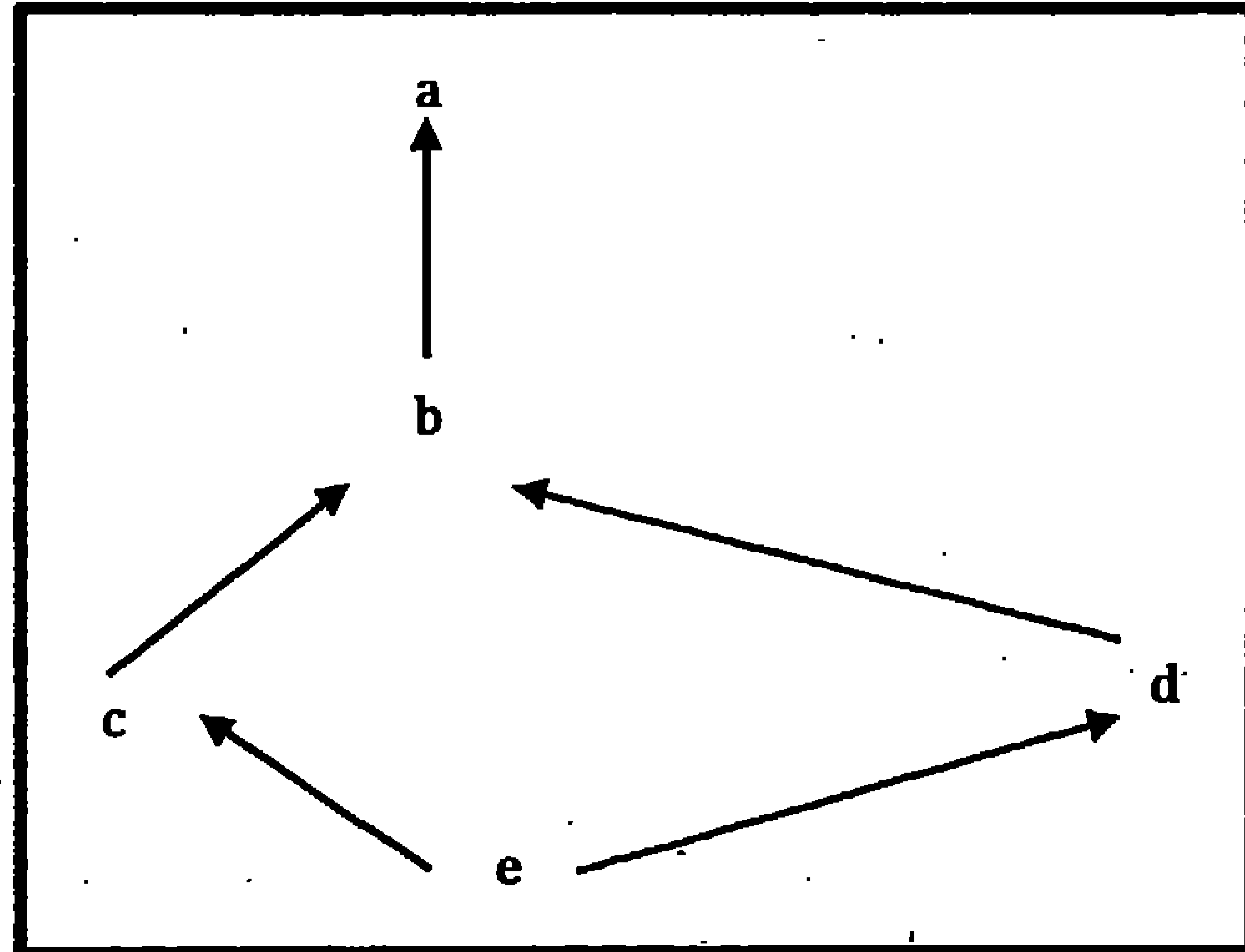
ملاحظات:

1. لقد جرت العادة بكتابة أصغر حد أعلى Sup للمجموعة $\{x, y\}$ بالرمز $x \vee y$ بدلا عن $Sup\{x, y\}$ وكتابة أكبر حد أدنى Inf للمجموعة $\{x, y\}$ بالرمز $x \wedge y$ بدلا عن $Inf\{x, y\}$.
2. كل شبكة $(A, \leq)$ مرتبطة بعمليتين $\vee, \wedge$ وبالتالي نرمز لها بالشكل $(A, \vee, \wedge)$.

أمثلة:

1. ليكن A مجموعة غير خالية فإن المجموعة المرتبة جزئيا $(P(A), \subseteq)$ تمثل شبكة حيث $x \wedge y = x \cap y, \; x \vee y = x \cup y$.
2. المجموعة $(\mathbb{N}, \leq)$ حيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الطبيعي تمثل شبكة حيث $x \wedge y$ هي أصغر عدد بين العددين x, y بينما $x \vee y$ هي أكبر عدد بين العددين x, y .
3. المجموعة $(\mathbb{N}, |)$ حيث | هو ترتيب القسمة فإن المجموعة تمثل شبكة حيث $x \wedge y = gcd(x, y)$ هو القاسم المشترك الأعظم للعددين x, y بينما $x \vee y =$ $lcm(x, y)$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين x, y.

مثال: إعتبر الشبكة $(A, \leq)$ حيث $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $\leq$ هي علاقة الترتيب الموضح في المخطط السهمي التالي:



إكتب النظام الجبري $(A,\vee,\wedge)$ التابع لهذه الشبكة.

الحل:

النظام الجبري $(A,\vee,\wedge)$ التابع لهذه الشبكة هو:

$\vee$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	b	b	b
c	a	b	c	b	c
d	a	b	b	d	d
e	a	b	c	d	e

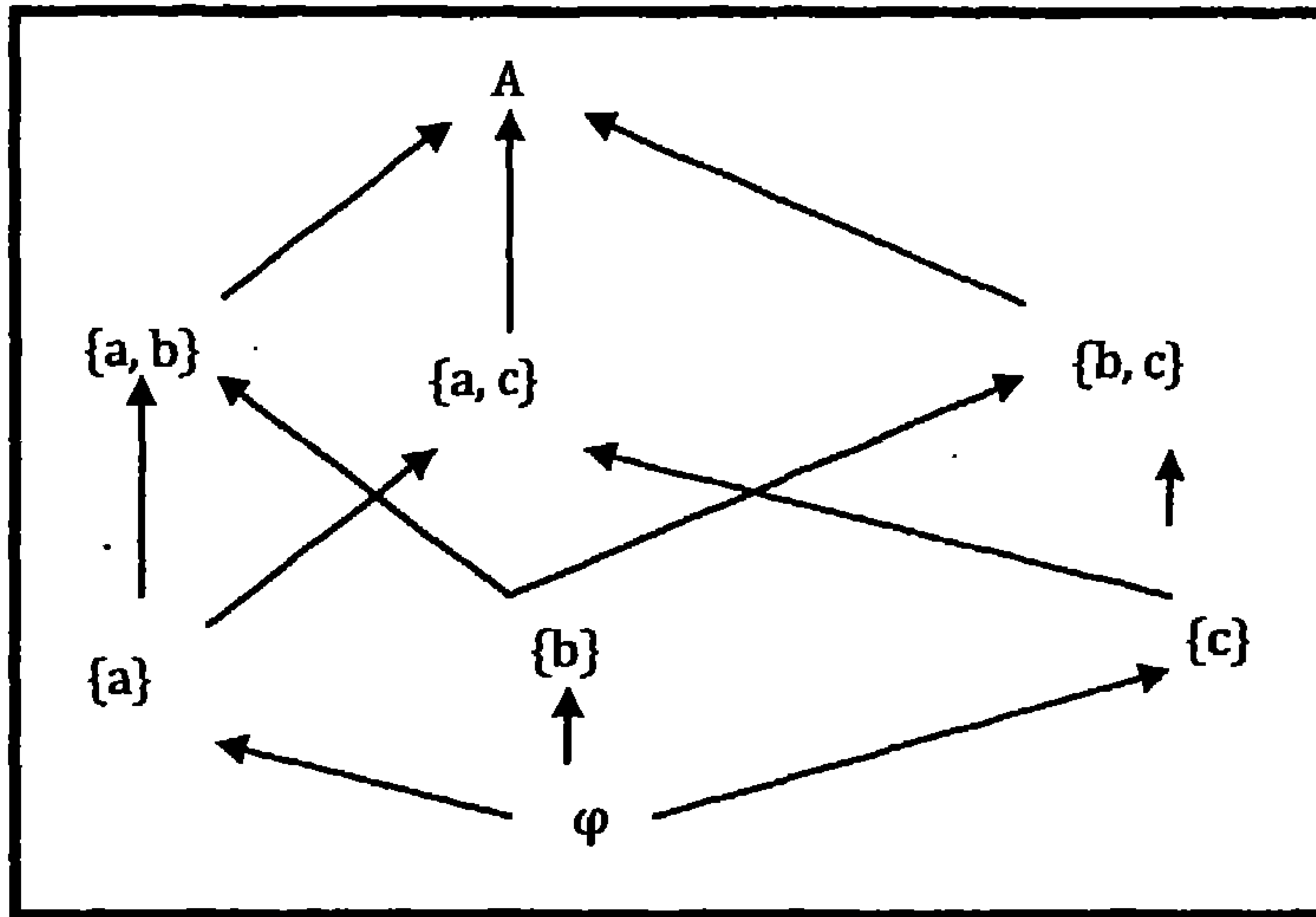
$\wedge$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	c	d	e
c	c	c	c	e	e
d	d	d	e	d	e
e	e	e	e	e	e

مثال: إعتبر الشبكة $(P(A),\subseteq)$ حيث $A = \{a,b,c\}$

1. إكتب المخطط السهمي لهذه الشبكة.
2. إكتب النظام الجبري $(A,\vee,\wedge)$ التابع لهذه الشبكة.

الحل:

أولاً: المخطط السهمي للشبكة:



ثانياً: النظام الجبري (A,V,Λ) التابع للشبكة هو:

∪	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A
Φ	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A
{a}	{a}	{a}	{a, b}	{a, c}	{a, b}	{a, c}	A	A
{b}	{b}	{a,b}	{b}	{b, c}	{a,b}	A	{b, c}	A
{c}	{c}	{a, c}	{b, c}	{c}	A	{a, c}	{b, c}	A
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	A	{a, b}	A	A	A
{a, c}	{a, c}	{a, c}	A	{a, c}	A	{a, c}	A	A
{b, c}	{b, c}	A	{b, c}	{b, c}	A	A	{b, c}	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A

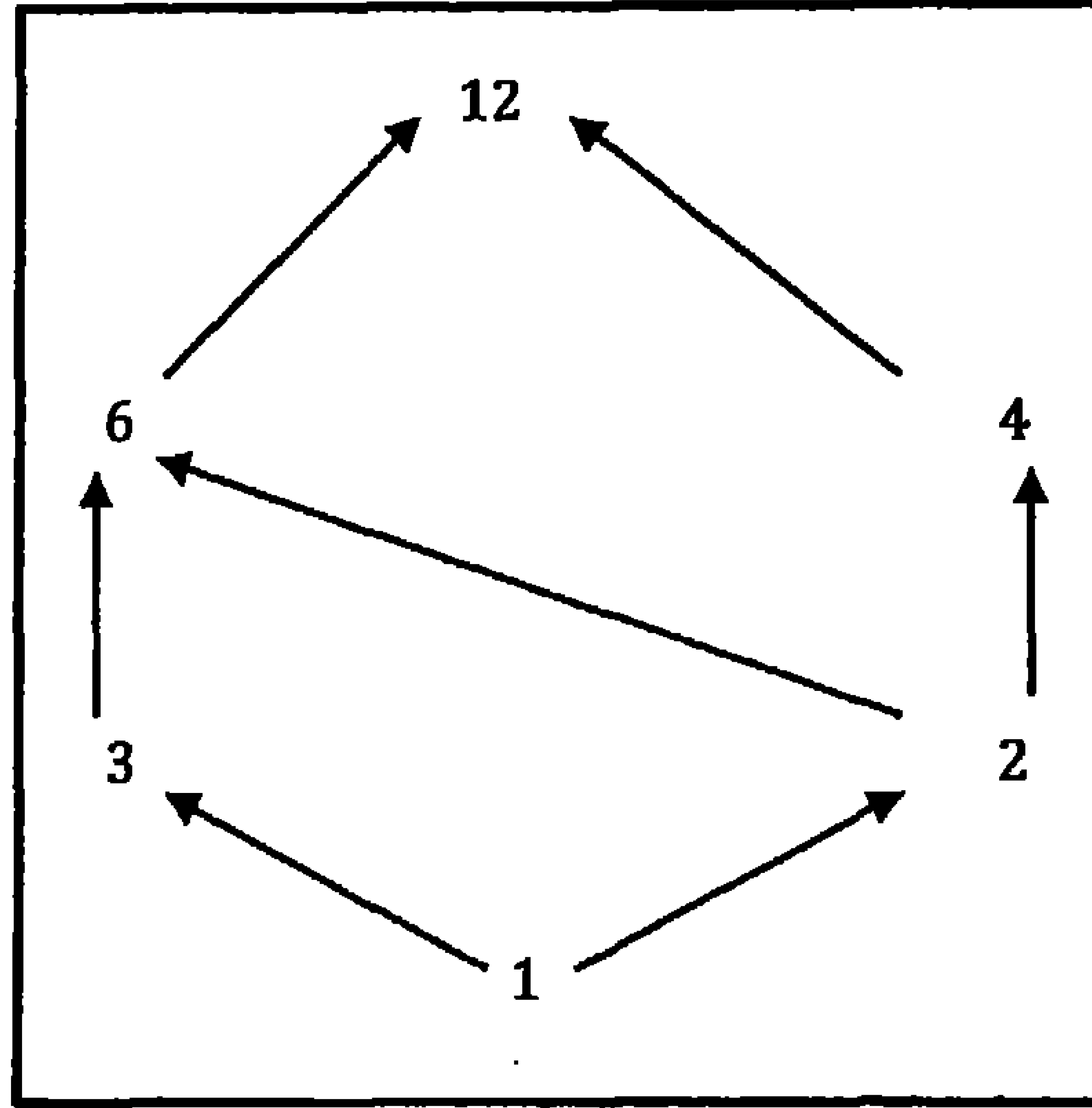
∩	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A
Φ	φ	φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	φ
{a}	φ	{a}	Φ	Φ	{a}	{a}	Φ	{a}
{b}	φ	φ	{b}	Φ	{b}	φ	{b}	{b}
{c}	φ	φ	Φ	{c}	φ	{c}	{c}	{c}
{a, b}	φ	{a}	{b}	Φ	{a, b}	{a}	{b}	{a, b}
{a, c}	φ	{a}	Φ	{c}	{a}	{a, c}	{c}	{a, c}
{b, c}	φ	φ	{b}	{c}	{b}	{c}	{b, c}	{b, c}
A	φ	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	A

مثال: إعتبر الشبكة (A,|) حيث A = {1,2,3,4,6,12} و العملية | هي ترتيب القسمة:

1. إرسم المخطط السهمي للشبكة.

2. إكتب النظام الجبري (A,∧,∨) التابع لهذه الشبكة.

الحل:



Sup هو أصغر مضاعف مشترك

∨	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

Inf هو أكبر قاسم مشترك

∧	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4

6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

نظرية (6.3.2): إذا كانت المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ تمثل شبكة و a, b, c عناصر في A فإن:

1. $a \wedge b \leq a$
2. $a \leq a \vee b$
3. $a \wedge b = a$ if and only if $a \vee b = b$
4. If $a \leq b, c \leq d$, then $a \vee c \leq b \vee d$
5. If $a \leq b, c \leq d$, then $a \wedge c \leq b \wedge d$
6. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
7. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

البرهان:

أولاً: $a \wedge b$ هو حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي $a \wedge b \leq a$

ثانياً: $a \vee b$ هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي $a \leq a \vee b$

ثالثاً: إذا كانت $a \wedge b = a$ وبما أن $a \wedge b \leq b$ فإن $a \leq b$

ولكن $b \leq b$ إذن b هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

وبما أن $a \vee b$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

إذن $a \vee b \leq b$

ولكن من (i) دائماً يكون $b \leq a \vee b$

إذن $a \vee b = b$

ولإثبات العكس: نفرض أن $a \vee b = b$ وبما أن $a \leq a \vee b$

إذن $a \leq b$ ولكن دائماً يكون $a \leq a$

إذن a يعتبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$

إذن $a \leq a \wedge b$ لأن $a \wedge b$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$

ولكن من (i) يكون دائماً $a \wedge b \leq a$

إذن $a \wedge b = a$

رابعاً: إذا كان $a \le b, c \le d$ فإن $a \le b \le b \vee d,\ \ c \le d \le b \vee d$

إذن $c \le b \vee d,\ a \le b \vee d$

إذن $b \vee d$ هو حد أعلى للمجموعة $\{a, c\}$

ولكن $a \vee c$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, c\}$

إذن $a \vee c \le b \vee d$

خامساً: وبنفس الطريقة يكون لدينا $a \wedge c \le a \le b,\ \ a \wedge c \le c \le d$

ومنها نجد أن $a \wedge c \le b,\ a \wedge c \le d$

إذن $a \wedge c$ هو حد أدنى للمجموعة $\{b, d\}$

ولكن $b \wedge d$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{b, d\}$

إذن $a \wedge c \le b \wedge d$

سادساً: بما أن $a \le a \vee b,\ a \le a \vee c$

إذن $a = a \wedge a \le (a \vee c) \wedge (a \vee b)$

أيضاً $b \wedge c \le b \le a \vee b$ و $b \wedge c \le c \le a \vee c$

إذن: $b \wedge c \le a \vee b$ و $b \wedge c \le a \vee c$

إذن: $b \wedge c = (b \wedge c) \wedge (b \wedge c) \le (a \vee c) \wedge (a \vee b)$

إذن: العنصر $(a \vee c) \wedge (a \vee b)$ هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b \wedge c\}$

ولكن $a \vee (b \wedge c)$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b \wedge c\}$

إذن: $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee c) \wedge (a \vee b)$

سابعاً: بما أن $a \wedge b \le a,\ a \wedge c \le a$

إذن: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le a \vee a = a$

ولكن $a \wedge b \le b \le b \vee c,\ \ a \wedge c \le c \le b \vee c$

إذن: $a \wedge b \le b \vee c,\ \ a \wedge c \le b \vee c$

إذن: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le (b \vee c) \vee (b \vee c) = (b \vee c)$

إذن: العنصر $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)$ هو حد أدنى للمجموعة $\{a, b \vee c\}$

ولكن $a \wedge (b \vee c)$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b \vee c\}$

إذن: $(a \wedge b)(a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

ملاحظة: (مبدأ الإزدواجية Duality Principal)

إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً فإن العلاقة $\geq$ تمثل العلاقة العكسية للعلاقة $\leq$ المعرفة بالشكل $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$ ومن الواضح أن العلاقة $\geq$ هي علاقة ترتيب أيضاً وإذا كانت المجموعة $(A, \leq)$ تمثل شبكة فإن $(A, \geq)$ تمثل شبكة وفيها يكون أكبر حد للمجموعة $(A, \geq)$ هو أصغر حد للمجموعة $(A, \leq)$ وأصغر حد للمجموعة $(A, \geq)$ هو أكبر حد للمجموعة $(A, \leq)$ وبالتالي فكل قانون صحيح في النظام الجبري $(A, \leq)$ يعطينا قانون جديد يكون صحيح أيضاً في النظام المعاكس $(A, \wedge, \vee)$ وذلك بإستبدال العلاقة $\leq$ بالعلاقة العكسية $\geq$ والعملية $\vee$ بالعملية $\wedge$ والعملية $\wedge$ بالعملية $\vee$ ويعرف هذا الإسلوب بمبدأ الإزدواجية Dual principal .

مثال: في الصيغة:

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee c) \wedge (a \vee b)$$

لكي نطبق مبدأ الإزدواجية فإننا نستبدل الرمز $\leq$ بالرمز $\geq$ والرمز $\vee$ بالرمز $\wedge$ والرمز $\wedge$ بالرمز $\vee$ وبالتالي نحصل على:

$$(a \wedge c) \vee (a \wedge b) \leq a \wedge (b \vee c)$$

نظرية (6.3.3): إذا كانت المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ تمثل شبكة و $(A, \vee, \wedge)$ النظام الجبري التابع لها فإن الخصائص التالية تكون متحققة لكل العناصر a, b, c من A:

1. $a \vee a = a$
2. $a \wedge a = a$
3. $a \vee b = b \vee a$
4. $a \wedge b = b \wedge a$
5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
6. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

7. $(a \vee b) \wedge a = a$

8. $(a \wedge b) \vee a = a$

البرهان:

أولاً: العنصر a في المجموعة $\{a, a\}$ يمثل حد أعلى وبالتالي $a \vee a \leq a$

ولكن دائماً يكون $a \leq a \vee a$

إذن $a \vee a = a$

ثانياً: العنصر a في المجموعة $\{a, a\}$ يمثل حد أدنى وبالتالي $a \leq a \wedge a$

ولكن دائماً يكون $a \wedge a \leq a$

إذن $a \wedge a = a$

ثالثاً: في المجموعة $\{a, b\}$ نجد أن كلاً من $a \vee b$ و $b \vee a$ يمثل أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي يكون $a \vee b \leq b \vee a$ و $b \vee a \leq a \vee b$

إذن $a \vee b = b \vee a$

رابعاً: في المجموعة $\{a, b\}$ نجد أن كلاً من $a \wedge b$ و $b \wedge a$ يمثل أكبر حد أدنى للمجموعة $\{a, b\}$ وبالتالي يكون $a \wedge b \leq b \wedge a$ و $b \wedge a \leq a \wedge b$

إذن $a \wedge b = b \wedge a$

خامساً: نضع $g = a \vee (b \vee c)$ و $h = (a \vee b) \vee c$

بما أن $a \leq a \vee (b \vee c) = g$ و $b \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c) = g$

إذن: g هو حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

ولكن $a \vee b$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{a, b\}$

إذن: $a \vee b \leq g$

ولكن $c \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c) = g$

إذن: $h = (a \vee b) \vee c \leq g \vee g = g$

إذن: $h \leq g$ وبالمثل يمكن إثبات أن $g \leq h$ إذن: $h = g$

سادساً: من مبدأ الإزدواجية ومن العلاقة $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

فإننا نحصل على: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

سابعاً: لدينا $a \leq a \vee (a \wedge b)$ ....(1)

ولكن $a \leq a, \quad a \wedge b \leq a$

إذن: $a \vee (a \wedge b) \leq a \vee a = a$ ....(2)

من (1) و (2) نحصل على $a \vee (a \wedge b) = a$

ثامناً: من مبدأ الإزدواجية وبإستخدام العلاقة $a \vee (a \wedge b) = a$

فإننا نحصل على $a \wedge (a \vee b) = a$

نظرية (6.3.4): إذا كان $(A, \vee, \wedge)$ نظام جبري ويحقق الشروط:

1. $a \vee b = b \vee a$
2. $a \wedge b = b \wedge a$
3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
4. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
5. $(a \vee b) \wedge a = a$
6. $(a \wedge b) \vee a = a$

فإن العلاقة $\leq$ على A المعرفة بالشكل:

$$x \vee y = y \leftrightarrow x \leq y, \forall x, y \in A$$

تكون علاقة ترتيب $(A, \leq)$ وتمثل شبكة.

البرهان:

1. $x \vee x = x$ إذا وفقط إذا كان $x \leq x$ إذن العلاقة $\leq$ إنعكاسية.

2. $x \vee y = y$ إذا وفقط إذا كان $x \leq y$

كذلك $y \vee x = x$ إذا وفقط إذا كان $y \leq x$

وبما أن $y \vee x = x \vee y$ فإن $x = y$ وبالتالي فإن العلاقة $\leq$ تكون تخالفية.

3. $x \vee y = y$ إذا وفقط إذا كان $x \leq y$

كذلك $y \vee z = z$ إذا وفقط إذا كان $y \leq z$

وبالتالي:

$$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

إذا وفقط إذا كان $x \leq z$ وبالتالي تكون العلاقة $\leq$ متعدية.

4. وبما أن $x \vee y = y$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{x, y\}$

وبما أن $x \wedge y = x$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{x, y\}$

إذن المجموعة $(A, \leq)$ تمثل شبكة.

ملاحظة هامه: يوجد طريقتين لتعريف الشبكة على المجموعة A :

- **الطريقة الأولى:** الشبكة هي مجموعة مرتبة $(A, \leq)$ بحيث كل مجموعة جزئية منها من النوع $\{x, y\}$ لها أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى.
- **الطريقة الثانية:** الشبكة هي نظام جبري $(A, \vee, \wedge)$ يحقق الشروط:

1. $a \vee b = b \vee a$

2. $a \wedge b = b \wedge a$

3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

4. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

5. $(a \vee b) \wedge a = a$

6. $(a \wedge b) \vee a = a$

ملاحظات:

1. الشبكة L يقال إنها تملك حد أدنى 0 إذا كان لكل $x \in L$ فإن:

$0 \wedge x = 0, \quad 0 \vee x = x$

علما بأن الحد الأدنى 0 ليس ضروري أن يكون من ضمن عناصر الشبكة.

2. الشبكة L يقال إنها تملك حد أعلى 1 إذا كان لكل $x \in L$ فإن:

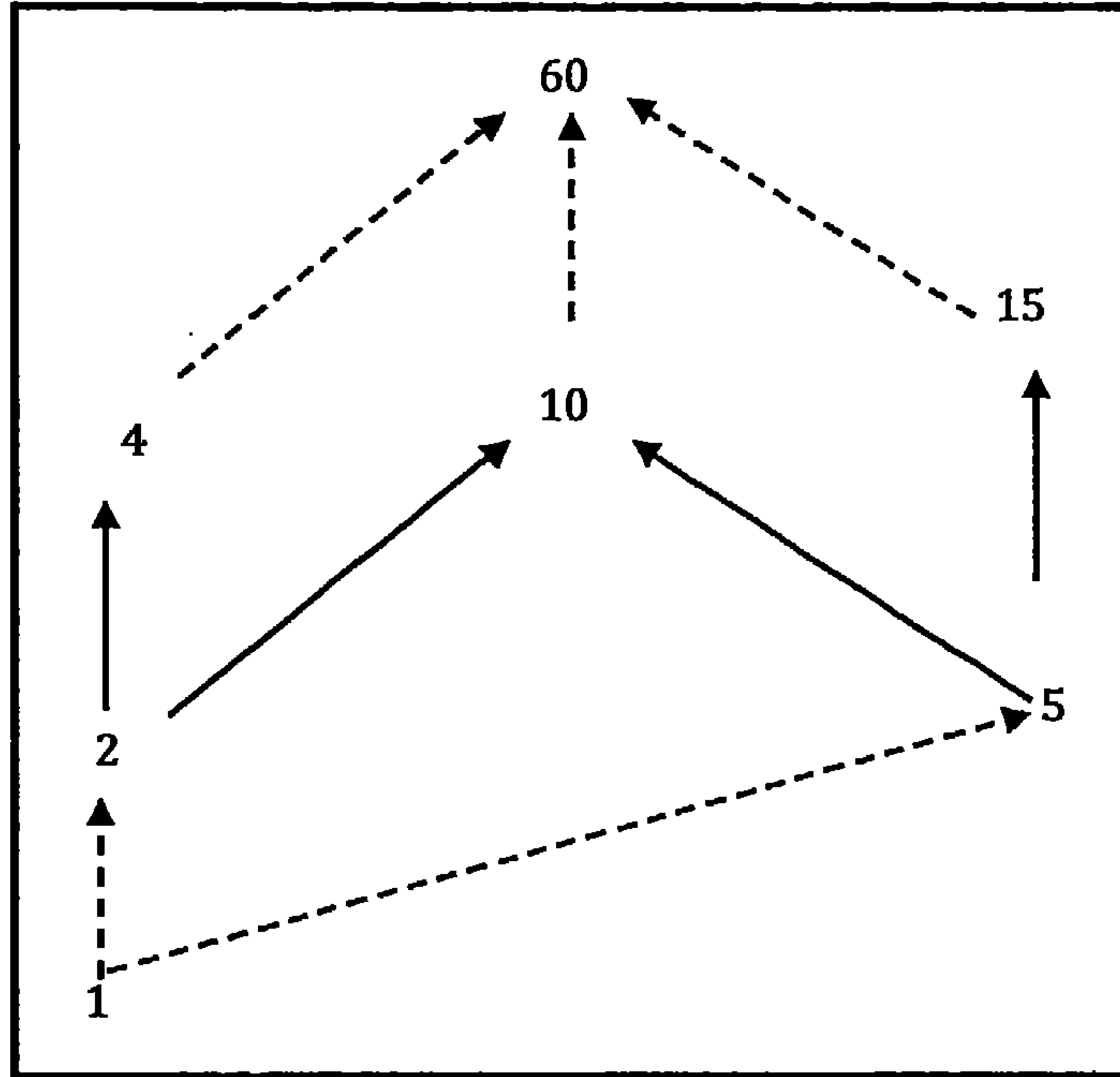
$1 \wedge x = x, \quad 1 \vee x = 1$

علما بأن الحد الأعلى 1 ليس ضروري أن يكون من ضمن عناصر الشبكة.

3. الشبكة L يقال إنها شبكة لها حدود (bounded lattice) إذا كانت تملك حد أدنى 0 وحد أعلى 1.

4. كل شبكة منتهية finite تكون شبكة لها حدود .

مثال: إذا كانت المجموعة المرتبة (A, l) تحت علاقة القاسم حيث A={2,4,5,10,15} فإن المخطط السهمي هو:



وبالتالي فالعنصر 1 يمثل الحد الأدنى للشبكة بينما الحد 60 يمثل الحد الأعلى للشبكة.

ملحوظات:

1. في المجموعة المرتبة $(P(A), \subseteq)$ حيث $P(A)$ هي مجموعة القوى للمجموعة A فإن الحد الأدنى للشبكة هو المجموعة الخالية φ بينما الحد الأعلى هو المجموعة الكلية A وبالتالي فهذه الشبكة هي شبكة لها حدود.
2. في المجموعة المرتبة $\cdots > 3 > 2 > 1 > 0$ لها حد أدنى 0 وليس لها حد أعلى وبالتالي فهي تعتبر شبكة ليس لها حدود.

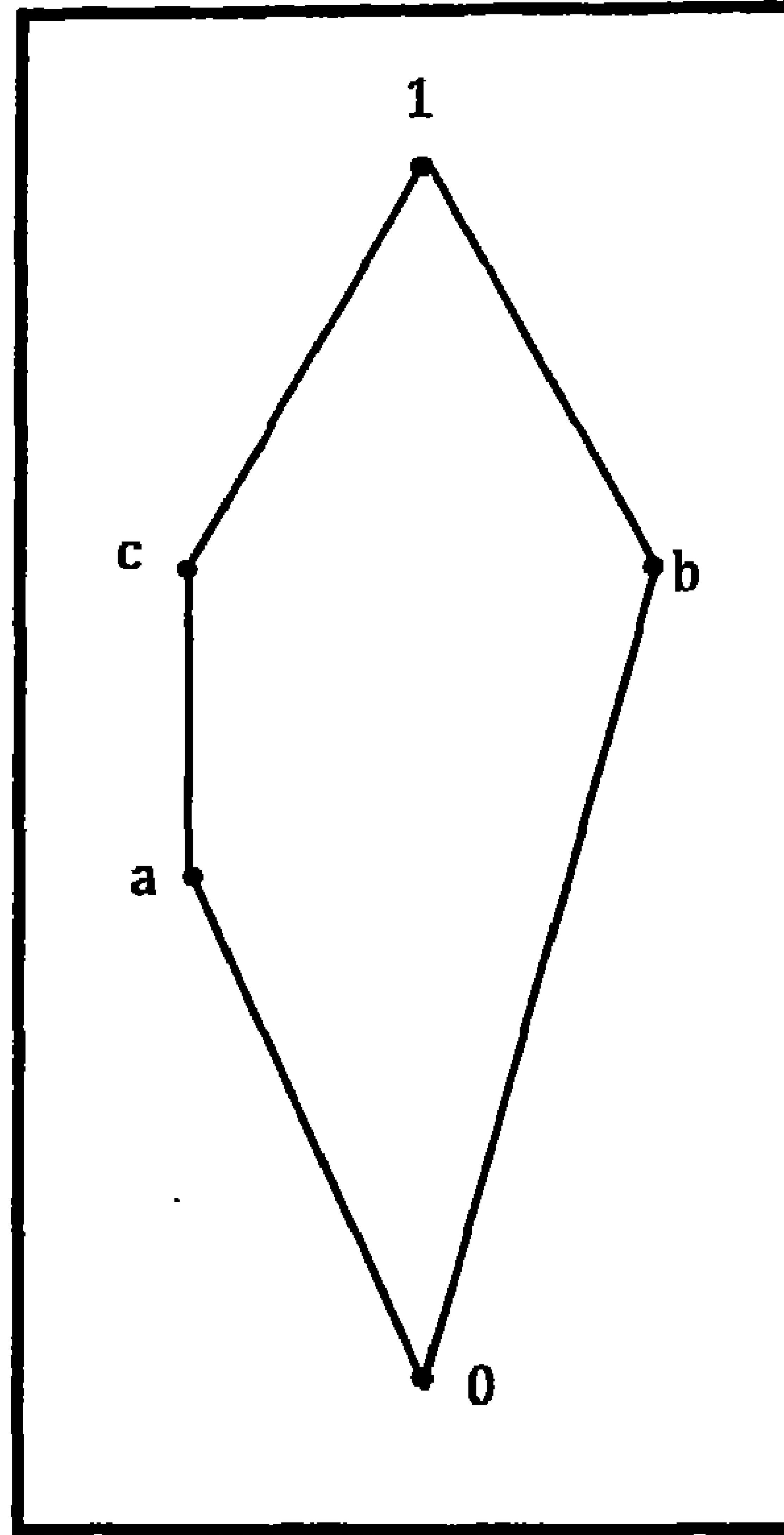
ملاحظة:

الشبكة L يقال لها إنها شبكة توزيعية (Distributive lattice) إذا كانت لكل $a, b, c \in L$ فإن:

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

وغير ذلك تسمى شبكة غير توزيعية (Nondistributive lattice) .

مثال: المخطط الشبكي:



$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$ .... (1)

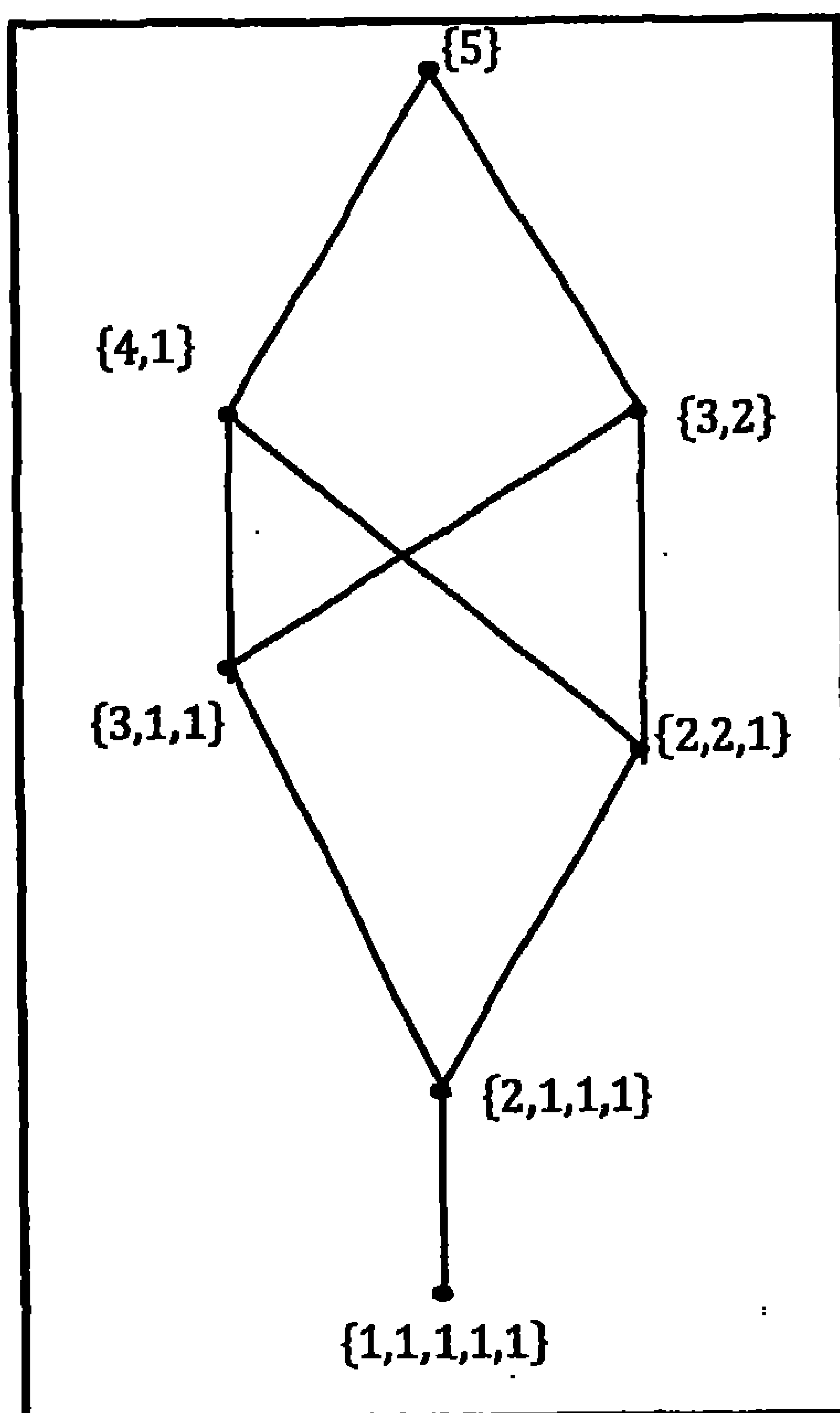
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge c = c$ .... (2)

من (1) و (2) فإن:

$a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

إذن الشبكة غير توزيعية.

مثال: المخطط الشبكي:



والذي يمثل تقسيم العدد 5 فإن:

$(3,1,1) \vee [(3,2) \wedge (4,1)] = (3,1,1) \vee (2,1,1,1) = (3,1,1)$..............(1)

$(3,1,1) \vee (3,2) = (3,2)$

$(3,1,1) \vee (4,1) = (4,1)$

$[(3,1,1) \vee (3,2)] \wedge [(3,1,1) \vee (4,1)] = (3,2) \wedge (4,1) = (2,1,1,1)$......(2)

من (1) و (2) نحصل على:

$(3,1,1) \vee [(3,2) \wedge (4,1)] \neq [(3,1,1) \vee (3,2)] \wedge [(3,1,1) \vee (4,1)]$

إذن الشبكة غير توزيعية.

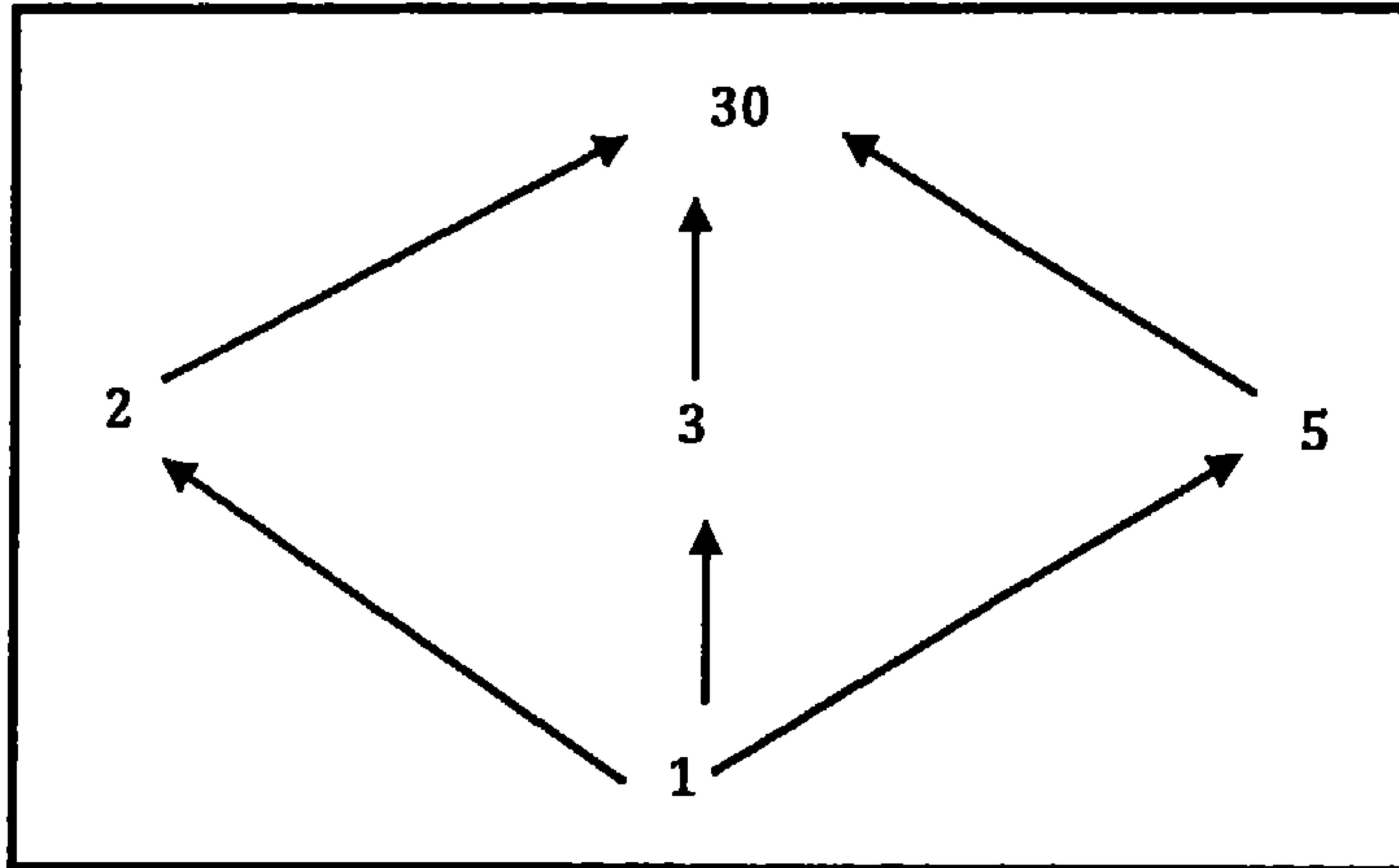
(6-4) الجبر البولياني

تعريف (6.4.1): نقول أن الشبكة $(A, \leq)$ توزيعية إذا كان لكل $a, b, c \in A$ تحقق الشرطين التاليين:

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

مثال: الشبكة $(P(A), \subseteq)$ حيث A مجموعة منتهية تعتبر شبكة توزيعية.

مثال: إذا كانت الشبكة $(A, |)$ حيث $A = \{1,2,3,5,30\}$ و العلاقة | هي ترتيب القسمة



هذه الشبكة غير توزيعية لأن:

$2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge (30) = 2$

$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = (1) \vee (1) = 1$

وبالتالي:

$a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ملاحظة: في الشبكة $(A, \leq)$ من المعروف أن العنصر الأكبر يكون وحيد وكذلك العنصر الأصغر يكون أيضاً وحيد وبالتالي فإننا يمكن أن نعطي الرمز 1 للعنصر الأكبر وأن نعطي الرمز 0 للعنصر الأصغر وبالتالي يكون دائماً:

$a \vee 1 = 1, \quad a \vee 0 = a, \quad a \wedge 1 = a, \quad a \wedge 0 = 0$

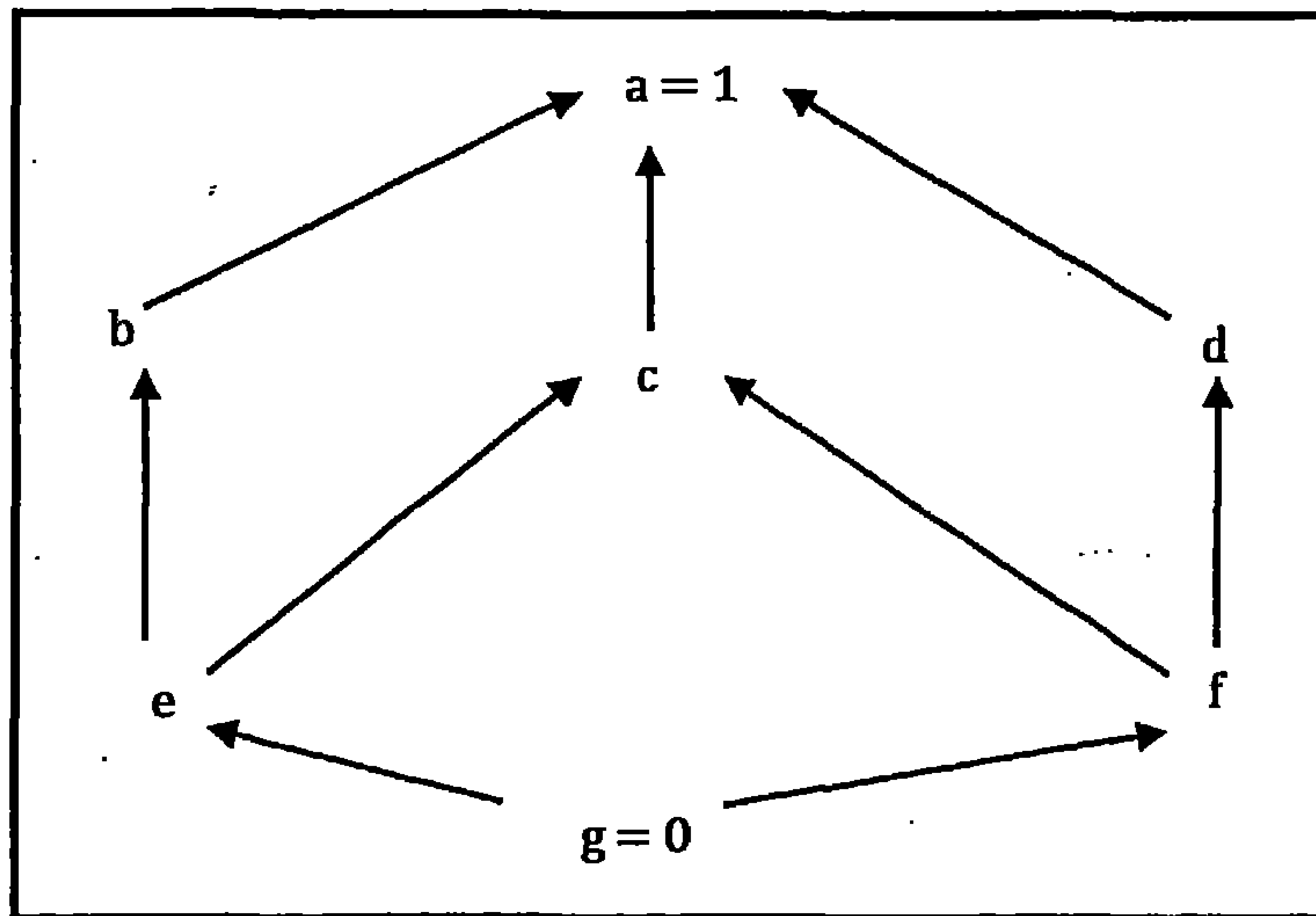
تعريف (6.4.2): في الشبكة $(A, \leq)$ والتي فيها العنصر الأكبر 1 والعنصر الأصغر 0 نقول أن b هو عنصر متمم للعنصر a إذا تحقق الشرطين:

1. $a \vee b = 1$
2. $a \wedge b = 0$

ملاحظات:

1. إذا كان b متمم a فإن a متمم ل b .
2. من الممكن أن يوجد للعنصر الواحد أكثر من متمم ومن الممكن الا يوجد له أي متمم.
3. العنصر 1 متمم للعنصر 0 .

مثال: إذا كانت الشبكة $(A, \leq)$ حيث $A = \{a = 1, b, c, d, e, f, g = 0\}$ و $\leq$ هو الترتيب الموضح بالمخطط السهمي التالي:



عرف متمم العناصر b, e, c, f, g :

الحل:

متمم العنصر b هو العنصر d أو f لأن $b \vee f = 1,\ b \wedge f = 0$

و $b \vee f = 1,\ b \wedge f = 0$

متمم العنصر e هو العنصر d لأن $e \vee d = 1,\ e \wedge d = 0$

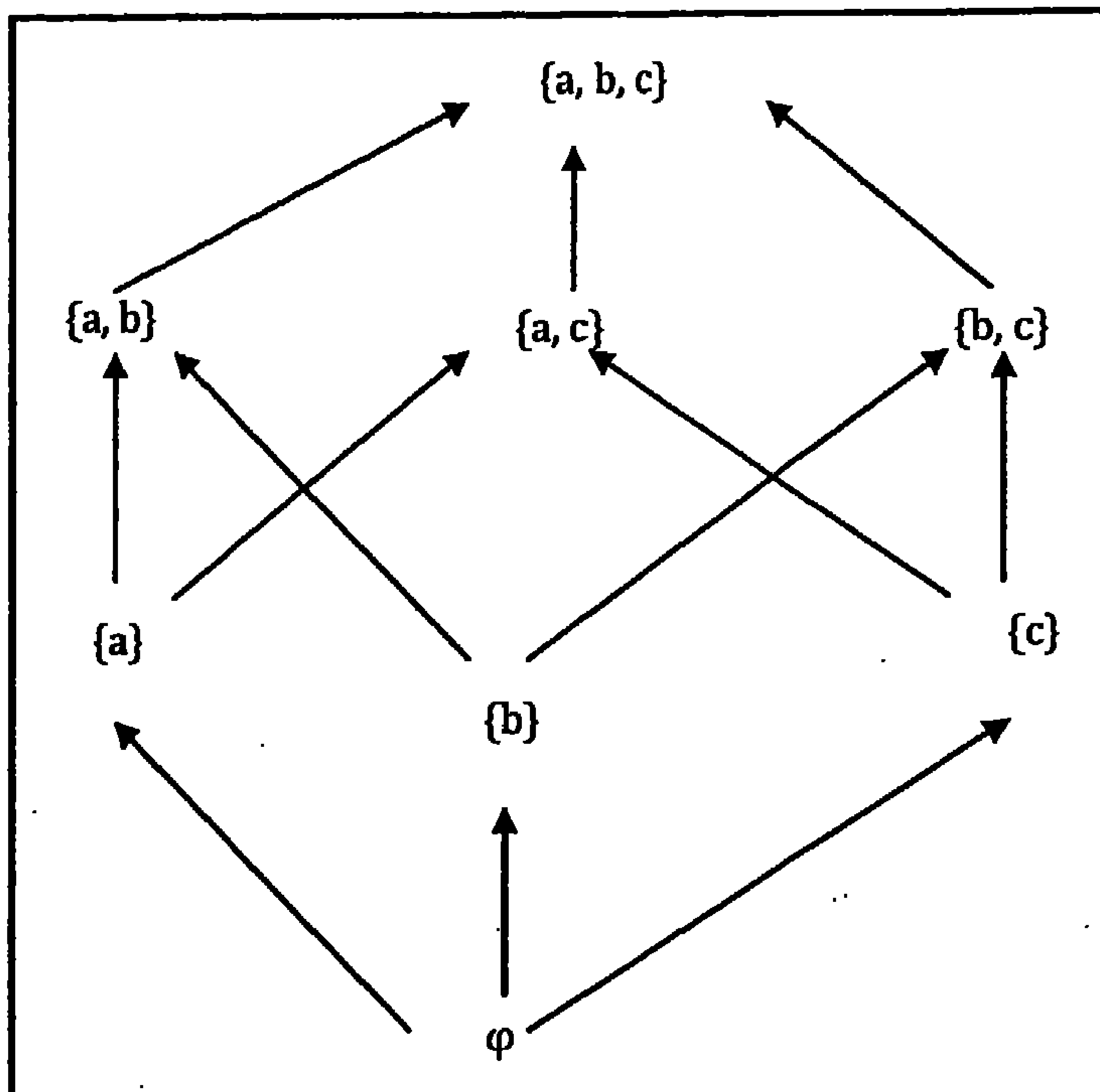
متمم العنصر c ليس له متمم لأنه غير مرتبط ب 0

متمم العنصر f هو b لأن $b \vee f = 1,\ b \wedge f = 0$

متمم العنصر g هو a لأن $g \vee a = 1, g \wedge a = 0$

مثال: إذا كانت الشبكة $(P(A), \subseteq)$حيث $A = \{a, b, c\}$ إحسب متمم كل عنصر في الشبكة:

الحل:



متمم العنصر $\{a, b, c\}$ هو العنصر φ

متمم العنصر $\{b, c\}$ هو العنصر $\{a\}$

متمم العنصر $\{a, c\}$ هو العنصر $\{b\}$

متمم العنصر $\{a, b\}$ هو العنصر $\{c\}$

نظرية (6.4.3): إذا كانت $(A, \leq)$شبكة توزيعية فإن متمم أي عنصر إن وجد يكون وحيد.

البرهان:

نفرض أن للعنصر a متممان هما b, c ونحاول إثبات أن c=b

وبما أن a متمم للعنصر b فإن:

$$a \wedge b = 0, \ \ a \vee b = 1$$

وبما أن a متمم للعنصر c فإن:

$$a \wedge c = 0, \ \ a \vee c = 1$$

إذن:

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c)$$
$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c$$

تعريف (6.4.4): إذا كانت الشبكة $(A, \leq)$ شبكة توزيعية ولها أكبر عنصر وأصغر عنصر فإن هذه الشبكة نسميها شبكة بوليانية إذا كان لكل عنصر فيها له عنصر متمم داخل الشبكة.

ملاحظات:

1. إذا كانت الشبكة $(A, \leq)$ شبكة بوليانية فإن لكل عنصر متمم وحيد فإذا كان العنصر هو a فإن المتمم نسمية a' .
2. كل شبكة بوليانية مرتبطة بنظام جبري $(A, \vee, \wedge, \ ')$ متكون من العمليات الثلاث $\vee, \wedge$ وعملية المتمم $'$ وهذا النظام يسمى بنظام جبر بولياني.

مثال: الشبكة $(P(A), \cup, \cap, \ ')$ تشكل نظام جبر بولياني للمجموعة المنتهية A .

مثال: $(\{T, F\}, \vee, \wedge, \sim)$ تشكل نظام جبر بولياني حيث $\vee$ أداة الفصل أو بينما $\wedge$ هي أداة الربط وبينما العلاقة $\sim$ تمثل أداة النفي و F هي False و T هي True.

نظرية (6.4.5): (دي مورجان):

إذا كان a, b عنصرين من نظام جبر بولياني $(A, \vee, \wedge, \ ')$ فإن:

1. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$
2. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

البرهان:

أولاً: لبرهان (i) يجب إثبات أن $a' \wedge b'$ هو العنصر المتمم للعنصر $a \vee b$ أي أن:

1. $(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = 1$
2. $(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = 0$

لإثبات (1):

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = [(a \vee b) \vee a'] \wedge [(a \vee b) \vee b']$$
$$= [a \vee (b \vee a')] \wedge [a \vee (b \vee b')] = [(a \vee a') \vee b] \wedge [a \vee 1]$$
$$= [1 \vee b] \wedge [a \vee 1] = 1 \wedge 1 = 1$$

لإثبات (2):

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = [a \wedge (a' \wedge b')] \vee [b \wedge (a' \wedge b')]$$
$$= [(a \wedge a') \wedge b'] \vee [(b \wedge b') \wedge a'] = [0 \wedge b'] \vee [0 \wedge a']$$
$$= 0 \vee 0 = 0$$

ثانياً: لبرهان (ii) فإننا نستخدم مبدأ الإزدواجية وبالتالي يكون لدينا:

1. $(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = 0$
2. $(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = 1$

إذن $a' \vee b'$ هو العنصر المتمم للعنصر $a \wedge b$

مثال: في النظام الجبر البولياني $(A,\vee,\wedge,')$ إختصر

$$(a \wedge b) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (b \wedge c)$$

الحل:

$$(a \wedge b) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (b \wedge c) = b \wedge [a \vee (a' \wedge c') \vee c]$$
$$= b \wedge [(a \vee c) \vee (a' \wedge c')] = b \wedge 1 = b$$

ملاحظة هامة: يوجد طريقتين لتعريف النظام الجبري البولياني على المجموعة A :

1. **الطريقة الأولى**: النظام الجبري البولياني على المجموعة A هو شبكة بوليانية مرتبطة بنظام جبري $(A,\vee,\wedge,')$ متكون من العمليات الثلاث $\vee,\wedge$ وعملية المتمم $'$.
2. **الطريقة الثانية**: إذا كان لدينا النظام الجبري $(A,+,.,',0,1)$ على المجموعة A بحيث أن المجموعة A هي مجموعة تحتوي على الأقل على عنصرين وتكون مرتبطة بعمليتين ثنائيتين هما (+) و(.) و $'$ هي عملية المتمم على المجموعة A وأن العنصران 0 و 1 في المجموعة A يحققا $0 \neq 1$ وبالتالي فإن هذا النظام الجبري يسمى نظام جبر بولياني إذا تحققت الشروط:

أولاً: شروط التجميع:

1. $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. $(a.b).c=a.(b.c)$

ثانياً: شروط الإبدال:

1. $a+b=b+a$
2. $a.b=b.a$

ثالثاً: شروط التوزيع:

1. $c.(a+b)=c.a+c.b$
2. $c+(a.b)=(c+a).(c+b)$

رابعاً: شروط المحايد:

1. $a+0=a$
2. $a.1=a$

خامساً: شروط المتمم:

1. $a+a'=1$
2. $a.a'=0$

ملاحظات:

1. للتسهيل سنكتب xy بدلا عن $x.y$
2. العنصر a' يسمى المتمم للعنصر a إذا تحقق الشرطين :

1. $a+a'=1$
2. $a.a'=0$

3. دائماً يكون العنصر 0 هو متمم العنصر 1 في أي نظام جبر بولياني وذلك لأن $1.0=0,\ 1+0=1$
4. مبدأ الإزدواجية Duality Principal متحقق على نظام الجبر البولياني بمعنى أن أي مبرهنة تكون صحيحة على النظام الجبري البولياني $(A,+,.,\ ',0,1)$ فهي أيضاً تكون صحيحة في النظام الجبري المرافق وذلك بتحويل+إلى. والعكس وتحويل 0 إلى 1والعكس وبالتالي يكون في أي نظام جبر بولياني دائماً يكون $a.0=0 \Leftrightarrow a+1=1$
5. إذا كانت A مجموعة غير خالية فإن مجموعة القوى $P(A)$ تشكل نظام جبري بولياني حيث :

$$a+b=a\cup b,\quad ab=a\cap b,\quad a'=a^c,\quad 0=\varphi,\quad 1=A$$

6. إذا كانت A هي مجموعة القضايا المنطقية فإن A تشكل نظام جبري بولياني حيث:

$p+q = p \vee q, \quad pq = p \wedge q, \quad p' = \sim p, \quad 0 = 0, \quad 1 = U$

مثال: بإستخدام جدول الصواب إثبت أن:

$(x+y)(x+z) = x+yz$

الحل:

نكون جدول الصواب:

x	y	z	x + y	x+z	(x + y)(x + z)	yz	x + yz
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

من العمود (6) و العمود (8) ينتج التساوي.

نظرية (6.4.6): إذا كان $(A, +, \cdot, ', 0, 1)$ نظام جبري بولياني فإن:

1. $a + a = a$
2. $aa = a$
3. $a + 1 = 1$
4. $a0 = 0$
5. $a + ab = a$
6. $a(a + b) = a$
7. $(a')' = a$
8. $0' = 1$
9. $1' = 0$
10. $(a + b)' = a'b'$

11. $(ab)' = a' + b'$

البرهان:

أولاً: لإثبات أن $a + a = a$؟

$$a = a + 0 = a + aa' = (a + a)(a + a') = (a + a)1 = a + a$$

ثانياً: لإثبات أن $aa = a$؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $a + a = a$ نحصل على $aa = a$

ثالثاً: لإثبات أن $a + 1 = 1$؟

$$a + 1 = (a + 1)1 = (a + 1)(a + a') = a + 1a' = a + a'1 = a + a' = 1$$

رابعاً: لإثبات أن $a0 = 0$؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $a + 1 = 1$ نحصل على $a0 = 0$

خامسا: لإثبات أن $a + ab = a$؟

$$a + ab = a1 + ab = a(1 + b) = a(b + 1) = a1 = a$$

سادساً: لإثبات أن $a(a + b) = a$؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $a + ab = a$ نحصل على $a(a + b) = a$

سابعاً: لإثبات أن $(a')' = a$؟

$$a + a' = 1, \qquad aa' = 0$$

إذن متمم a' هو a وتكتب $(a')' = a$

ثامناً و تاسعاً: لإثبات أن $0' = 1$ ؟

$$0 + 1 = 1, \qquad 01 = 0$$

إذن متمم 0 هو 1 وتكتب $(0)' = 1$

كذلك متمم 1 هو 0 وتكتب $(1)' = 0$

عاشراً: لإثبات أن $(a + b)' = a'b'$ ؟

نريد أن نثبت أن متمم $a + b$ هو $a'b'$ ؟

إثبات الشرط الأول من شروط المتمم:

$$(a + b)(a'b') = (a'b')(a + b) = a'b'a + a'b'b = a(a'b') + (a'b')b$$
$$= (aa')b' + a'(bb') = (0)b' + a'(0) = 0 + 0 = 0$$

إثبات الشرط الثاني من شروط المتمم:

$$(a+b)+(a'b')=\big((a+b)+a'\big)\big((a+b)+b'\big)$$

$$=\big((b+a)+a'\big)\big((b+a)+b'\big)=\big(b+(a+a')\big)\big(a+(b+b')\big)$$

$$=(b+1)+(a+1)=1+1=1$$

إذن متمم $a+b$ هو $a'b'$ وتكتب $(a+b)'=a'b'$

الحادي عشر: لإثبات أن $(ab)'=a'+b'$ ؟

بتطبيق مبدأ الإزدواجية على العلاقة $(a+b)'=a'b'$ نحصل على $(ab)'=a'+b'$.

مثال: إذا كان $(A,+,.,\ ',0,1)$ نظام جبري بولياني وكانت $a,b,c\in A$ بحيث:

1. $a+c=b+c$
2. $ac=bc$

فإثبت أن $a=b$

الحل:

$(a+b)(a+c)=a+bc=a+ac=a(1+c)=a1=a$ .... (1)

$(a+b)(a+c)=(b+a)(b+c)=b+ac=b+bc=b(1+c)$

$=b1=b$ .... (2)

من (1) و (2) نحصل على: $a=b$

مثال: إذا كان $(A,+,.,\ ',0,1)$ نظام جبري بولياني وكانت $a,b,c\in A$ بحيث:

1. $ab=ac$
2. $a'b=a'c$

فإثبت أن $a=b$

الحل:

$$b=1b=(a+a')b=ab+a'b=ac+a'c=(a+a')c=1c=c$$

(6-5) الدوال البوليانية Boolean functions

إذا كان $(A, +, \cdot, \bar{}\ , 0, 1)$ نظام جبري بولياني بحيث $A = \{0, 1\}$ فإن:

a	b	a′	b′	a + b	ab
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0

فإذا كانت $A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A\}$ فإن الدالة $f: A^n \to A$ تسمى دالة بوليانية ولوصف هذه الدالة فيتم ذلك عن طريق جدول الصواب لهذه الدالة.

مثال: أوصف جدول الصواب للدالة البوليانية

$$f(x, y) = x(\bar{x} + y)$$

الحل:

$$f(x, y) = x(\bar{x} + y)$$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} + y$	$f = x(\bar{x} + y)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

ملاحظة: الدالتان البوليتنان f_1, f_2 يكونا متساويتان وتكتب $f_1 = f_2$ وذلك إذا كان لهما نفس جدول الصواب أو إذا أمكن أن نستنتج أحد الدالتان من الأخرى وذلك بإستخدام خواص الجبر البولياني.

مثال: إذا كانت الدوال البوليانية

$f_1(x,y) = x(\bar{x}+y), \ \ f_2(x,y) = xy$

فإثبت أن $f_1 = f_2$ وذلك بإستخدام:

1. جدول الصواب.
2. خواص الجبر البولياني.

الحل:

أولاً: بإستخدام جدول الصواب:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}+y$	$x(\bar{x}+y)$	xy
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0

من العمود (5) والعمود (6) نحصل على التساوي.

ثانياً: بإستخدام خواص الجبر البولياني:

$f_1(x,y) = x(\bar{x}+y) = x\bar{x}+xy = 0+xy = xy = f_2(x,y)$

مثال: إذا كانت الدوال البوليانية

$f_1(x,y) = (x+y)(\bar{x}+y), \ \ f_2(x,y) = y$

فإثبت أن $f_1 = f_2$ وذلك بإستخدام:

1. جدول الصواب.
2. خواص الجبر البولياني.

الحل:

أولاً: بإستخدام جدول الصواب:

x	y	$\bar{x}$	$x+y$	$\bar{x}+y$	$(x+y)(\bar{x}+y)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0

من العمود (2) والعمود (6) نحصل على التساوي.

ثانياً: بإستخدام خواص الجبر البولياني:

$f_1(x,y) = (x+y)(\bar{x}+y) = y + x\bar{x} = y + 0 = y = f_2(x,y)$

مثال: إذا كانت الدوال البوليانية

$f_1(x,y) = x + \bar{x}y,\ \ f_2(x,y) = x + y$

فإثبت أن $f_1 = f_2$ وذلك بإستخدام:

1. جدول الصواب.
2. خواص الجبر البولياني.

الحل:

أولاً: بإستخدام جدول الصواب:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$x+\bar{x}y$	$x+y$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

من العمود (5) والعمود (6) نحصل على التساوي.

ثانياً: بإستخدام خواص الجبر البولياني:

$f_1(x,y) = x + \bar{x}y = (x+\bar{x})(x+y) = 1(x+y) = x + y = f_2(x,y)$

نظرية (6.4.7): (دي مورجان في n متغير): إذا كان $(A, +, ., \bar{\ }, 0, 1)$ نظام جبري بولياني وكانت $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ فإن:

1. $\overline{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \dots \overline{x_n}$
2. $\overline{(x_1 x_2 \dots x_n)} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_n}$

البرهان:

أولاً: يكفي إثبات أن:

$\overline{(x+y+z)} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

وذلك بإستخدام جدول الصواب:

x	y	z	$x+y+z$	$\overline{(x+y+z)}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

بمقارنة العمود (5) والعمود (9) لحصل على التساوي.

ثانياً: لإثبات أن:

$$\overline{xyz} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

فإننا نطبق مبدا الإزدواجية على القانون الأول

$$\overline{(x+y+z)} = \overline{xyz}$$

ويتم ذلك بتبديل (+) ب (.) والعكس فنحصل على:

$$\overline{xyz} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

تعريف (6.4.8): إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات بوليانية فإن كل عنصر من عناصر المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\}$ يسمى حرف بولياني (Literal) وبالتالي فالحرف البولياني هو متغير بولياني أو المتمم له و كل مجموعة من الحروف المضروبة في بعضها تكون أحد حدود الدالة البوليانية وبالتالي فالدالة البوليانية التي تتكون من مجموعة من عناصر حواصل الضرب ويفصل بينها + تسمى دالة بوليانية على شكل مجموع حاصل ضرب (Sum of product expression).

مثال: في الدالة البوليانية

$$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

1. الحروف هي $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, x, y, \bar{z}$ وبالتالي فعدد الحروف هي 12 علما بأننا نعد الحروف بدون أخذ التكرار في الإعتبار.

2. حدود الدالة البوليانية هي $xyz, \bar{x}\bar{y}z, \overline{xyz}, xy\bar{z}$ وعددهم هو 4.

تعريف (6.4.9): لتكن f, g دوال بوليانية متكافئة مكتوبة على هيئة مجموع ضرب فإننا نقول أن الدالة f أبسط من الدالة g إذا كان أحد الشرطين متحقق:

1. عدد حروف f أقل من عدد حروف g وعدد حدود f أقل من أو يساوي عدد حدود g.
2. عدد حدود f أقل من عدد حدود g و عدد حروف f أقل من أو يساوي عدد حروف g.

مثال:

1. الدالة البوليانية $f = x + \bar{y}z$ أبسط من الدالة البوليانية $g = xz + \bar{y}z + x\bar{z}$ علماً بأن $f = g$.
2. الدالة البوليانية $f = \bar{x}z + \bar{y}z$ أبسط من الدالة البوليانية $g = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z$ علماً بأن $f = g$.

تعريف (6.4.10): لتكن f دالة بوليانية فإننا نقول أن f على شكل مجموع ضرب أصغر (Minimal sum of product expression) وتكتب إختصارا ب MSP إذا تحقق شرطين:

1. f على شكل مجموع ضرب.
2. إذا كانت الدالة g دالة أخرى على شكل مجموع ضرب فإن الدالة f تكون أبسط من الدالة g.

ملاحظة: MSP هو أبسط شكل للدالة f يمكن تبسيطة بإستخدام قوانين الجبر البولياني للدالة البوليانية f.

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$$

الحل:

$$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z = (y + \bar{y})xz = 1xz = xz$$

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x, y, z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z}$$

الحل:

$$f(x,y,z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z} = x(z+\bar{z}) + \bar{y}z = x + \bar{y}z$$

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = \bar{x} + \overline{x\bar{y}}z + \overline{x\bar{y}\bar{z}} + \overline{\bar{y}z} + \bar{y}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x} + \overline{x\bar{y}}z + \overline{x\bar{y}\bar{z}} + \overline{\bar{y}z} + \bar{y} \\ &= \bar{x}(1+\bar{y}z) + \overline{\bar{y}z}(\bar{x}+1) + \bar{y} = \bar{x}1 + \overline{\bar{y}z}1 + \bar{y} \\ &= \bar{x} + \overline{\bar{y}z} + \bar{y} = \bar{x} + \bar{y}(\bar{z}+1) = \bar{x} + \bar{y}1 = \bar{x} + \bar{y} \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = \overline{\overline{[(\bar{y}+\bar{z})(x+\bar{y}+z)]}}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \overline{\overline{(\bar{y}+\bar{z})}} + \overline{\overline{(x+\bar{y}+z)}} = (\bar{y}+\bar{z}) + (x+\bar{y}+z) \\ &= x + \bar{y} + \bar{y} + z + \bar{z} = x + \bar{y} + 1 = x + 1 = 1 \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xy\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= xy\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w \\ &= x\bar{z}\bar{w}(y+\bar{y}) + x\bar{z}w(\bar{y}+y) = x\bar{z}\bar{w} + x\bar{z}w = x\bar{z}(\bar{w}+w) = x\bar{z} \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} \\ &= x\bar{y}z(w+\bar{w}) + x\bar{y}\bar{z}(w+\bar{w}) + (x+\bar{x})\bar{y}\bar{z}\bar{w} = x\bar{y}(z+\bar{z}) + \bar{y}\bar{z}\bar{w} \\ &= x\bar{y} + \bar{y}\bar{z}\bar{w} \end{aligned}$$

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$

الحل:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + xyzw + xyz\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$
$$= xyw(z+\bar{z}) + x\bar{y}w(z+\bar{z}) + xyz(w+\bar{w}) + \bar{x}yz(w+\bar{w})$$
$$= xyw + x\bar{y}w + xyz + \bar{x}yz = xw(y+\bar{y}) + (x+\bar{x})yz$$
$$= xw + yz$$

ملاحظة: إذا كان لدينا جدول صواب مكون من 2^n من الصفوف فإننا نستطيع أن نكون دالة بوليانية في n متغير بحيث يكون لها نفس جدول الصواب المعطى والنظرية التالية تثبت ذلك.

نظرية (6.4.8): إذا كان لدينا جدول صواب مكون من 2^n صف فإننا نستطيع أن نكون دالة بوليانية في n متغير بحيث يكون لها نفس جدول الصواب المعطى.

البرهان:

نفرض أن الدالة البوليانية هي $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وبالتالي يكون لدينا:

أولاً: إذا كانت جميع قيم الدالة في العمود الأخير في جدول الصواب المعطى هي 0 فإن:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n}$$

ثانياً: إذا كان هناك أحد قيم الدالة في العمود الأخير من جدول الصواب يساوي 1 فإننا نكون متغير جديد P_i يسمى "حد أصغرى" (Minterm) وهو عبارة عن حاصل الضرب:

$$P_i = y_1 y_2 \cdots y_n$$

حيث:

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{if } x_i = 1 \\ x_i' & \text{if } x_i = 0 \end{cases}$$

وبالتالي تكون الدالة:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1 + P_2 + \cdots + P_k, \qquad 1 \le k \le n$$

وهذه الدالة تسمى صيغة مجموع ضرب تام Complete sum of products expression وتعطى إختصارا بـ CSP.

ملاحظة: أي دالة بوليانية غير صفرية يمكن كتابتها بشكل وحيد على هيئة مجموع ضرب تام CSP وذلك بغض النظر عن ترتيب الحدود حيث طالما أن الدالة غير صفرية فإنه توجد قيمة واحدة على الأقل تساوي 1 وبالتالي نستطيع بإستخدام نظرية (6.4.8) تكوين الحد الأصغرى Minterm لهذا الصف وبالتالي نستطيع تكوين دالة بصيغة مجموع ضرب تام كما سبق وأثبتنا في النظرية المعطاة.

مثال: إكتب الدالة $f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{y}z$ على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جبريا أن الدالتان متساويتان.

الحل:

أولاً: نكون جدول الصواب:

x	y	z	$x\bar{z}$	$\bar{y}z$	$x\bar{z} + \bar{y}z$	Minterm
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	1	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير لحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$$

ثانياً: لإثبات جبراً أن الدالتان السابقتان متساويتان:

$$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{y}z = x\bar{z}1 + \bar{y}z1 = x\bar{z}(y+\bar{y}) + \bar{y}z(x+\bar{x})$$
$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + +\bar{x}\bar{y}z$$

وهي نفس الدالة التي حصلنا عليها بمجموع الضرب التام CSP.

مثال: إكتب الدالة $f(x,y,z) = x\bar{z} + y\bar{z}$ على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جيريا أن الدالتان متساويتان.

الحل:

أولاً: نكون جدول الصواب:

x	y	z	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$x\bar{z}+y\bar{z}$	Minterm
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير لحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z)=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$$

ثانيا: لإثبات جبراً أن الدالتان السابقتان متساويتان:

$$f(x,y,z)=x\bar{z}+y\bar{z}=x1\bar{z}+1y\bar{z}=x(y+\bar{y})\bar{z}+(x+\bar{x})y\bar{z}=$$
$$=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$$

وهي نفس الدالة التي حصلنا عليها بمجموع الضرب التام CSP.

مثال: إكتب الدالة $f(x,y,z)=xy+\bar{z}$ على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم إثبت جيريا أن الدالتان متساويتان.

الحل:

أولاً: نكون جدول الصواب:

x	y	z	xy	$xy+\bar{z}$	Minterm
1	1	1	1	1	xyz
1	1	0	1	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

ثانياً: لإثبات جبراً أن الدالتان السابقتان متساويتان:

$$f(x,y,z) = xy + \bar{z} = xy1 + 1\bar{z} = xy(z + \bar{z}) + (y + \bar{y})\bar{z}$$

$$= xyz + xy\bar{z} + y\bar{z} + \bar{y}\bar{z} = xyz + xy\bar{z} + 1y\bar{z} + 1\bar{y}\bar{z}$$

$$= xyz + xy\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z} + (x + \bar{x})\bar{y}\bar{z}$$

$$= xyz + xy\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

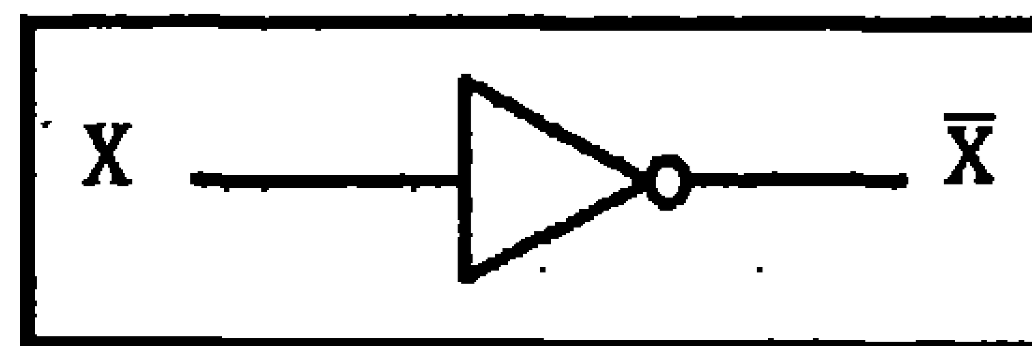
$$= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

وهي نفس الدالة التي حصلنا عليها بمجموع الضرب التام CSP .

(6-6) الدوائر المنطقية Logic Circuit

الدائرة الكهربائية لها بوبات Gates وهذه البوابات تعتبر دوال منطقية ويوجد عدة أنواع من البوابات المنطقية ومن أهمها:

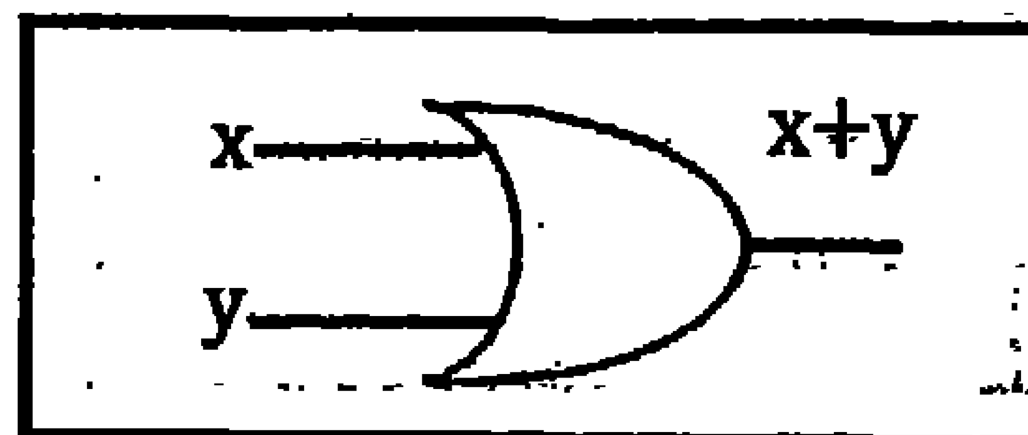
1. بوابة العاكس (النفي) Not gate ولها الشكل:



ولها الجدول

NOT GATE	
x	$\bar{x}$
1	0
0	1

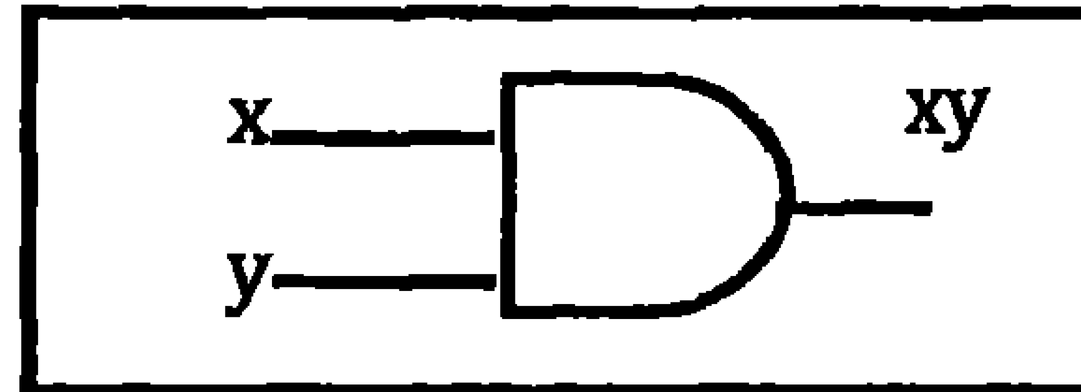
2. بوابة الفصيل OR gate ولها الشكل:



ولها الجدول:

OR GATE		
x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

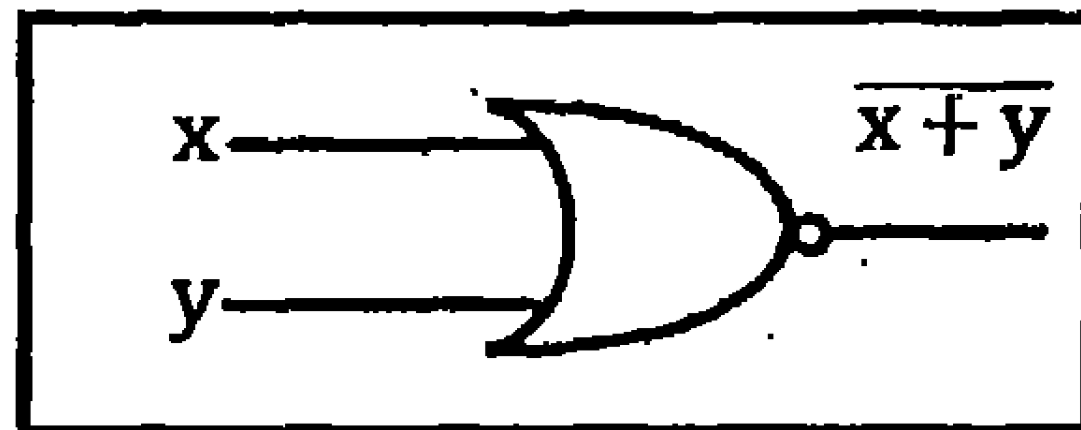
3. بوابة الربط (الوصل) AND gate ولها الشكل:



ولها الجدول:

AND GATE		
x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

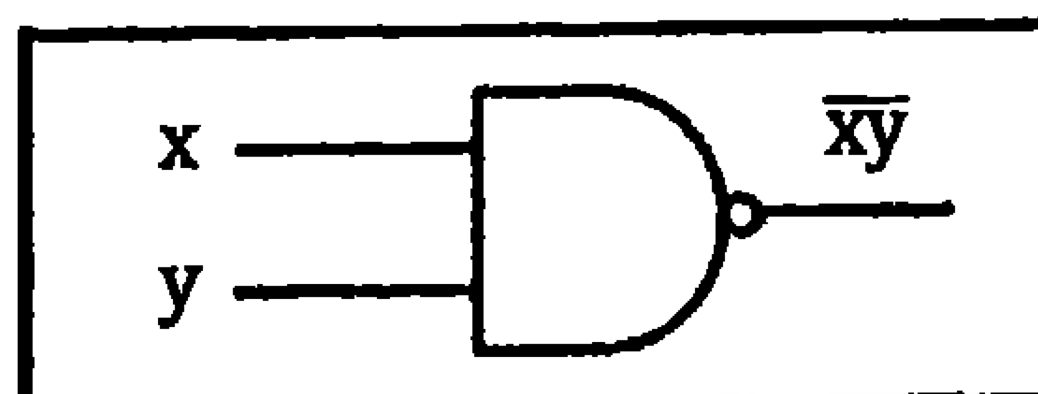
4. بوابة نفي الفصل NOR gate ولها الشكل:



ولها الجدول:

NOR GATE		
x	y	$\overline{x+y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

5. بوابة نفي الربط (الوصل) NAND gate ولها الشكل:

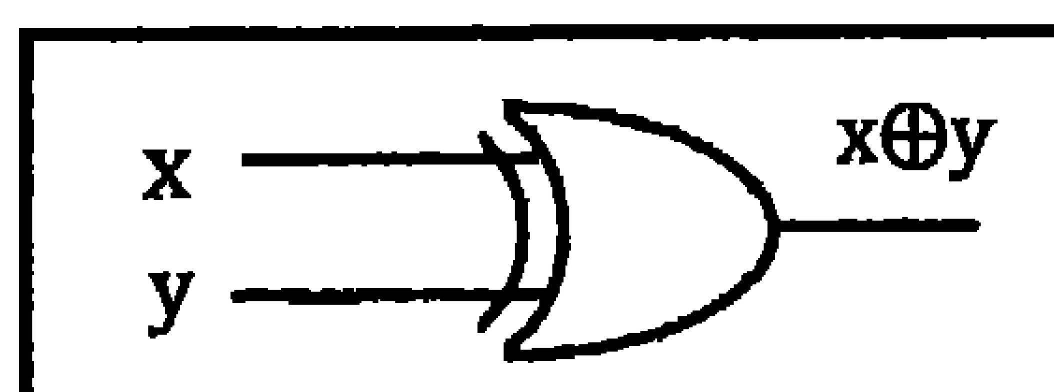


ولها الجدول:

NAND GATE		
x	y	$\overline{xy}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

6. بوابة أيهما وليس كلاهما XOR gate

وعدد المدخلات فيها هو 2 فقط ولها الشكل:



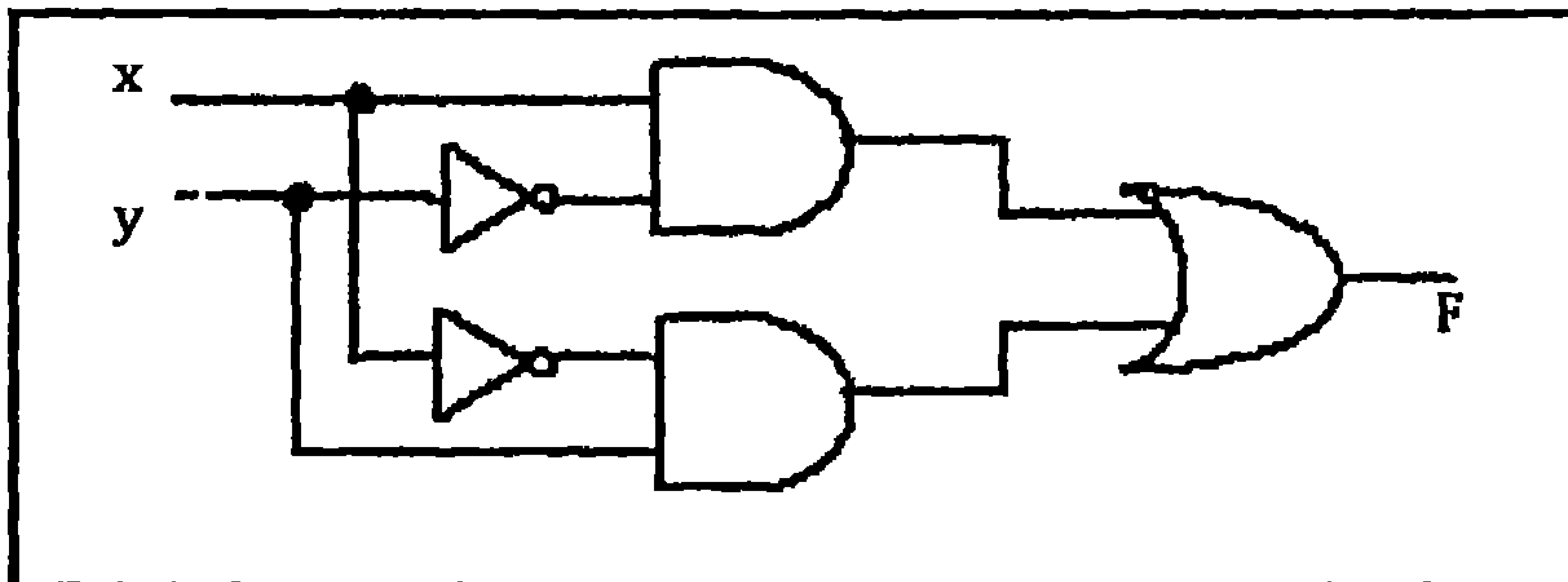
ولها الجدول:

XOR GATE		
x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

علما بأن هذه البوابة يكون لها التعبير البولياني أيضا:

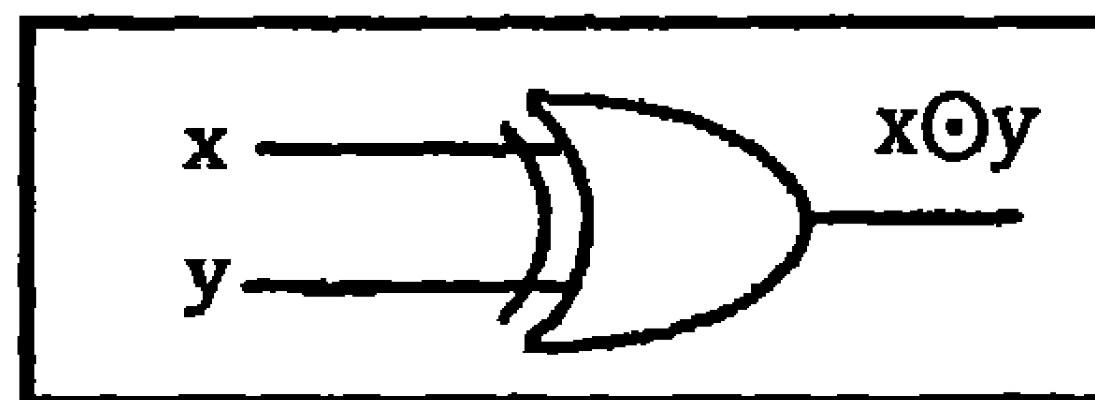
$x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y}$

ولها الشكل:



7. بوابة الفصل XNOR gate وهي نفي XOR gate

وعدد المدخلات فيها هو 2 فقط ولها الشكل:



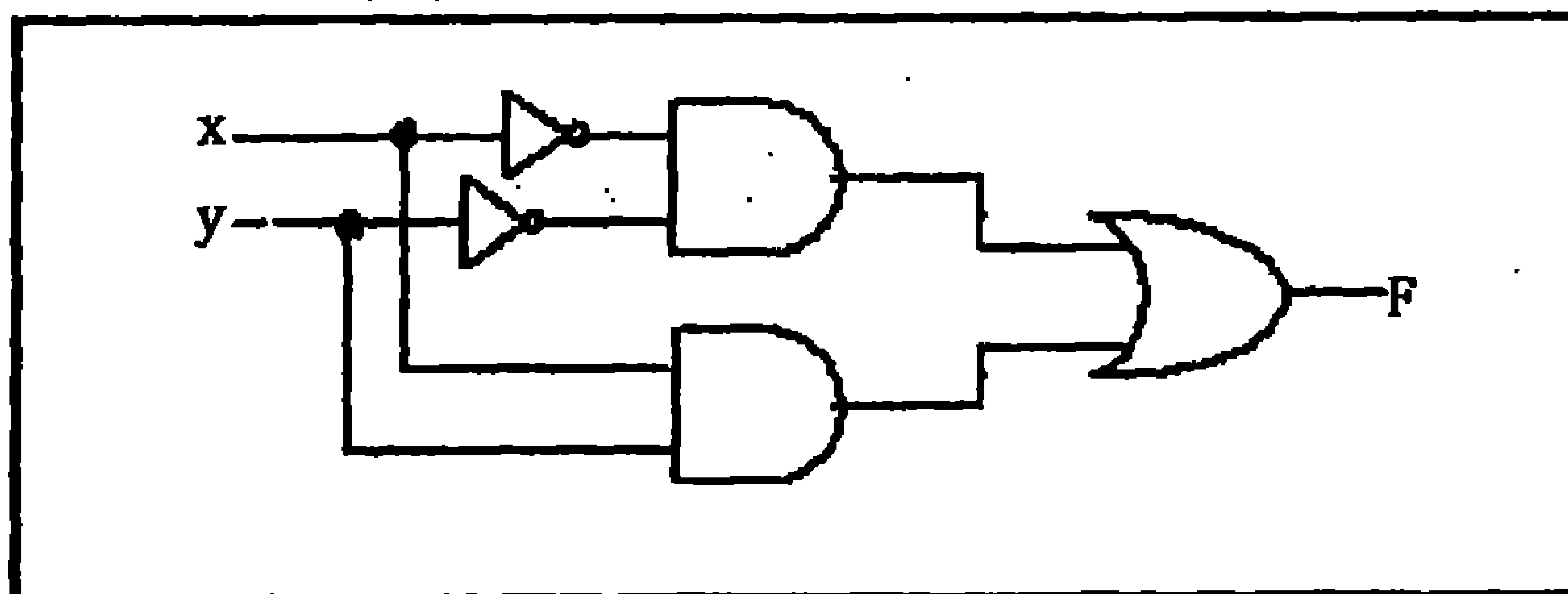
ولها الجدول:

XNOR GATE		
x	y	$x \odot y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

علما بأن هذه البوابة يكون لها التعبير البولياني:

$$x \odot y = xy + \overline{x}\overline{y}$$

ولها الشكل:



ملاحظات:

1. الجدول التالي يوضح قيم الصواب والرموز المستخدمة للبوابات المنطقية:

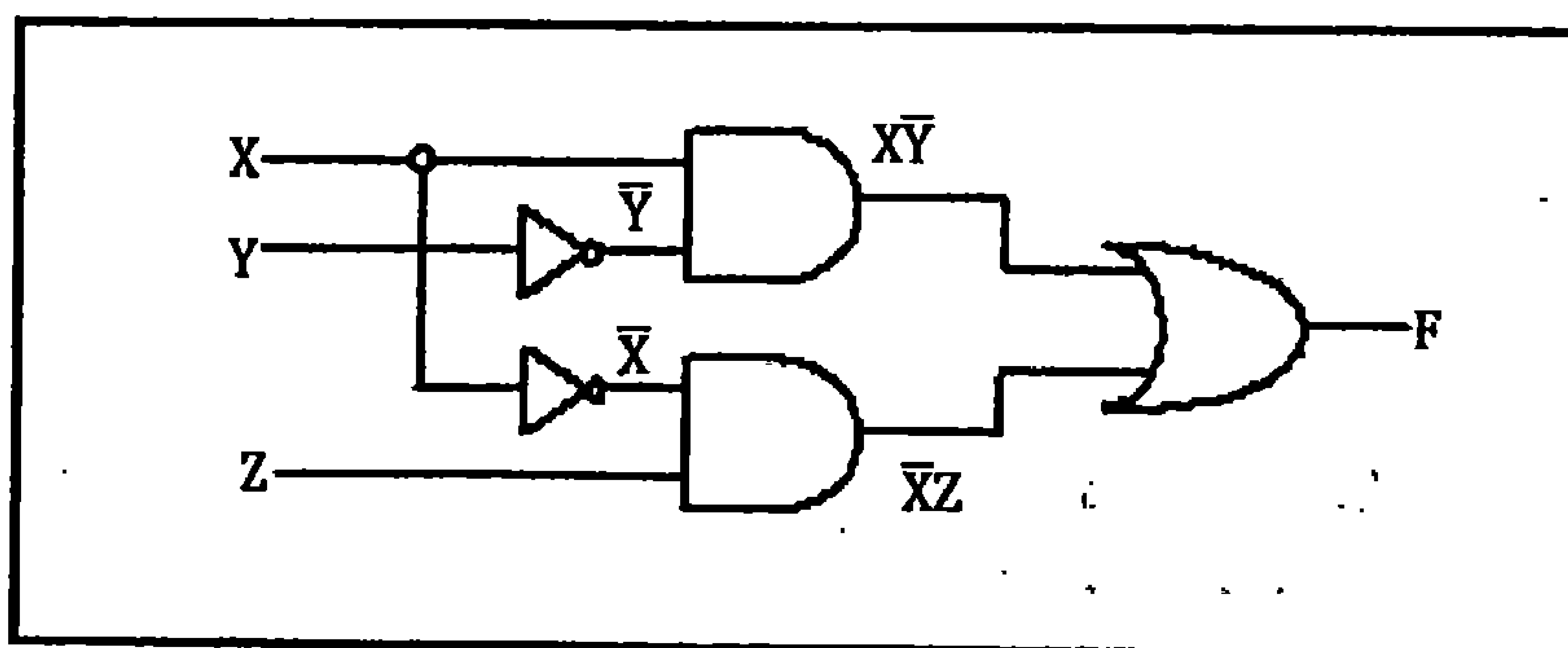
x	y	xy AND	$\overline{xy}$ NAND	x + y OR	$\overline{x+y}$ NOR	x⊕y XOR	x⊙y XNOR
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

2. في الدائرة الكهربائية يكون دائما التيار الكهربائي يتدفق من اليسار إلى اليمين حيث الخطوط التي تتصل مع البوابة المنطقية من جهة اليسار تسمى مدخل والتي تتصل من جهة اليمين تسمى مخرج.
3. في العادة نرمز لبوابة النفي بدائرة صغيرة تكون من جهة اليمين للبوابة المنطقية.
4. لأي بوابة منطقية إذا كان عدد المدخلات يساوي n فإن عدد الإحتمالات للمخرج هي 2^n.
5. كل دائرة منطقية يمكن التعبير عنها كدالة بوليانية والعكس صحيح بمعنى كل دالة بوليانية يمكن أن نعبر عنها كدائرة منطقية.

مثال: إرسم الدائرة المنطقية التي لها التعبير البولياني:

$$f(x, y, z) = x\bar{y} + \bar{x}z$$

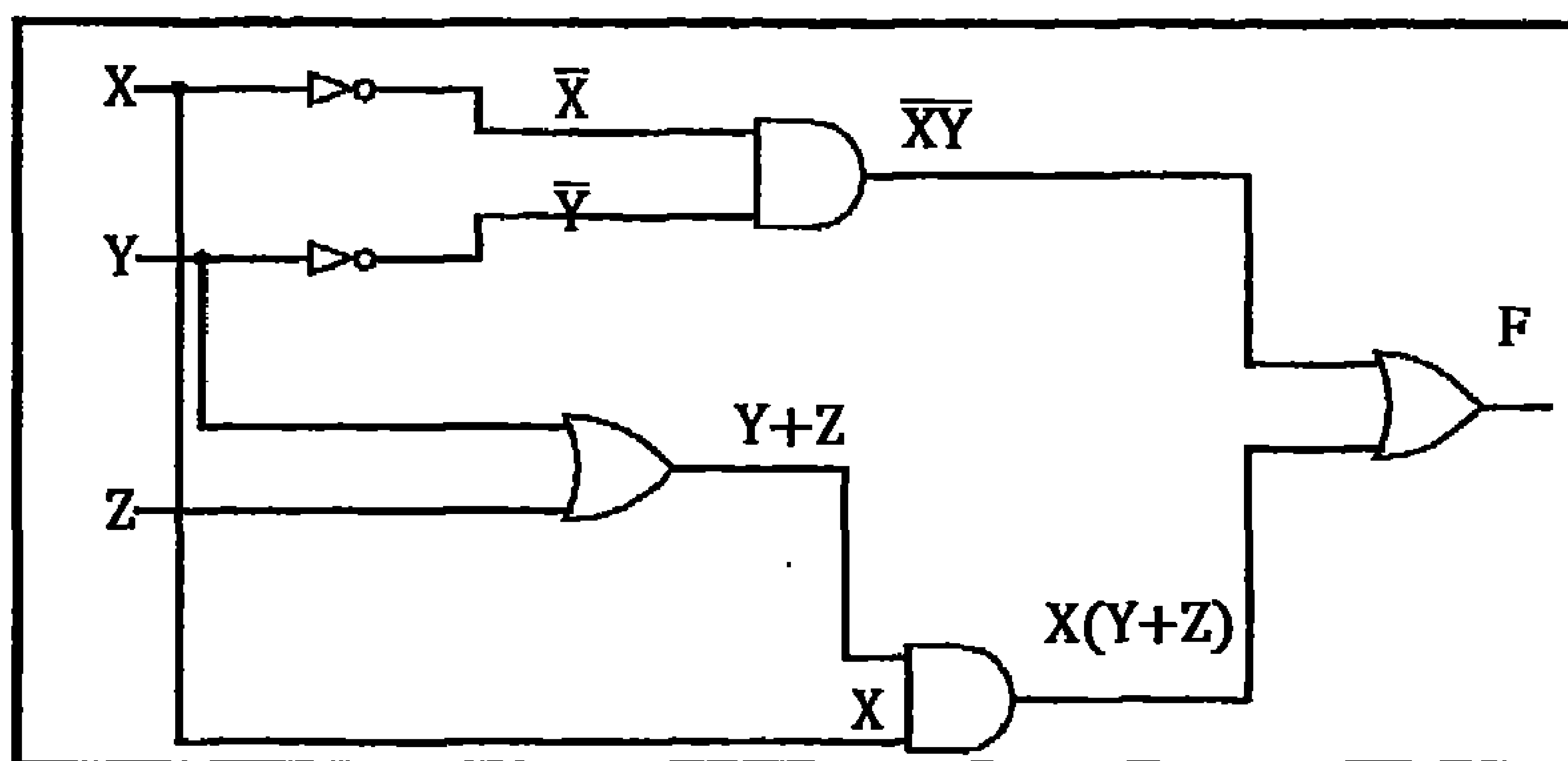
الحل:



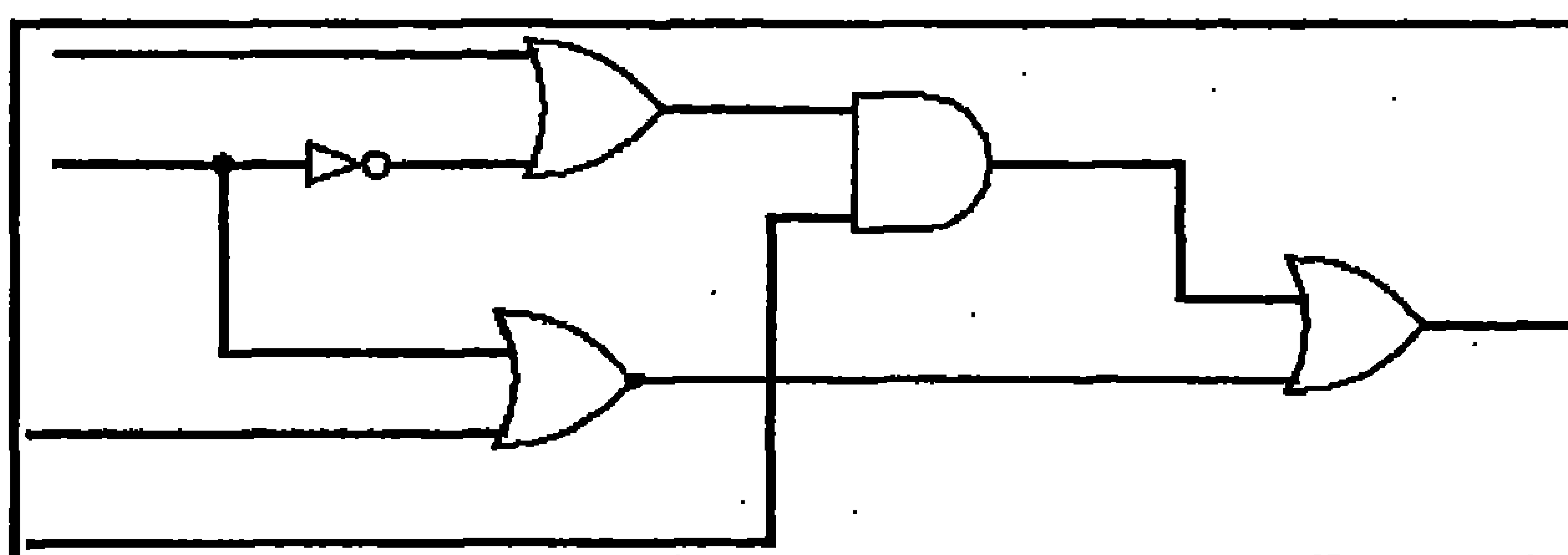
مثال: إرسم الدائرة المنطقية التي لها التعبير البولياني:

$f(x, y, z) = \overline{xy} + x(y + z)$

الحل:

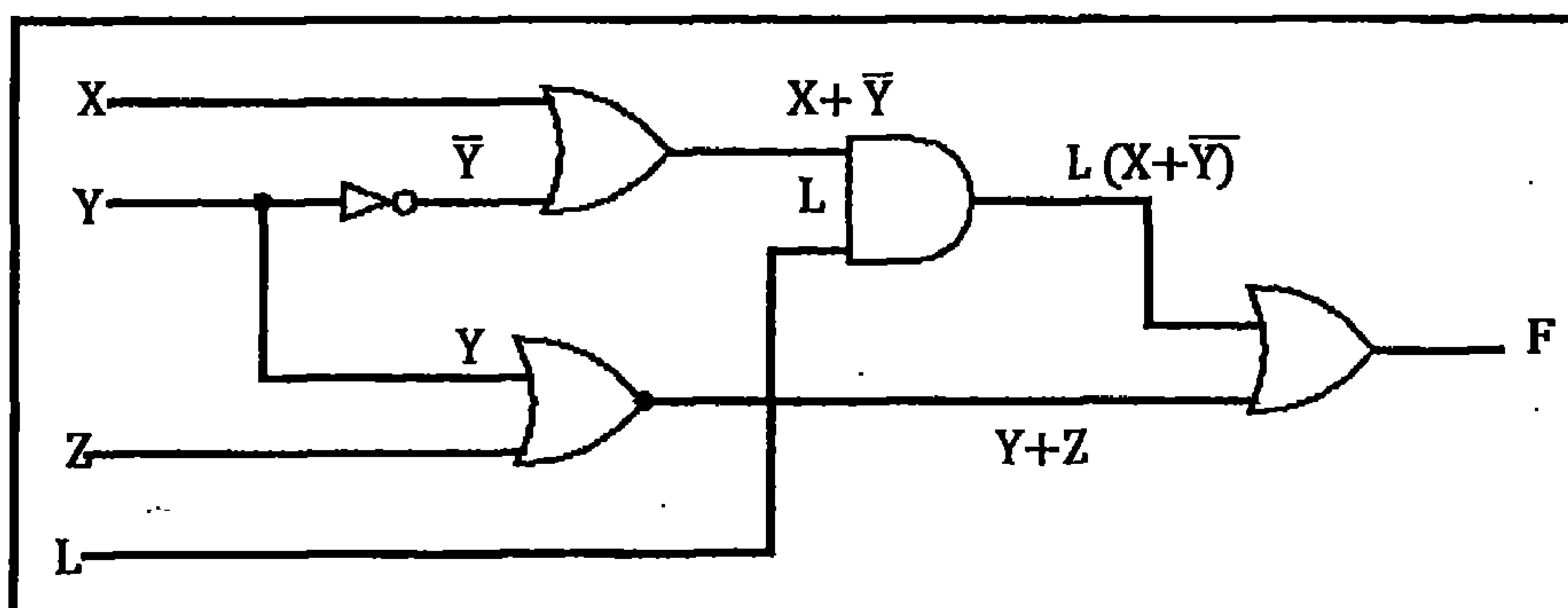


مثال: إكتب التعبير البولياني للدائرة المنطقية التالية:



الحل:

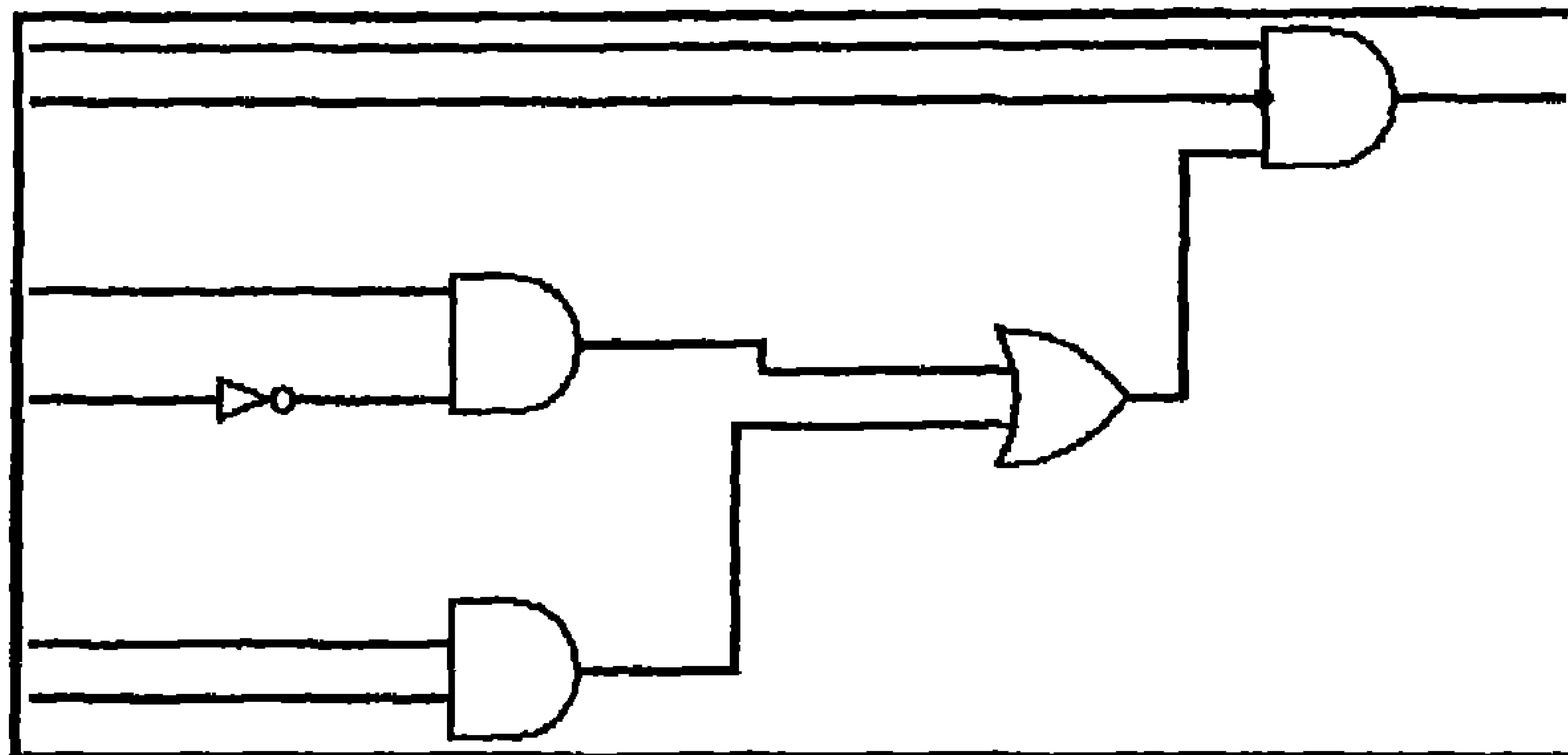
يمكن إعادة رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:



وبالتالي هذه الدائرة المنطقية يمكن التعبير عنها بولينيا ب:

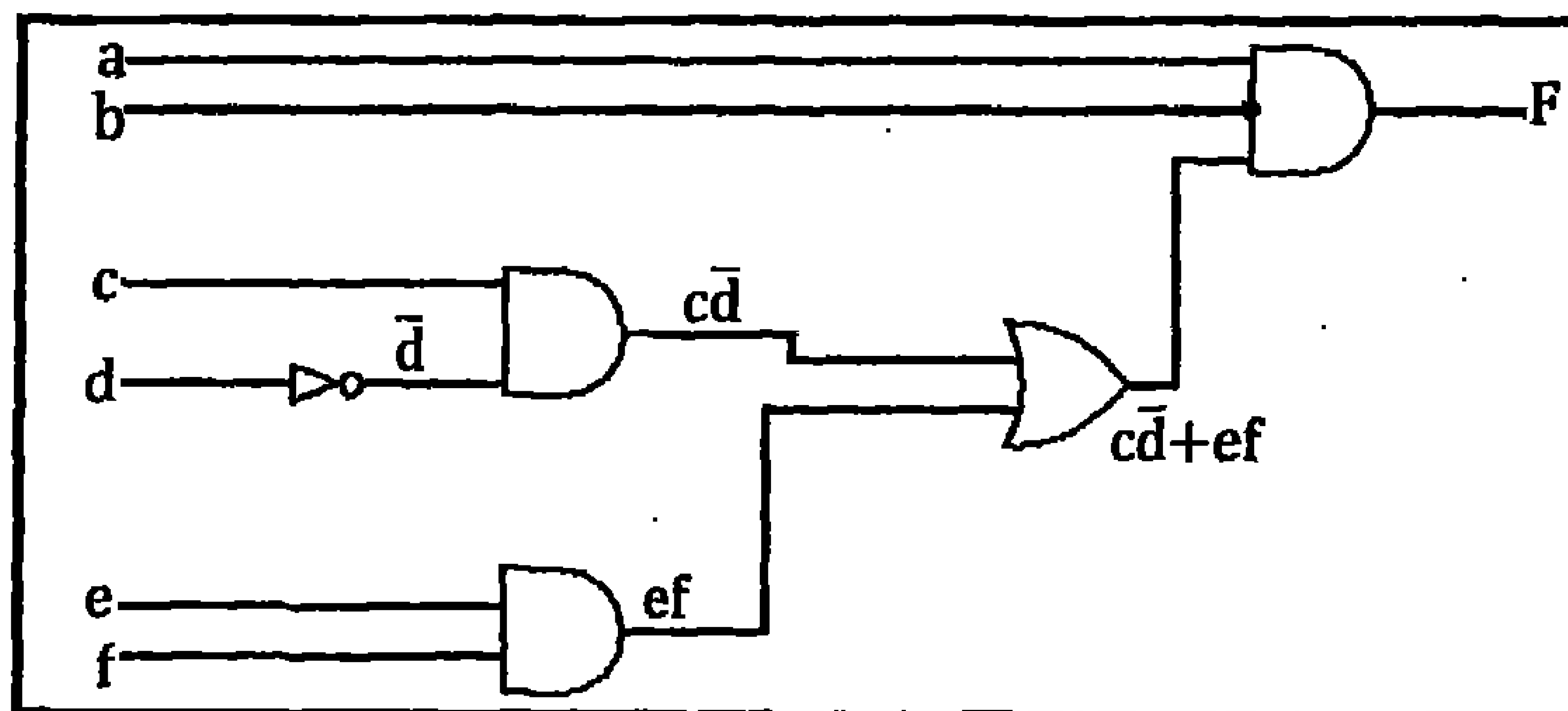
$F(x,y,z,l) = l(x+\bar{y}) + (y+z)$

مثال: إكتب التعبير البولياني للدائرة المنطقية التالية:



الحل:

يمكن إعادة رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:



وبالتالي هذه الدائرة المنطقية يمكن التعبير عنها بولينيا بـ:

$F(a,b,c,d,e,f) = ab(c\bar{d} + ef)$

مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

الحل:

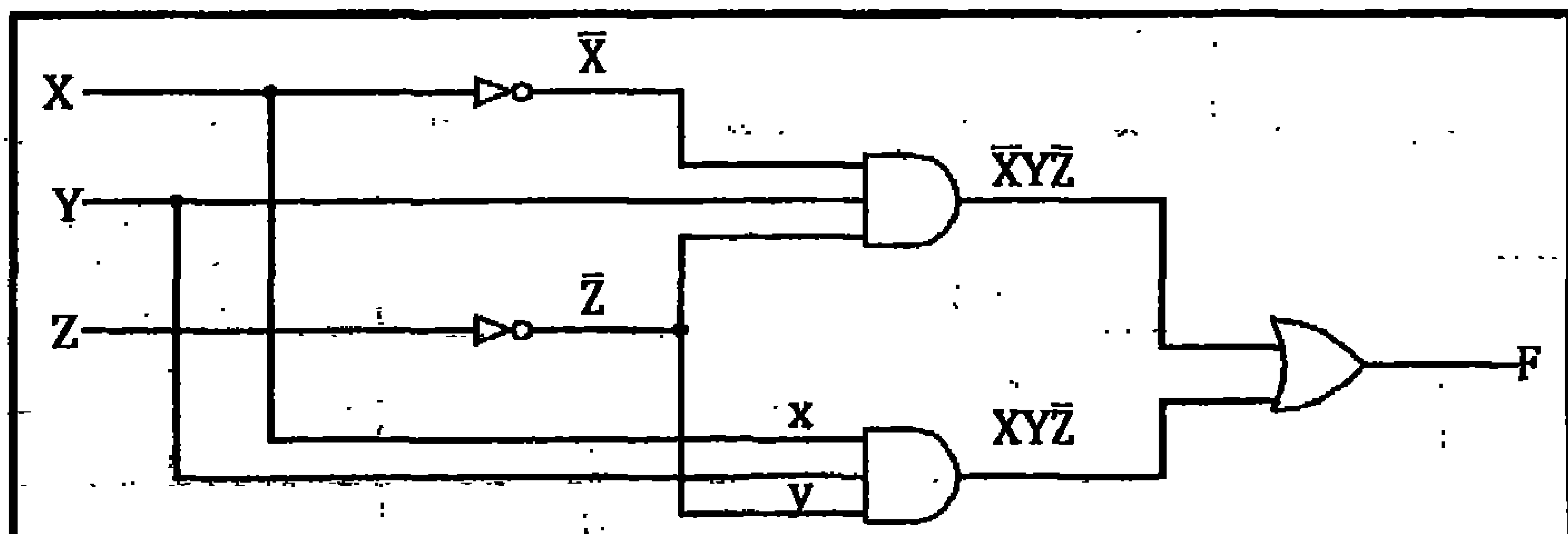
نكون جدول الصواب:

INPUT			OUTPUT	
x	y	z	F	Minterm
1	1	1	0	0
1	1	0	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$F(x,y,z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:



مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

الحل:

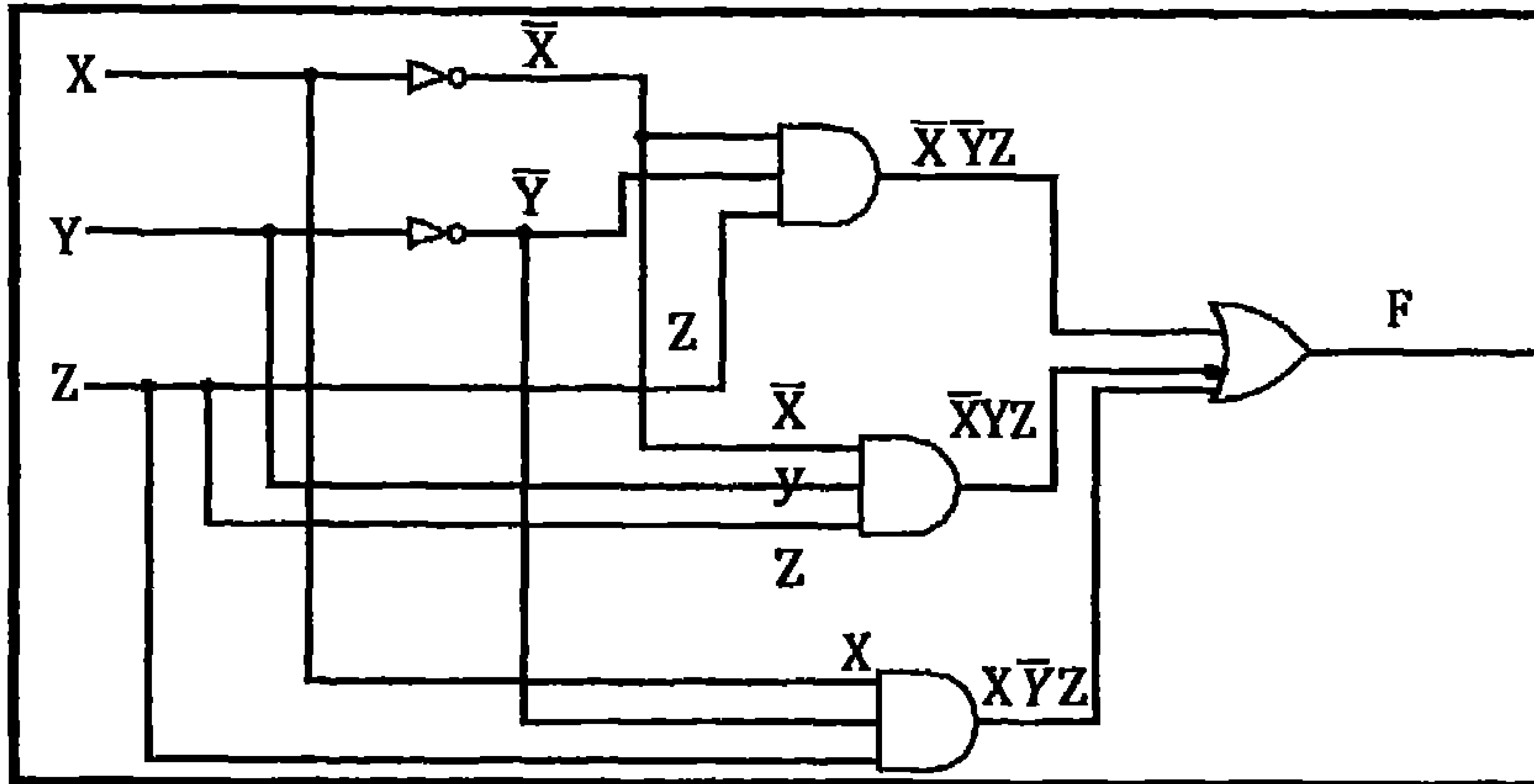
نكون جدول الصواب:

INPUT			OUTPUT	
x	y	z	F	Minterm
1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	0	0
0	1	1	1	$\bar{x}yz$
0	1	0	0	0
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

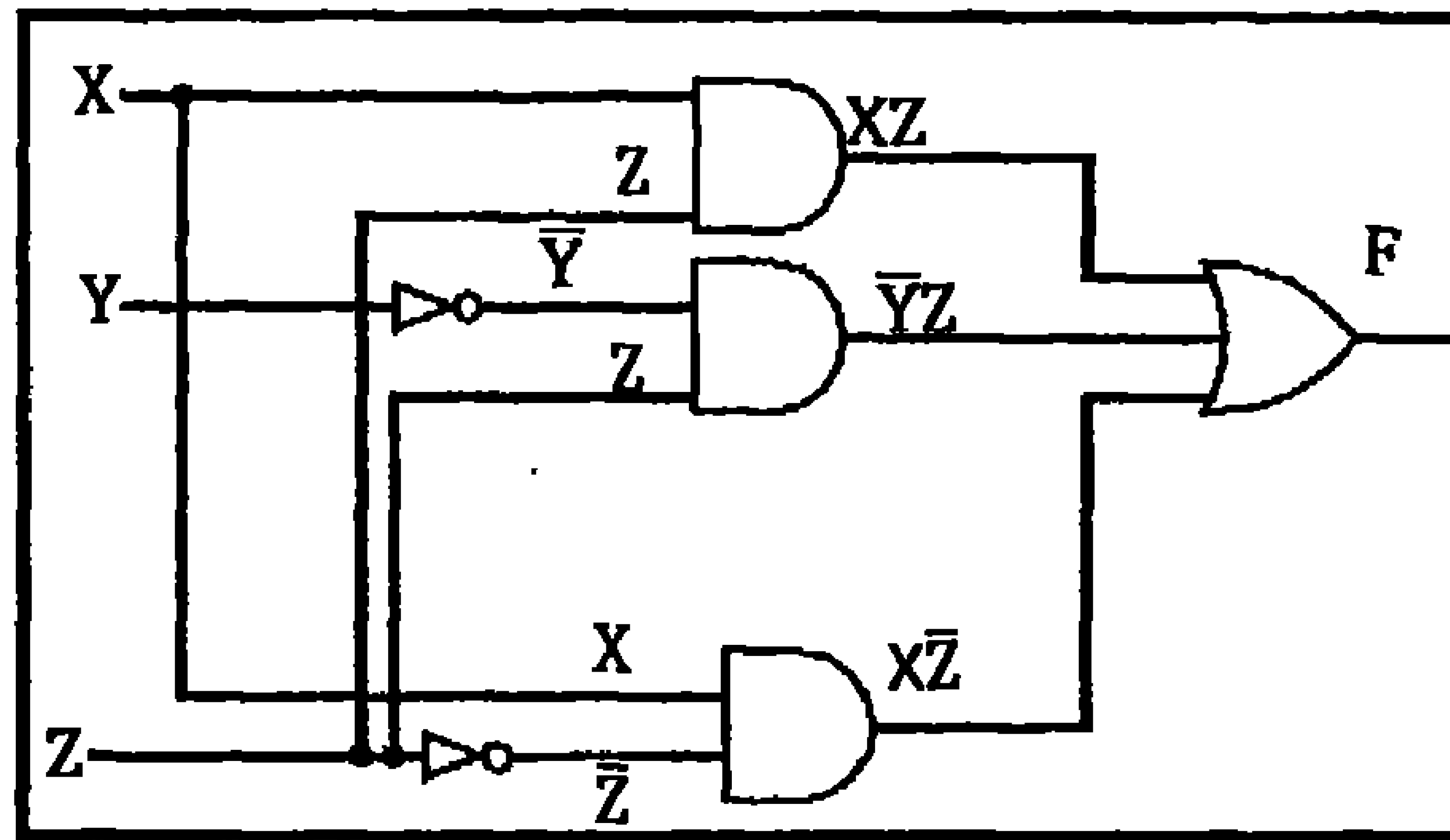


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(x,y,z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z}$$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

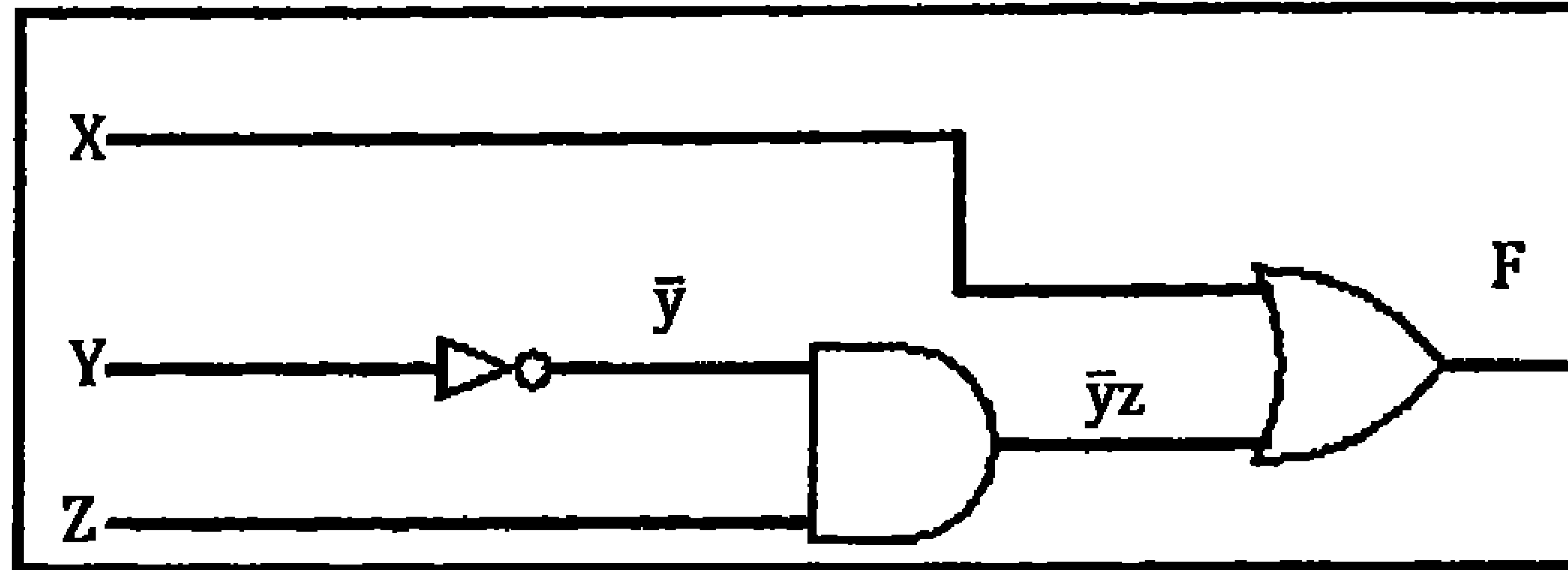


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = xz + \bar{y}z + x\bar{z} = xz + x\bar{z} + \bar{y}z = x(z + \bar{z}) + \bar{y}z$$

$$= x + \bar{y}z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

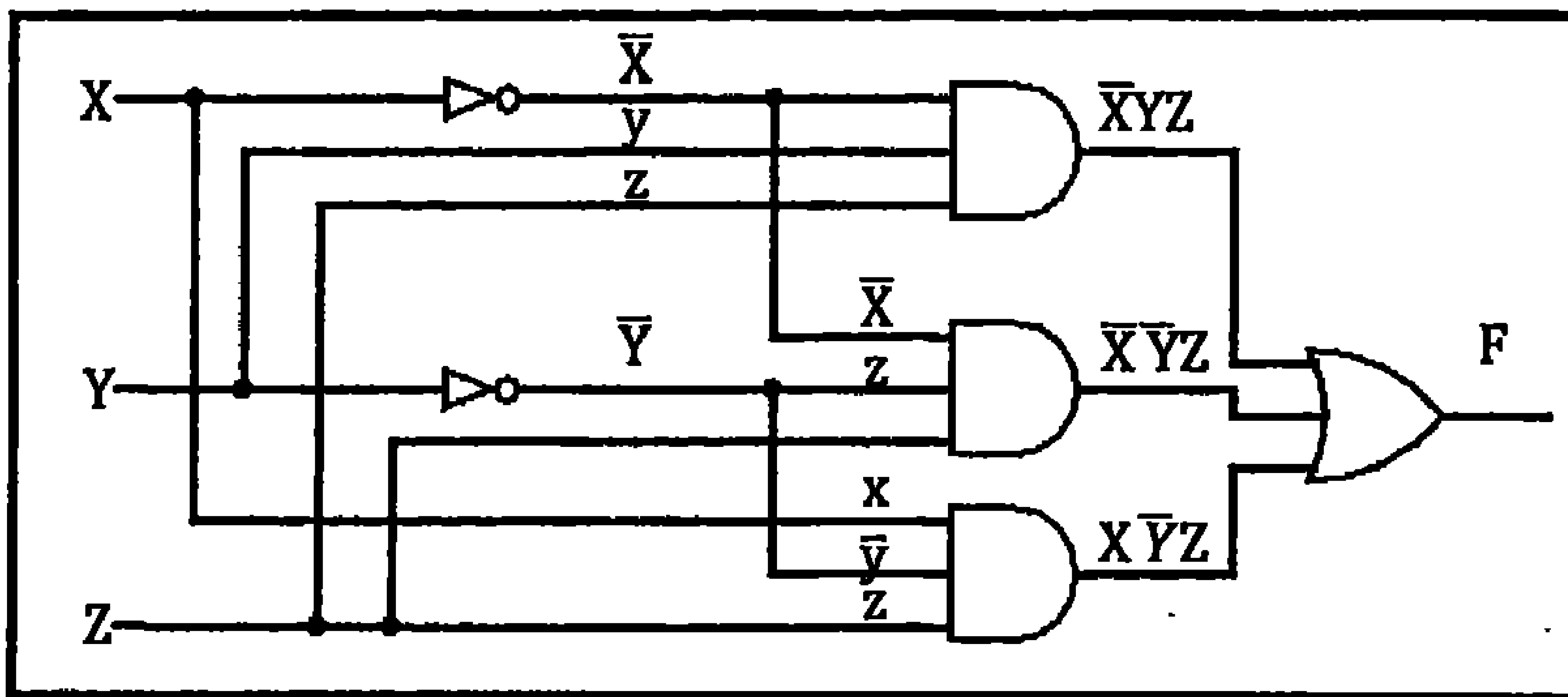


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z$$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

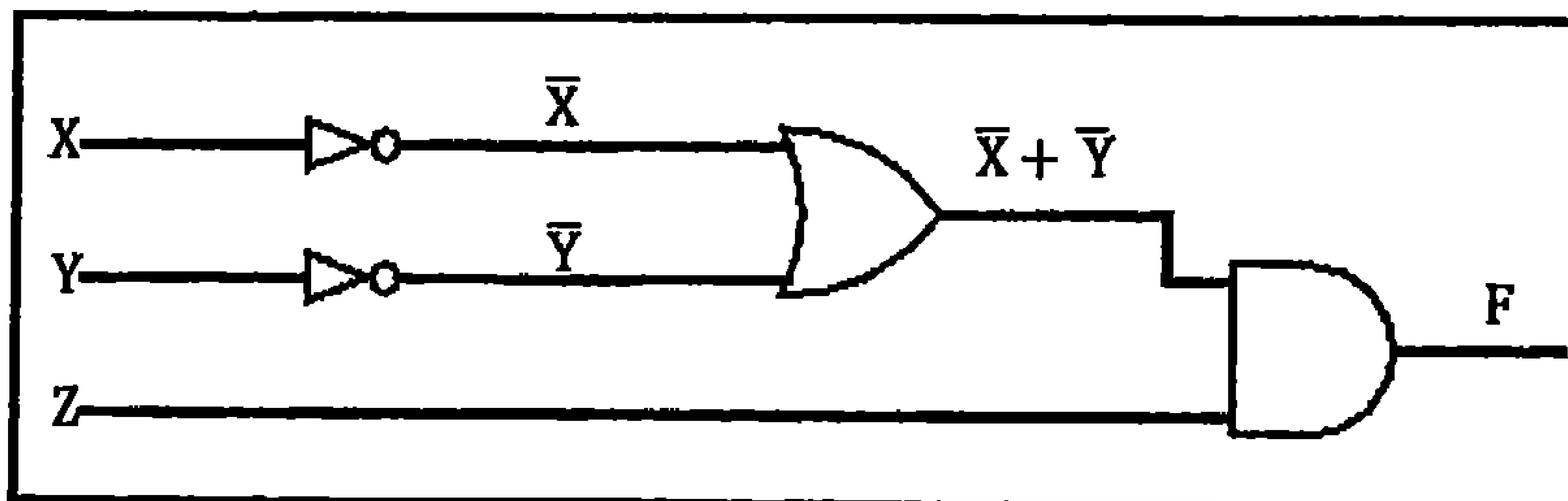


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$

$$= \bar{x}(y+\bar{y})z + (x+\bar{x})\bar{y}z = \bar{x}z + \bar{y}z = (\bar{x}+\bar{y})z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

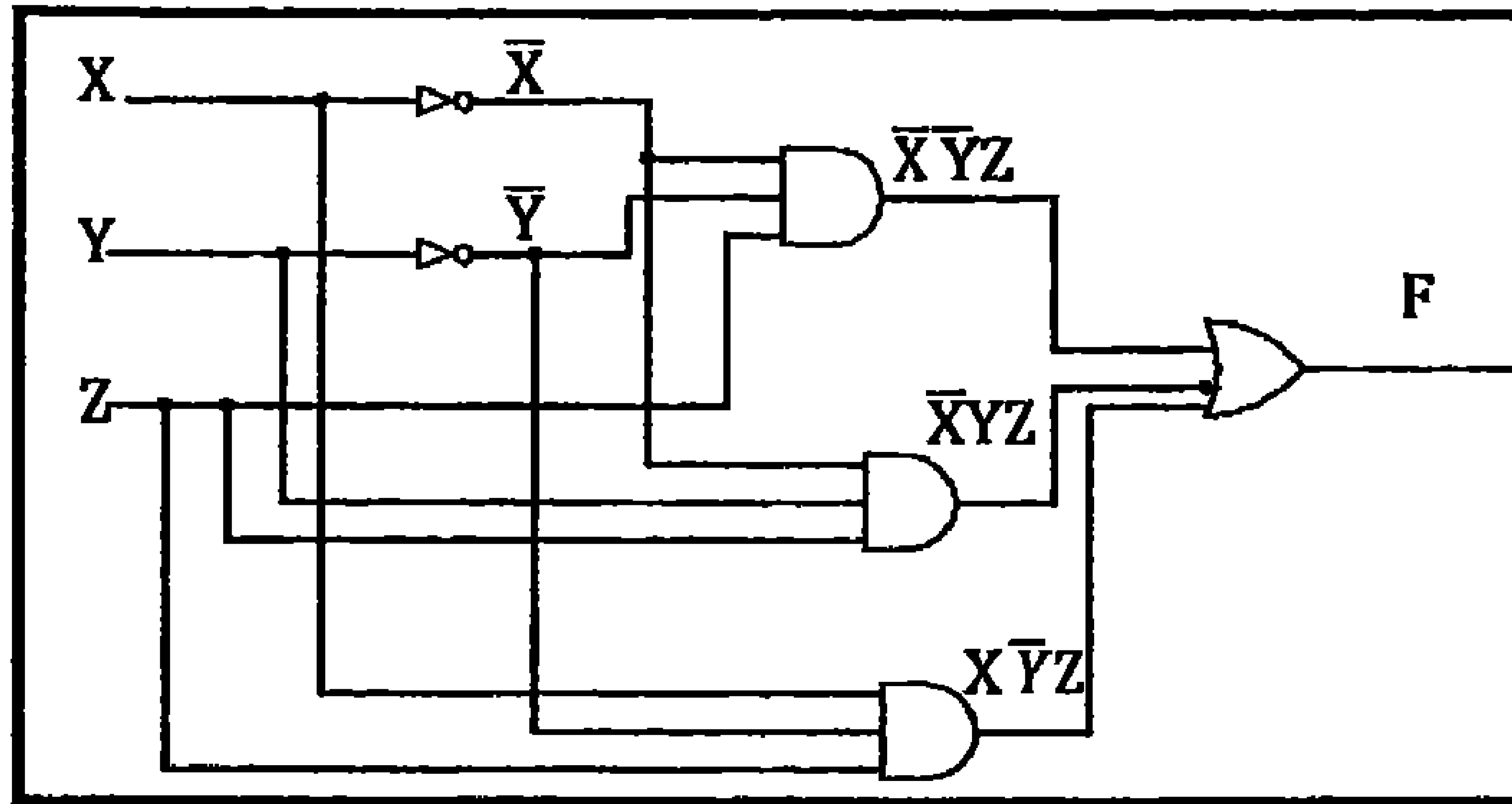


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط:الدائرة:

$F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

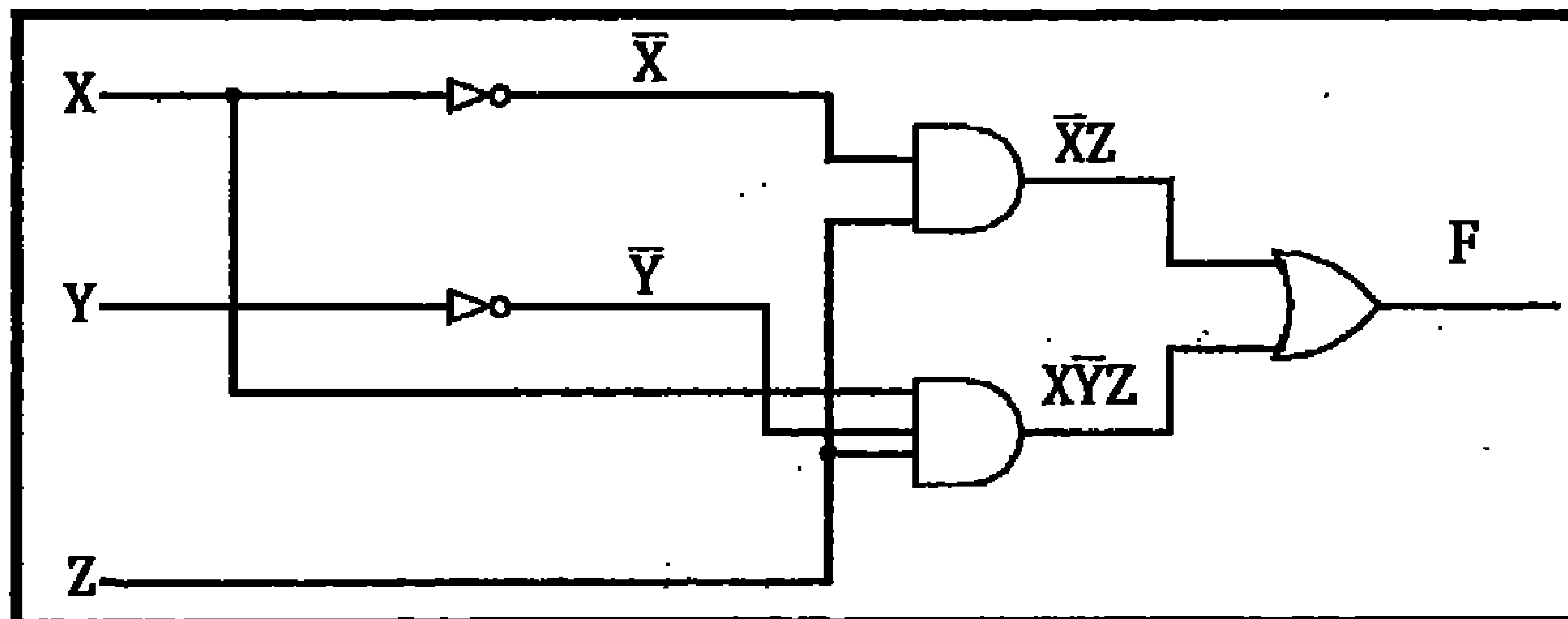


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z = (x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y})z$$

$$= (\,x\bar{y} + \bar{x}(y + \bar{y})\,)z = (\,x\bar{y} + \bar{x}(1)\,)z = (x\bar{y} + \bar{x})z = x\bar{y}z + \bar{x}z$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

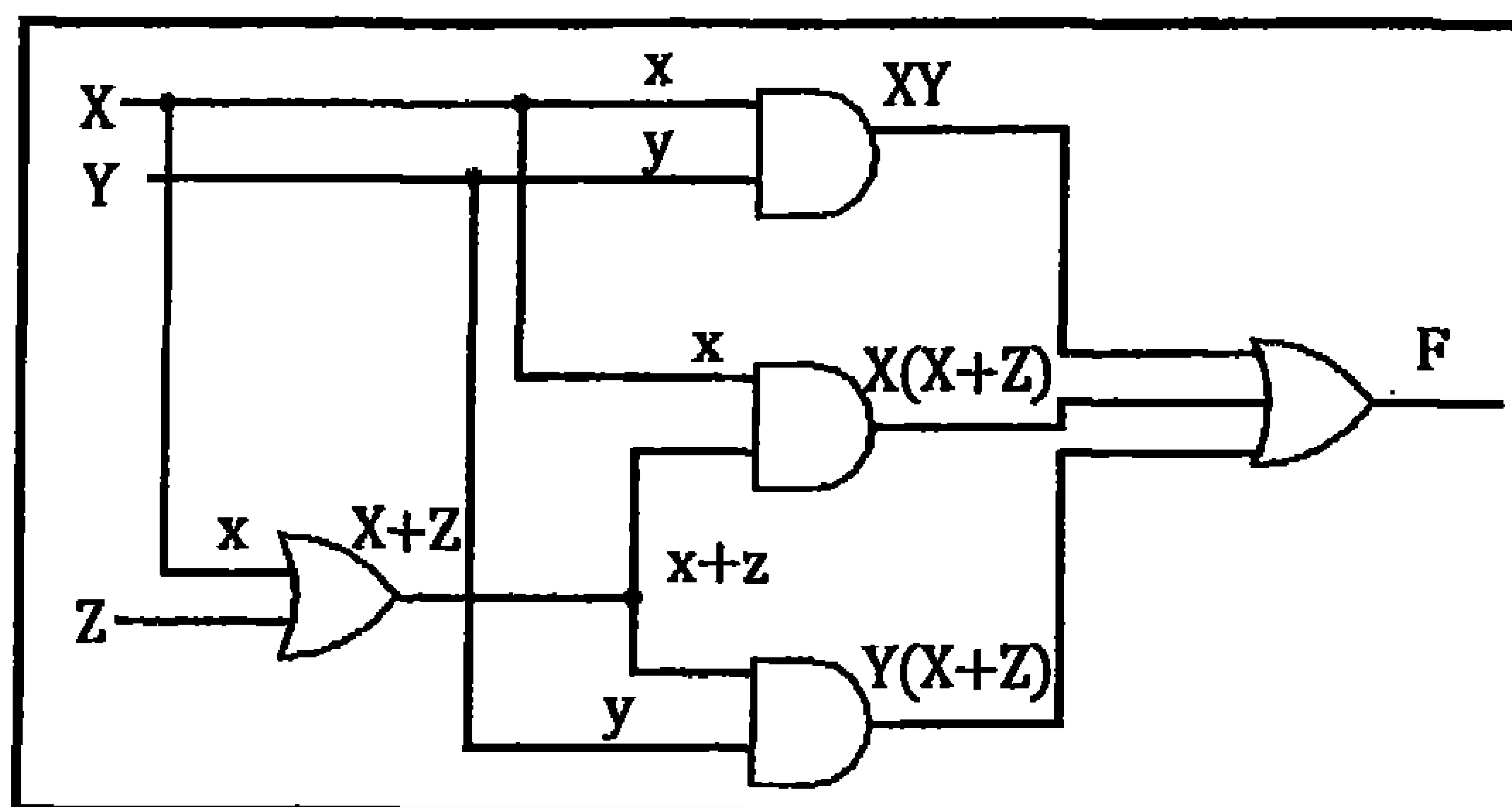


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(x,y,z) = xy + x(x+z) + y(x+z)$$

الحل:

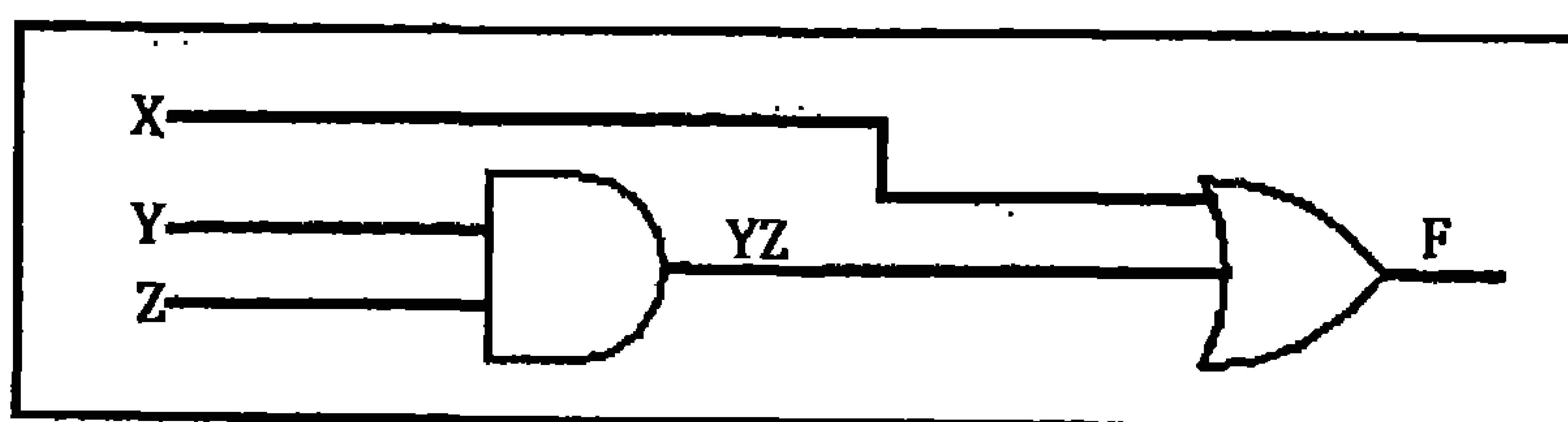
يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:



وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = xy + x(x+z) + y(x+z) = xy + xx + xz + yx + yz$$
$$= xy + x + xz + yz = x(y + 1 + z) + yz = x + yz$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

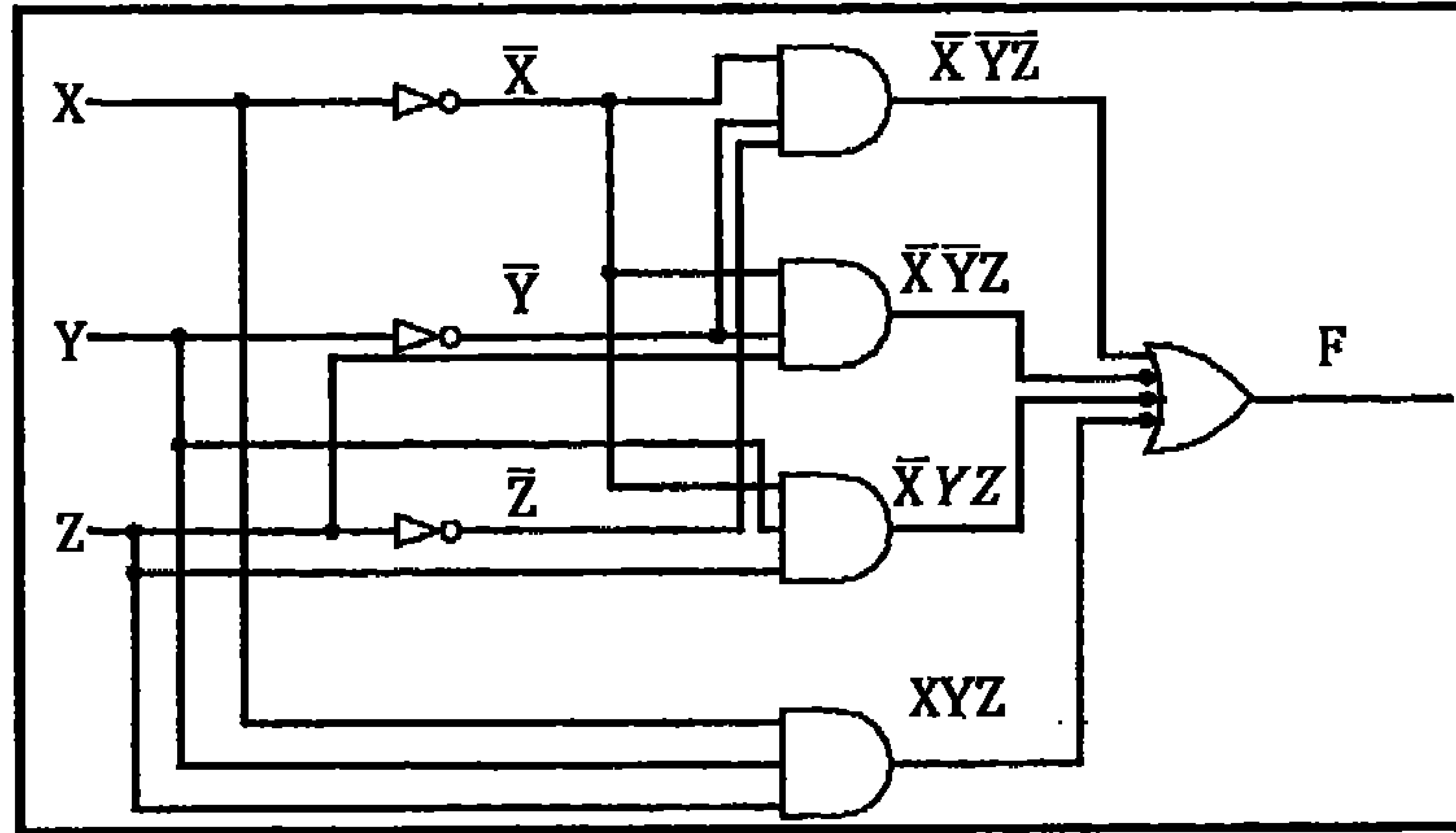


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

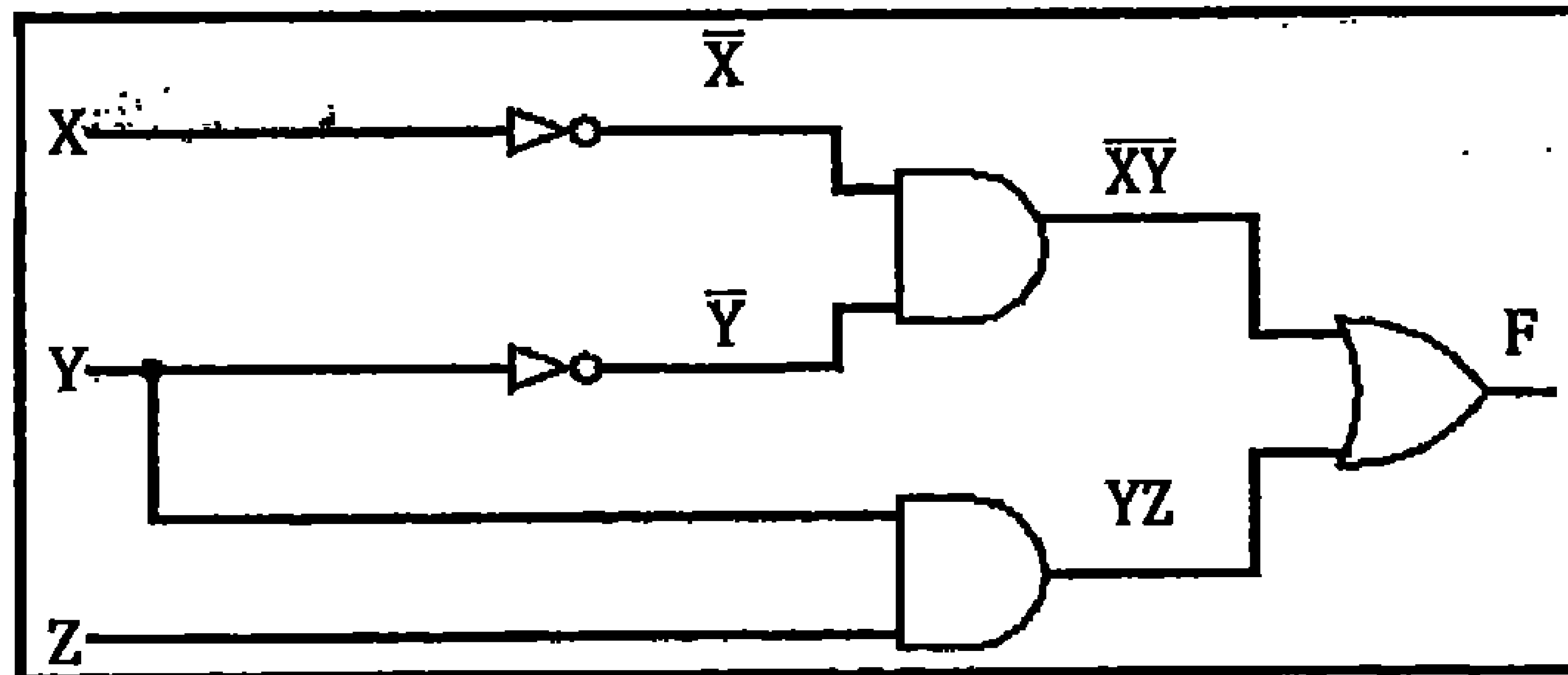


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz = (\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z) + (\bar{x}yz + xyz)$$

$$= \bar{x}\bar{y}(\bar{z} + z) + (\bar{x} + x)yz = \bar{x}\bar{y}1 + 1yz = \bar{x}\bar{y} + yz$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:

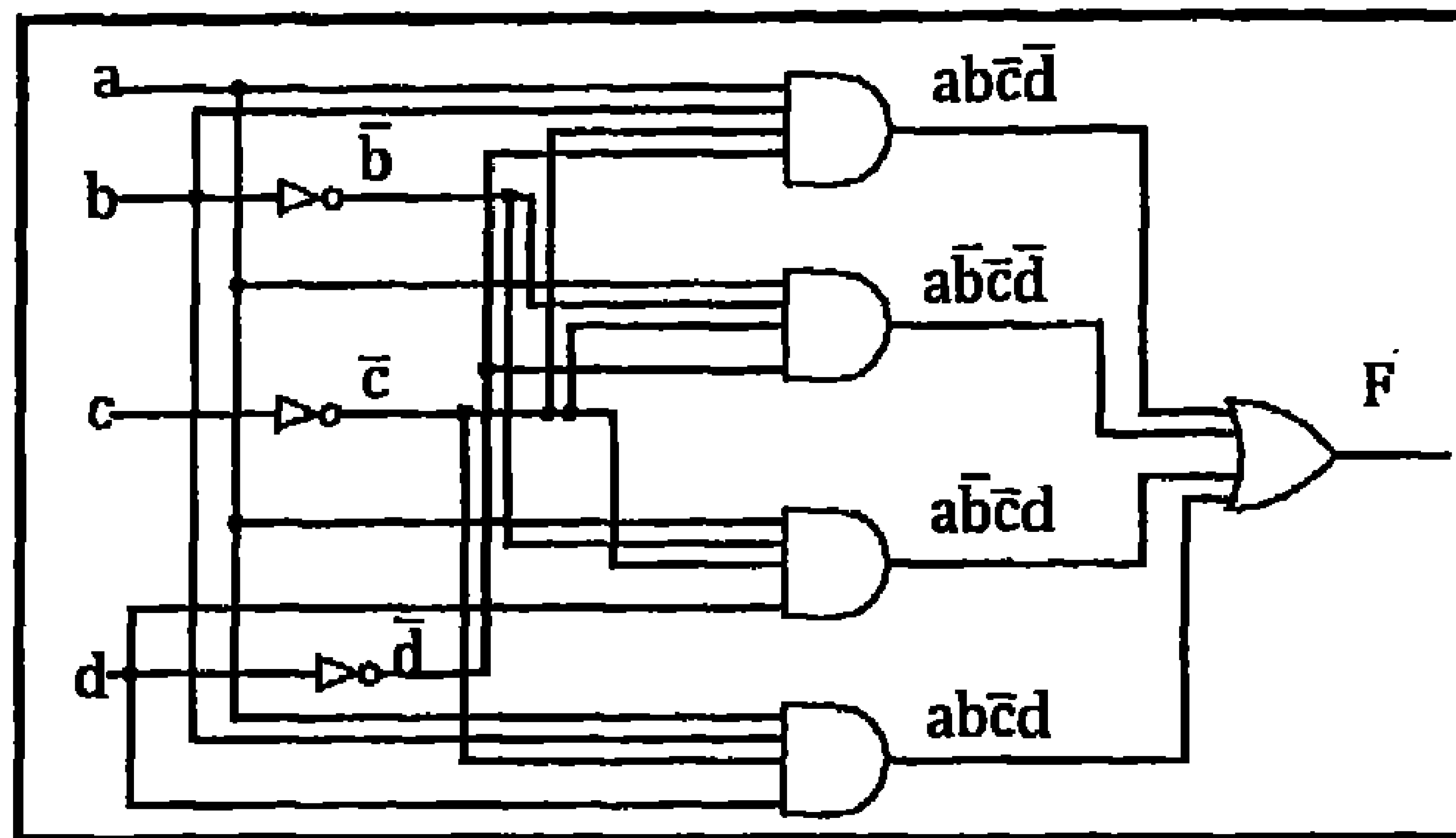


مثال: إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

$$F(a,b,c,d) = ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d$$

الحل:

يمكن رسم الدائرة مع وضع رموز للمدخلات والمخرجات كما يلي:

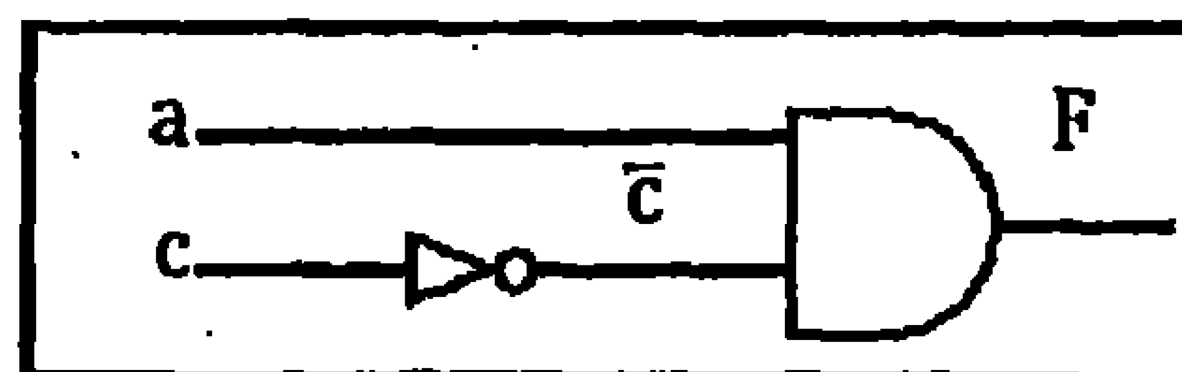


وبإستخدام الجبر البولياني يمكن تبسيط الدالة كما يلي:

$$F(a,b,c,d) = ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d$$

$$= a\bar{c}\bar{d}(b+\bar{b}) + a\bar{c}d(\bar{b}+b) = a\bar{c}\bar{d} + a\bar{c}d = a\bar{c}(\bar{d}+d) = a\bar{c}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالدائرة المنطقية التالية:



(6-7) خرائط كارنوف

تستخدم خرائط كارنوف لتبسيط شكل الدوال البوليانية في متغيرين أو ثلاث متغيرات أو أربع متغيرات حيث:

1. خريطة كارنوف في متغيرين هو مربع يحتوي على أربع خلايا مختلفة تعطى $2^2 = 4$ للإحتمالات المختلفة للدالة البوليانية في متغيرين ويأخذ الشكل:

	y	$\bar{y}$
x		
$\bar{x}$		

2. خريطة كارنوف في ثلاث متغيرات هو مستطيل يحتوي على ثمان خلايا مختلفة تعطى $2^3 = 8$ للإحتمالات المختلفة للدالة البوليانية في ثلاث متغيرات ويأخذ الشكل:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

3. خريطة كارنوف في أربع متغيرات هو مربع يحتوي على ستة عشر خلية مختلفة تعطى $2^4 = 16$ للإحتمالات المختلفة للدالة البوليانية في اربع متغيرات ويأخذ الشكل:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

فإذا كان لدينا دالة بوليانية f مكتوبة على هئية مجموع حاصل ضرب تام CSP فإننا نكون خريطة كارنوف التي تناسب عدد متغيرات الدالة f ثم نضع 1 في خلية خريطة كارنوف التي تقابل كل حد من حدود الدالة f .

مثال: كون خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$$

الحل:

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

مثال: كون خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x, y, z) = xyz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

الحل:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			
$\bar{x}$			1	1

مثال: كون خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + xyz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1		
$x\bar{y}$				1
$\bar{x}\bar{y}$			1	
$\bar{x}y$				1

تعريف (6.7.1): نقول أن خليتين من خلايا خريطة كارنوف إنهما يكونا متجاورتان إذا كان الحدان المقابلان لهما في الدالة البوليانية يختلفان فقط في حرف واحد.

مثال: في خريطة كارنوف للدالة:

$$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			
$\bar{x}$			1	1

الحدان $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ و $\bar{x}\bar{y}z$ متجاوران لإنهما مشتركان في الحرفان $\bar{y}$ و $\bar{x}$ ويختلفان فقط في الحروف $\bar{z}$ و z.

ملاحظة:

إذا كانت px و $p\bar{x}$ خليتان متجاورتان فإن:

$$p\bar{x} + px = p(\bar{x} + x) = p$$

وفي هذه الحالة نستطيع عمل تبسيط لأي حدين متجاورين في الدالة البوليانية.

مثال: بسط الدالة البوليانية:

$$f(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + +\bar{x}\bar{y}z$$

الحل:

$$f(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + +\bar{x}\bar{y}z = x\bar{z}(y + \bar{y}) + \bar{y}z(x + \bar{x})$$

$$= x\bar{z}1 + \bar{y}z1 = x\bar{z} + \bar{y}z$$

ملاحظات:

1. في خريطة كارنوف في ثلاث متغيرات فإن خليتان من الجدول تكونا متجاورتان إذا كان أحد الحالتان التاليتان متحقق:
   أ. **الحالة الأولى:** الخليتان متلاصقتان.
   ب. **الحالة الثانية:** الخليتان تقعان في طرفي أحد الصفوف.
2. في خريطة كارنوف في أربع متغيرات فإن خليتان من الجدول تكونا متجاورتان إذا كان أحد الحالات الثلاث التالية متحقق:
   أ. **الحالة الأولى:** الخليتان متلاصقتان.
   ب. **الحالة الثانية:** الخليتان تقعان في طرفي أحد الصفوف.
   ج. **الحالة الثالثة:** الخليتان تقعان في طرفي أحد الأعمدة.

تعريف (6.7.2): إذا كان لدينا خريطة كارنوف فإن الحالات التالية تسمى مستطيل أساسي:

1. خلية واحدة تحتوي على 1.
2. خليتان متجاورتان تحتوي كلا منها على 1.
3. أربع خلايا من النوع 1×4 أو 4×1 أو 2×2 وتحتوي كلا منها على 1 .
4. ثمان خلايا من النوع 4×2 أو 2×4 أو وتحتوي كلا منها على 1.

ملاحظات:

1. من الممكن أن يقع مستطيل أساسي داخل مستطيل أساسي أخر يكون أكبر منه وبالتالي نسمي المستطيل الأساسي مستطيل أعظم إذا لم يوجد أي مستطيل أساسي أخر يحتوي عليه.
2. إذا كان لدينا دالة بوليانية على شكل مجموع حاصل ضرب تام CSP فإن أي مستطيل أعظم في خريطة كارنوف يقابل حد واحد للدالة البوليانية ويسمى هذا الحد بأنه حد أولي للدالة البوليانية.
3. إذا كان لدينا مستطيل أعظم في خريطة كارنوف فإن الحد الأولي الذي يقابل هذا المستطيل يساوي حاصل ضرب جميع الحروف البوليانية التي تظهر كلا منها في جميع خلايا هذا المستطيل الأعظم .

خوارزمية (6.7.3): بإستخدام إسلوب خرائط كارنوف نستطيع تبسيط شكل الدالة البوليانية وكتابتها على شكل مجموع ضرب أصغر MSP كما يلي:

1. إكتب الدالة f على شكل مجموع حاصل ضرب تام CSP .
2. كون خريطة كارنوف للدالة f .
3. نوجد أصغر عدد من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع حدود الدالة f وفي حالة وجود أكثر من مجموعة من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع حدود الدالة f فإننا نختار المجموعة التي تحتوي على أقل عدد من الحروف أي المجموعة التي تعطينا أبسط صورة للدالة f .
4. نوجد الحدود الأولية التي تقابل المستطيلات العظمى التي حصلنا عليها في الخطوة (3).
5. إكتب الدالة البوليانية f على شكل مجموع الحدود الأولية التي حصلنا عليها في الخطوة (4).

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$		1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{y}$ وبالتالي:

$f(x,y) = \bar{y}$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{x}, \bar{y}$ وبالتالي:

$f(x,y) = \bar{x} + \bar{y}$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}yz$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			
$\bar{x}$	1			

إذن الحدود الأولية هي: yz وبالتالي:

$f(x, y, z,) = yz$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			1
$\bar{x}$				

إذن الحدود الأولية هي: xz وبالتالي:

$f(x, y, z,) = xz$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$f(x, y, z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$		1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{z}$ وبالتالي:

$f(x, y, z,) = \bar{z}$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$f(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$				

إذن الحدود الأولية هي: x وبالتالي:

$$f(x,y,z,)=x$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z)=xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1	1	1	1

إذن الحدود الأولية هي: 1 وبالتالي:

$$f(x,y,z,)=1$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z)=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$			1	1

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z)=x\bar{z}+\bar{x}\bar{y}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z)=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z++\bar{x}\bar{y}z$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	1
$\bar{x}$				1

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{z}, \bar{y}z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{y}z$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\overline{yz} + \bar{x}yz + +\overline{xyz}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\overline{yz}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{z}, \overline{yz}, \bar{x}yz$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = x\bar{z} + \overline{yz} + \bar{x}yz$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = x\bar{y}z + x\overline{yz} + \bar{x}yz + \overline{xyz} + \bar{x}\bar{y}z$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\overline{yz}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{y}, \bar{x}z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = \bar{y} + \bar{x}z$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي: $x, \bar{y}, z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = x + \bar{y} + z$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1	1	1
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي xy وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = xy$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x, y, z, w) = xyzw + xy\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي xyw وبالتالي:

$$f(x, y, z, w) = xyw$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x, y, z, w) = xyzw + xy\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}y\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	1			1

إذن الحدود الأولية هي yw وبالتالي:

$$f(x, y, z, w) = yw$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w)=xyzw+xy\bar{z}w+xy\bar{z}\bar{w}+xy\bar{z}w+x\bar{y}zw+x\bar{y}\bar{z}w+x\bar{y}\bar{z}\bar{w}+x\bar{y}\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1	1	1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي x وبالتالي:

$$f(x,y,z,w)=x$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w)=xy\bar{z}\bar{w}+x\bar{y}\bar{z}\bar{w}+x\bar{y}\bar{z}w+xy\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy			1	1
$x\bar{y}$			1	1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي $x\bar{z}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w)=x\bar{z}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1		
$x\bar{y}$		1		
$\bar{x}\bar{y}$		1	1	1
$\bar{x}y$		1	1	1

إذن الحدود الأولية هي $z\bar{w}, \bar{x}\bar{z}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = z\bar{w} + \bar{x}\bar{z}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$			1	1
$\bar{x}\bar{y}$			1	1
$\bar{x}y$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{z}, \bar{x}yw$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + \bar{x}yw$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$
$$+x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	1
$x\bar{y}$		1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$			1	1
$\bar{x}y$	1		1	1

إذن الحدود الأولية هي $\bar{z}, x\bar{w}, \bar{x}yw$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{z} + x\bar{w} + \bar{x}yw$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w}$$
$$+x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	
$x\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}y$	1	1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{w}$,$\bar{y}z$,$\bar{x}z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}z + \bar{y}z + \bar{w}$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$
$$+x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$				1
$\bar{x}y$		1	1	1

إذن الحدود الأولية هي: $y\bar{w}$, $\bar{z}w$,$x\bar{y}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y} + \bar{z}w + y\bar{w}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$			1	
$\bar{x}y$				

إذن الحدود الأولية هي: $x\bar{y},\ \bar{y}\bar{z}\bar{w}$ وبالتالي

$$f(x,y,z,w) = x\bar{y} + \bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$	1	1		1

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}y,\ \bar{x}z$ وبالتالي:

$$f(x,y,z) = \bar{x}y + \bar{x}z$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw + x\bar{y}zw$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			
$x\bar{y}$	1			
$\bar{x}\bar{y}$	1			1
$\bar{x}y$	1			1

إذن الحدود الأولية هي: $zw,\ \bar{x}w$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = zw + \bar{x}w$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + xyzw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$
$$+x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}y$	1			1

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{y},\ w$ **وبالتالي:**

$$f(x,y,z,w) = \bar{y} + w$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1		1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	1	1		

إذن الحدود الأولية هي: $xw,\ yz$ **وبالتالي:**

$$f(x,y,z,w) = xw + yz$$

مثال بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$$
$$+xyzw + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1		1	1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}y$		1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}\bar{y},\ xw,\ xy\bar{z},\ \bar{x}y\bar{w}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y} + xw + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{w}$$

مثال: بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}yz\bar{w}$$
$$+\bar{x}y\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1			1
$x\bar{y}$		1		1
$\bar{x}\bar{y}$	1			1
$\bar{x}y$	1	1	1	

إذن الحدود الأولية هي $xyw, \bar{y}\bar{z}w, \bar{x}zw, \bar{x}y\bar{w}, x\bar{y}z\bar{w}$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = xyw + \bar{y}\bar{z}w + \bar{x}zw + \bar{x}y\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w}$$

مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

INPUT			OUTPUT
x	y	z	
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

الحل:

أولاً: نحول جدول الصواب إلى دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP:

x	y	z	Minterm
1	1	1	xyz
1	1	0	$xy\bar{z}$
1	0	1	0
1	0	0	$x\overline{yz}$
0	1	1	0
0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	0
0	0	0	$\overline{xyz}$

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\overline{yz} + \bar{x}y\bar{z} + \overline{xyz}$$

ثانياً: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	
$\bar{x}$		1	1	

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{z}$, xy وبالتالي:

$$f(x,y,z) = \bar{z} + xy$$

مثال: إكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

INPUT				OUTPUT
X	y	z	w	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

الحل:

أولاً: نحول جدول الصواب إلى دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP:

x	y	z	w	Minterm
1	1	1	1	$xyzw$
1	1	1	0	$xyz\bar{w}$
1	1	0	1	$xy\bar{z}w$
1	0	1	1	$x\bar{y}zw$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}w$
1	0	0	0	0
0	1	1	1	$\bar{x}yzw$
0	1	1	0	$\bar{x}yz\bar{w}$
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

وبتجميع الحدود الأصغرية والتي هي في العمود الأخير نحصل على دالة تمثل مجموع الضرب التام CSP وهي:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\bar{z}w + xyz\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w}$$

ثانياً: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1		1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	1	1		

إذن الحدود الأولية هي: $xw,\ yz$ وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = xw + yz$$

ملاحظة: بإستخدام إسلوب متمم خرائط كارنوف نستطيع أيضاً تبسيط شكل الدالة البوليانية وكتابتها على شكل مجموع ضرب أصغر MSP كما يلي:

1. إكتب الدالة البوليانية على شكل مجموع حاصل ضرب تام CSP .
2. نكون خريطة كارنوف للدالة f .
3. نوجد متمم خريطة كارنوف التي حصلنا عليها في (2) بحيث نضع 0 في كل خلية لا تقابل 1 في الخريطة.
4. نوجد أصغر عدد من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع الخلايا التي تحتوي أصفار وفي حالة تعدد أصغر عدد من المستطيلات العظمى التي تحتوي على جميع خلايا الدالة فإننا نختار المستطيلات التي تعطينا أصغر عدد من الحروف.
5. نوجد الحدود الأولية التي تقابل المستطيلات العظمى التي حصلنا عليها في (4).
6. نكتب الدالة $\bar{f}$ على شكل مجموع الحدود الأولية التي حصلنا عليها في (5).
7. نحسب متمم الدالة $\bar{f}$ التي حصلنا عليها في (6) وبالتالي تكون الدالة $f = \overline{(\bar{f})}$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w}$$
$$+x\bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

أولاً: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	
$x\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	
$\bar{x}y$	1	1	1	

ثانياً: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	0			0
$x\bar{y}$				0
$\bar{x}\bar{y}$				0
$\bar{x}y$				0

إذن الحدود الأولية هي $\bar{z}w, xyw$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{z}w + xyw$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{z}w + xyw)} = (z+\bar{w})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{w})$$

$$= z(\bar{x}+\bar{y}) + \bar{w}$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

الحل:

أولاً: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية كما يلي:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$	1	1		1

ثانياً: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البوليانية كما يلي:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	0	0	0	0
$\bar{x}$			0	

إذن الحدود الأولية هي: $x,\ \overline{y}\overline{z}$ وبالتالي:

$$\overline{f}(x,y,z) = x + \overline{y}\overline{z}$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z) = \overline{\overline{f}} = \overline{(x+\overline{y}\overline{z})} = \overline{x}(y+z)$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xy\overline{z}w + x\overline{y}zw + x\overline{y}\overline{z}w + xyz\overline{w} + \overline{x}yzw + \overline{x}yz\overline{w}$$

الحل:

أولاً: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\overline{w}$	$\overline{z}\overline{w}$	$\overline{z}w$
xy	1	1		1
$x\overline{y}$	1			1
$\overline{x}\overline{y}$				
$\overline{x}y$	1	1		

ثانياً: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\overline{w}$	$\overline{z}\overline{w}$	$\overline{z}w$
xy			0	
$x\overline{y}$		0	0	
$\overline{x}\overline{y}$	0	0	0	0
$\overline{x}y$			0	0

إذن الحدود الأولية هي: $\overline{x}\overline{z}$ ، $\overline{y}\overline{w}$ ، $\overline{x}\overline{y}, \overline{z}\overline{w}$ وبالتالي:

$$\overline{f}(x,y,z,w) = \overline{x}\overline{y} + \overline{z}\overline{w} + \overline{y}\overline{w} + \overline{x}\overline{z}$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \overline{\overline{f}} = \overline{(\overline{x}\overline{y} + \overline{z}\overline{w} + \overline{y}\overline{w} + \overline{x}\overline{z})}$$
$$= (x+y)(z+w)(y+w)(x+z)$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = xyzw + xyz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}\bar{w}$$

الحل:

أولا: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1	1	1	1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$	1			
$\bar{x}y$			1	

ثانيا: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy				
$x\bar{y}$		0	0	
$\bar{x}\bar{y}$		0	0	0
$\bar{x}y$	0	0		0

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{y}\bar{w}, \bar{x}yz, \bar{x}\bar{z}w$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{y}\bar{w} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{z}w$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{y}\bar{w} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{z}w)}$$

$$= (y+w)(x+\bar{y}+\bar{z})(x+z+\bar{w})$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$$

$$+ xyzw + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw$$

الحل:

أولا: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	1		1	1
$x\bar{y}$	1			1
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}y$		1	1	

ثانيا: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		0		
$x\bar{y}$		0	0	
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$	0			0

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}yw, x\bar{y}\bar{w}, xz\bar{w}$ وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{x}yw + x\bar{y}\bar{w} + xz\bar{w}$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{x}yw + x\bar{y}\bar{w} + xz\bar{w})}$$

$$= (x+\bar{y}+\bar{w})(\bar{x}+y+w)(\bar{x}+\bar{z}+w)$$

مثال: بإستخدام متمم خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$
$$+ x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}$$

الحل:

أولا: نكون خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy		1	1	1
$x\bar{y}$	1	1	1	1
$\bar{x}\bar{y}$				1
$\bar{x}y$		1	1	1

ثانيا: نكون متمم خريطة كارنوف للدالة البوليانية:

	zw	$z\bar{w}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{z}w$
xy	0			
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$	0	0	0	
$\bar{x}y$	0			

إذن الحدود الأولية هي: $\bar{x}\bar{y}\bar{w}$ ، $\bar{x}\bar{y}z$ ، yzw وبالتالي:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z + yzw$$

وبالتالي:

$$f(x,y,z,w) = \bar{\bar{f}} = \overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z + yzw)}$$

$$= (x+y+w)(x+y+\bar{z})(\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})$$

تمارين

1. أرسم مخطط هاس للمجموعات الأتية المرتبة تحت علاقة الترتيب والتي هي علاقة x تقسم y ثم حدد هل علاقة الترتيب هي ترتيب كلي أم لا:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$.
2. $A = \{3, 5, 12, 30, 60\}$.
3. $A = \{1, 3, 6, 12, 24, 48\}$.
4. $A = \{24, 2, 6\}$
5. $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
6. $A = \{24\}$
7. $A = \{3, 5, 15\}$
8. $A = \{2, 8, 32, 4\}$
9. $A = \{15, 5, 30\}$

2. لتكن لدينا المجموعة التالية: $S=\{1,2,3\}$ ولتكن $P(S)$ مجموعة المجموعات الجزئية ل S ولنعرف على $P(S)$ العلاقة $\leq$ بالشكل التالي:

$\forall A, B, C \in P(S) : A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$

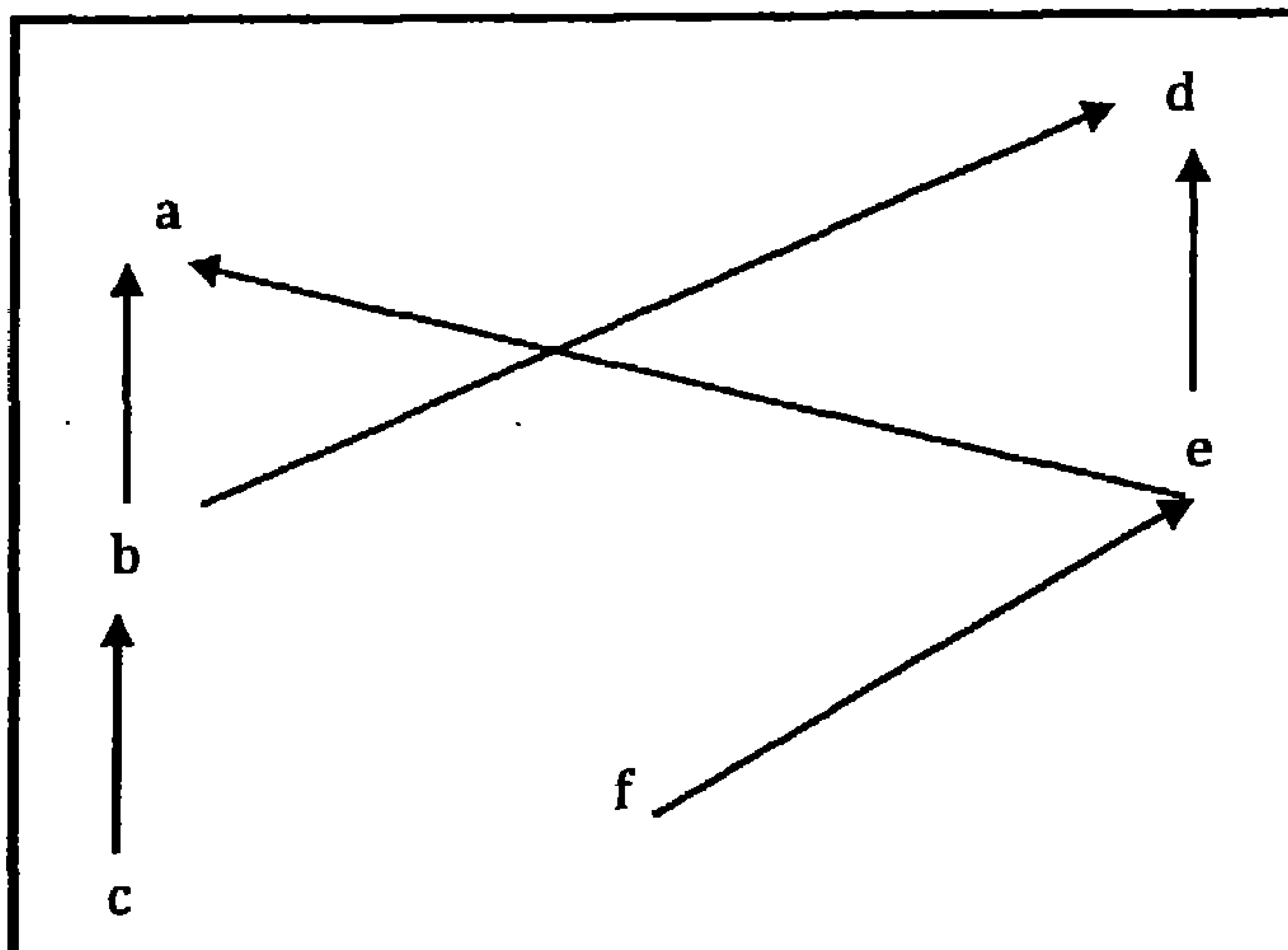
- إثبت أن المجموعة $(S, \leq)$ مرتبة جزئياً.
- إرسم مخطط هاس والبيان الموجّه للمجموعة(S,R).

3. إرسم مخطط هاس للمجموعة A تحت علاقة الترتيب x تقسم y حيث:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20\}$

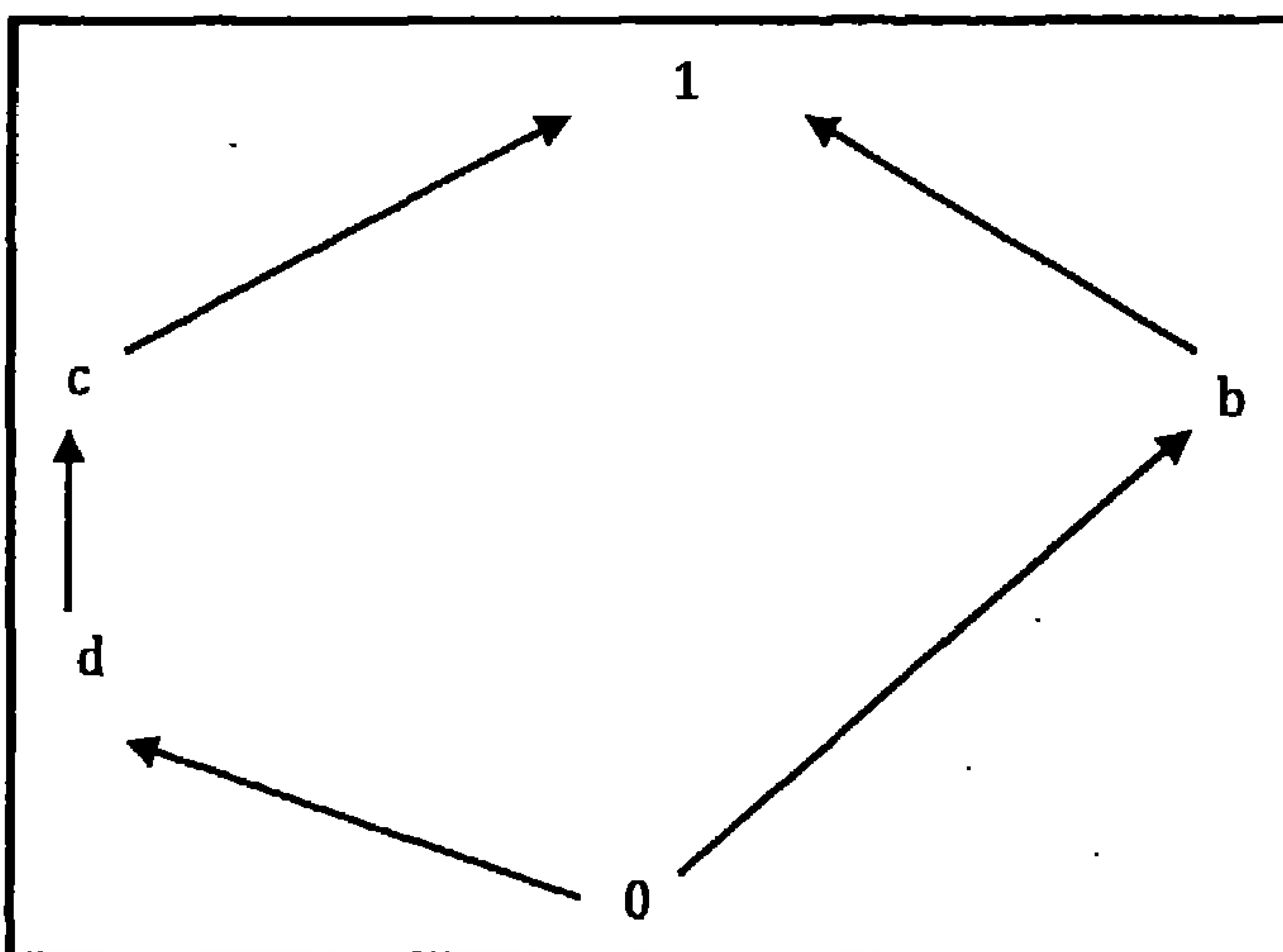
4. إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 4
5. إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 6
6. إرسم مخطط هاس لعلاقة الترتيب والتي هي عبارة عن تجزئة العدد 7

7. في المجموعة المرتبة $(A,\subseteq)$ حيث $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ والمخطط السهمي هو:



فإذا كانت $B=\{b,c,e,f\}$ فحدد Max B, Min B, Sup B, Inf B

8. ليكن $(A,\leq)$ الشبكة الموضحة بالمخطط السهمي التالي:



- أعطي النظام الجبري $(A,\vee,\wedge)$ التابع للشبكة $(A,\leq)$
- هل هذه الشبكة توزيعية؟ علل إجابتك؟

9. في النظام الجبر البولياني $(A,\vee,\wedge)$ إختصر ما يلي:

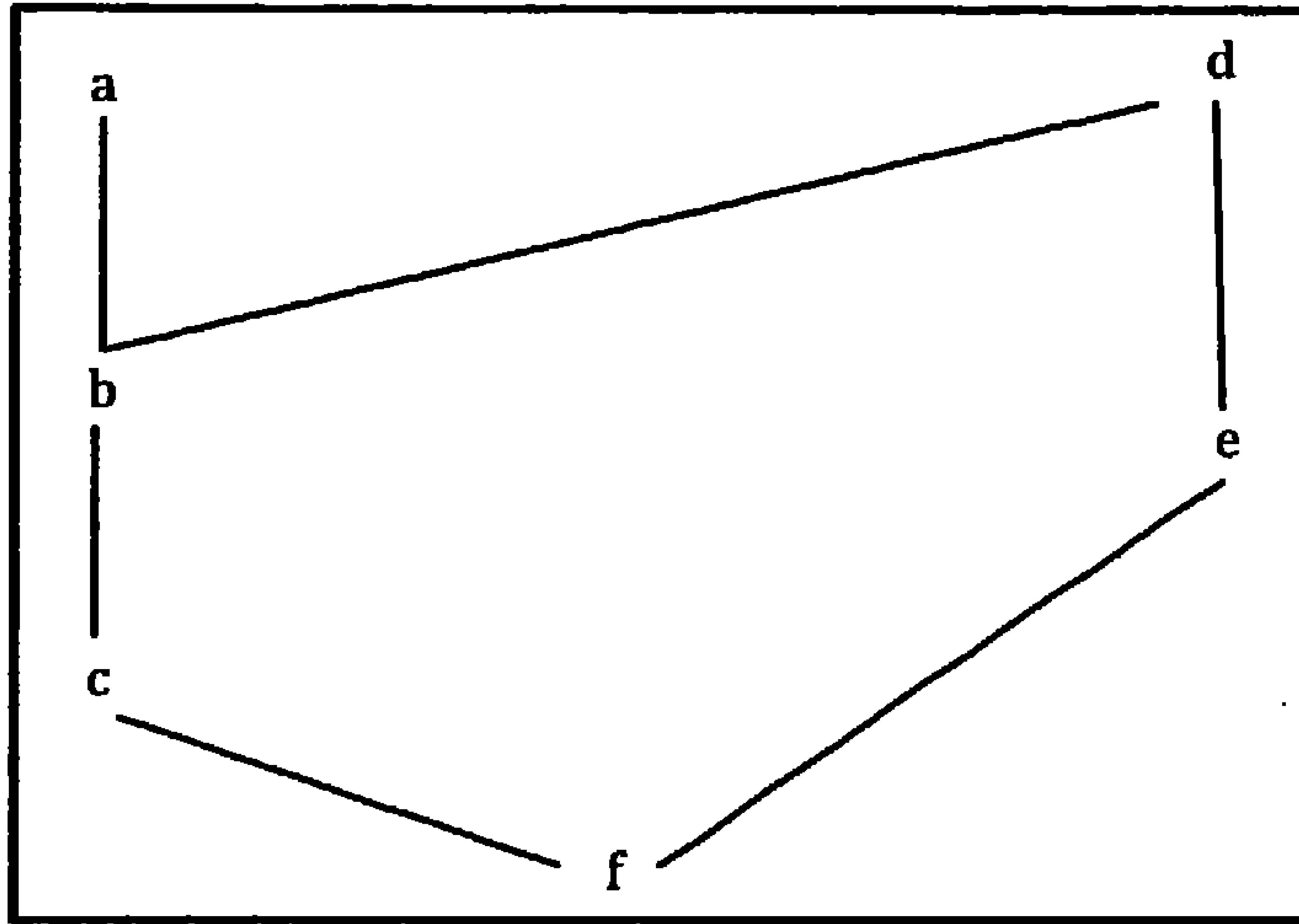
- $a \vee (a' \wedge b)$
- $a \wedge (a' \vee b)$

- $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$
- $(a \wedge b) \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (b \wedge c)$

10. إذا كانت $A = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ المجموعة المرتبة $(A,/)$ حيث / هي عملية ترتيب القسمة:

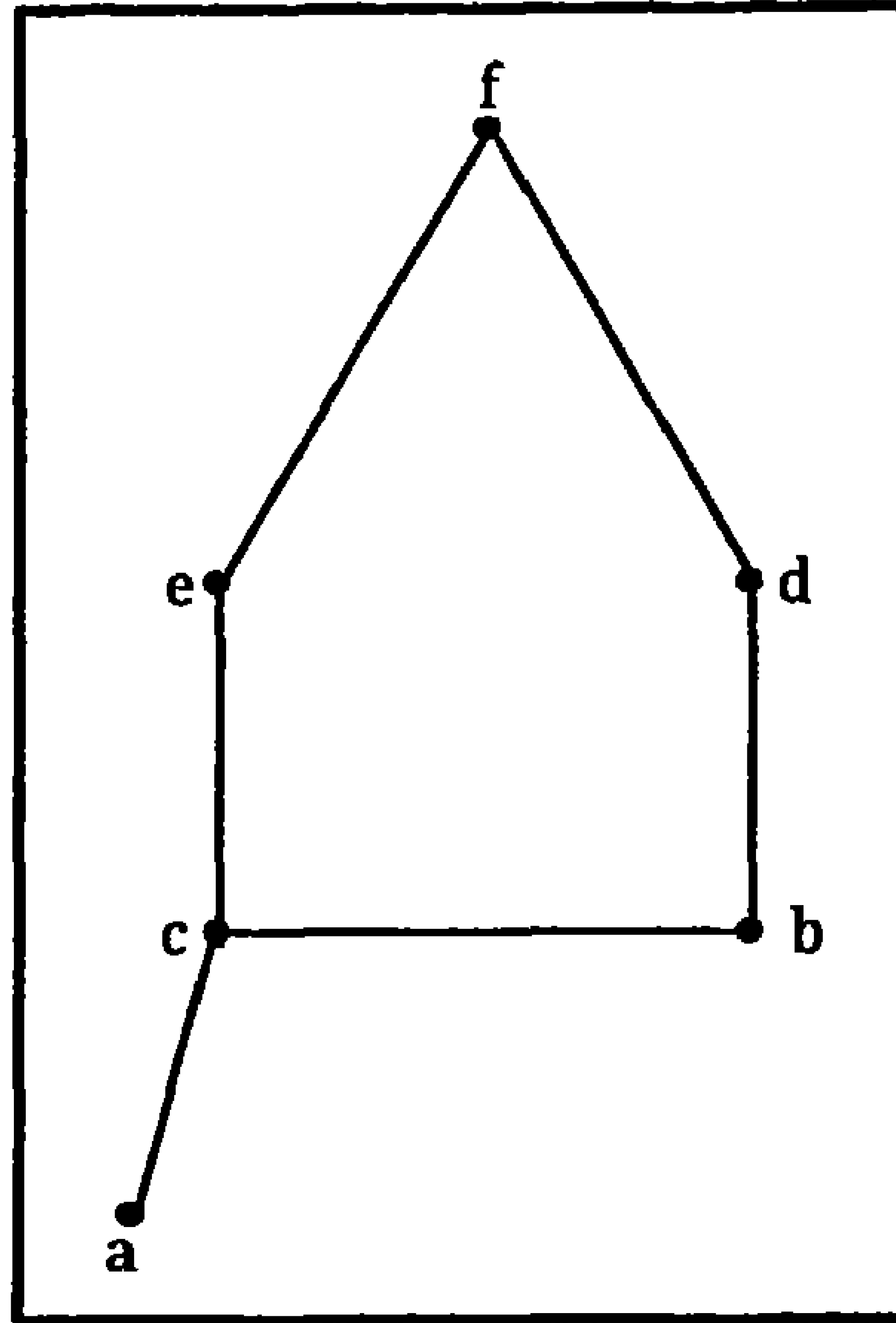
- إرسم المخطط السهمي التابع لها.
- إكتب النظام الجبري $(A,\wedge,\vee)$ التابع لهذه الشبكة.
- إحسب متمم العناصر 1, 2, 4, 6, 18, 36.
- هل هذه الشبكة توزيعية؟ علل إجابتك؟

11. في المجموعة المرتبة $(A,\subseteq)$ حيث $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ ومخطط هاس لها هو:



فإذا كانت $B=\{b,c,e,f\}$ فحدد Max B, Min B, Sup B, Inf B

12. في المجموعة المرتبة $(A,\subseteq)$ حيث $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ ومخطط هاس لها هو:



فحدد Max A, Min A, Sup A, Inf A

13. لتكن $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ بحيث:

- $a + b = l.c.m(a, b)$
- $ab = g.c.m(a, b)$
- $a' = \frac{30}{a}$

فإثبت أن $(A, +, ., \ ', 1, 30)$ تمثل نظام جبر بولياني.

14. لتكن $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ بحيث:

- $a + b = l.c.m(a, b)$
- $ab = g.c.m(a, b)$
- $a' = \frac{32}{a}$

فإثبت أن $(A, +, ., \ ', 1, 32)$ لا تمثل نظام جبر بولياني.

15. إكتب الدالة $f(x, y, z)$ على هئية مجموع ضرب تام CSP ثـم إثبـت جبريـا أن الـدالتان متساويتان:

- $f(x, y, z) = xy + (x + y)'z$

- $f(x,y,z) = xy(x' + z)'$
- $f(x,y,z) = (x + y + z)(xyz)$
- $f(x,y,z) = (x + y)'(x + z)$
- $f(x,y,z) = yz + xz$

16. إرسم الدئرة المنطقية ثم بإستخدام الجبرالبولياني بسط الدائرة :

- $F(x,y,z) = x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz + xy\bar{z}$
- $f(x,y) = xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
- $f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$
- $f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$
- $f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
- $f(x,y,z,w) = xyzw + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw$
- $f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}z\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = xyz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w$

17. إكتب الدالة $f(x,y,z,w) = x\bar{z} + \bar{y}w$ على هئيّة مجموع ضرب تـام CSP ثـم إثبـت جبريا أن الدالتان متساويتان.

18. إكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT			OUTPUT
x	y	z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

INPUT			OUTPUT
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

19. إكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم إرسم الدائرة المنطقية لهذه الدالة.

INPUT				OUTPUT
x	y	z	w	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

20. بإستخدام خرائط كارنوف صمم دائرة منطقية لجدول الحقيقة التالي:

.1

INPUT			OUTPUT
X	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

INPUT			OUTPUT
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

.2

INPUT				OUTPUT
x	y	z	W	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	0	0

21. بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

- $f(x,y) = xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$
- $f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$
- $f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$
- $f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
- $f(x,y,z,w) = xyzw + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw$
- $f(x,y,z,w) = xy\bar{z}w + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$

- $f(x,y,z,w) = x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}z\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w} + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = xyz\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w + xy\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xyz\bar{w} + x\bar{y}z\bar{w}$
- $f(x,y,z,w) = \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w + x\bar{y}\bar{z}w$
- $f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}yz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + x\bar{y}zw$
- $f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$
- $f(x,y,z,w) = xyzw + xwz\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + xy\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$

22. اكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

INPUT			OUTPUT
x	y	z	
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

23. اكتب جدول الصواب التالي على هئية مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

INPUT				OUTPUT
x	y	z	w	F
1	1	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

INPUT				OUTPUT
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

24. إكتب جدول الصواب التالي على هيئة مجموع ضرب تام CSP ثم بإستخدام خريطة كارنوف بسط الدالة البوليانية:

INPUT				OUTPUT
x	y	z	w	F
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

الفصل السابع

طرق العد
Counting Methods

(7-1) مبادئ العد

(7-2) التباديل

(7-3) التوافيق

(7-4) نظرية ذات الحدين

(7-5) مبدأ برج الحمام

تمارين

الفصل السابع

طرق العد

(7-1) مبادئ العد

في العادة نستخدم طرق العد لإيجاد عدد مجموعة ما دون الحاجة إلى سرد عناصر هذه المجموعة كما أن طرق العد تساعدنا في إيجاد عدد الطرق المختلفة والممكنة لإجراء عملية ما وبالتالي في هذا الجزء سوف نقدم قاعدتين أساسيتين للعد هما قاعدة الضرب و قاعدة الجمع وسوف نوضح كيف يمكن إستخدام هاتين القاعدتين في حل المسائل المختلفة.

(7-1-1) قاعدة الضرب The Product Rule

إذا كان هناك عملية (أو تجربة) مكونه من عدد k من العمليات الجزئية بحيث:

العملية الأولى يمكن أن تحدث بعدد يساوي n_1 طريقة مختلفة

والعملية الثانية يمكن أن تحدث بعدد n_2 طريقة مختلفة

والعملية الثالثة يمكن أن تحدث بعدد n_3 طريقة مختلفة

وهكذا حتى العملية الأخيرة k يمكن أن تحدث بعدد n_k طريقة مختلفة

فإن عدد الطرق التي يمكن إجراء هذه العمليات معا هو حاصل الضرب:

$$n = n_1 . n_2 . n_3 \dots n_k$$

ملاحظة: يمكن كتابة قاعدة الضرب بإستخدام المجموعات كما يلي:

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_m$ مجموعات منتهية فإن عدد عناصر الضرب الكرتيزي لهذه المجموعات هو حاصل ضرب عدد عناصر كل مجموعة بمعنى أن:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m| = |A_1| . |A_2| \dots |A_m|$$

مثال: مطعم يقدم 4 أصناف من اللحم و 3 أصناف من السلطة و 5 أصناف من الحلوى فكم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن أن تقدم في هذا المطعم بحيث تحتوي الوجبة على لحم وسلطة وحلوى.

الحل:

عدد طرق إختيار صنف لحم = 4

عدد طرق إختيار صنف سلطة = 3

عدد طرق إختيار صنف حلوى = 5

إذن عدد الوجبات المختلفة التي يمكن أن تقدم = $4\times3\times5$ = 60 وجبة

مثال: أضاع شخص مسافر الرقم السري لفتح حقيبته والمؤلف من ثلاث أرقام فما هو عدد المحاولات الممكنة لفتح الحقيبة مع العلم أن كل رقم من الأرقام الثلاثة هو بين 0,1, ... ,10

الحل:

عدد طرق إختيار الرقم الأول = 10

عدد طرق إختيار الرقم الثاني = 10

عدد طرق إختيار الرقم الثالث = 10

إذن عدد المحاولات الممكنة لفتح الحقيبة = $10\times10\times10$ =10 1000 محاولة

مثال: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاث مقررات الأول في اللغات والثاني في الرياضيات والثالث في الحاسوب علماً بأنه يوجد 3 مقررات مختلفة في اللغات و 4 في الرياضيات و 2 في الحاسوب.

الحل:

أولاً : عدد طرق إختيار مقرر اللغات = 3

ثانياً : عدد طرق إختيار مقرر الرياضيات = 4

ثالثاً : عدد طرق إختيار مقرر الحاسوب = 2

وبالتالي عدد طرق إختيار ثلاث مقررات الأول في اللغات والثاني في الرياضيات والثالث في الحاسوب = (3)(4)(2) = 24

مثال: بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين من بين الأرقام 3,4,5 بحيث:

1. يسمح بتكرار العدد
2. لا يسمح بتكرار العدد

الحل:

أولاً: في حالة السماح بتكرار العدد:

نعلم أن العدد الذي يتكون من عددين به منزلتين الأحاد والعشرات وبالتالي

عدد طرق إختيار المنزلة الأولى (الأحاد) = 3

عدد طرق إختيار المنزلة الثانية (العشرات) = 3

إذن عدد طرق إختيار العدد = 3x3= 9

ثانياً: في حالة عدم السماح بتكرار العدد:

عدد طرق إختيار المنزلة الأولى (الأحاد) = 3

عدد طرق إختيار المنزلة الثانية (العشرات) = 2

إذن عدد طرق إختيار العدد = 2x3= 6

(7-1-2) قاعدة الجمع The Sum Rule

إذا كان هناك عملية (أو تجربة) مكونه من عدد k من العمليات الجزئية المتنافية بحيث:

العملية الأولى يمكن أن تحدث بعدد يساوي n_1 طريقة مختلفة.

والعملية الثانية يمكن أن تحدث بعدد n_2 طريقة مختلفة.

والعملية الثالثة يمكن أن تحدث بعدد n_3 طريقة مختلفة.

وهكذا حتى العملية الأخيرة k يمكن أن تحدث بعدد n_k طريقة مختلفة.

فإن عدد الطرق التي يمكن إجراء عملية واحدة فقط من هذه العمليات المتنافية يساوي:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_k$$

ملاحظات:

1. في قاعدة الجمع تكون العمليات متنافية أي أن إجراء إحدى العمليات ينفي (أو يمنع) إجراء العمليات الأخرى.
2. يمكن كتابة قاعدة الجمع بإستخدام المجموعات كما يلي:

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_m$ مجموعات منتهية بحيث $A_i \cap A_j = \varphi$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$$

نظرية (7-1-3) : إذا كانت A, B مجموعتان منتهيتان فإن:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

البرهان:

بما أن $A \cup B = A \cup (B - A)$ و $A \cap (B - A) = \varphi$

فإن $|A \cup B| = |A| + |B - A|$ .... (1)

وبما أن $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ و $(A \cap B) \cap (B - A) = \varphi$

فإن $|B| = |A \cap B| + |B - A|$ .... (2)

من (1) و (2) نحصل على:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

نتيجة (7.1.4) : إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات منتهية فإن:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

البرهان:

من النظرية السابقة (7.1.3) فإن:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$
$$= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$
$$= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|)$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

مثال: كان لدينا في أحد الكليات 53 طالب بحيث يكون 33 طالب يدرسون مادة الحاسوب و 19 طالب يدرسون رياضيات و 27 طالب يدرسون إنجليزي بينما 10 طلاب يدرسون حاسوب ورياضيات بينما 9 طلاب يدرسون رياضيات وإنجليزي بينما 17 طالب يدرسون حاسوب وإنجليزي بينما 40 طالب يدرس كلا منهم على الأقل أحد المواد الثلاث الحاسوب أو الرياضيات أو الإنجليزي فاحسب:

1. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والرياضيات والإنجليزي

2. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والرياضيات فقط؟
3. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والإنجليزي فقط؟
4. عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب فقط؟

الحل:

أولاً: عدد الطلاب الذين يدرسون حاسوب و رياضيات و إنجليزي:

$$|C \cup M \cup E| = |C| + |M| + |E| - |C \cap M| - |C \cap E| - |M \cap E| + |C \cap M \cap E|$$

إذن:

$$50 = 33 + 19 + 27 - 10 - 9 - 17 + |C \cap M \cap E|$$

إذن:

$$|C \cap M \cap E| = 3$$

ثانياً: عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والرياضيات فقط:

10-3=7

ثالثاً: عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب والإنجليزي فقط:

17-3=14

رابعاً: عدد الطلاب الذين يدرسون الحاسوب فقط:

33-(3+7+14)=9

مثال: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقرر واحد فقط من اللغات أو الرياضيات أو الحاسوب علما بأنه يوجد 3 مقررات مختلفة في اللغات و 4 في الرياضيات و 2 في الحاسوب.

الحل:

أولاً: عدد طرق إختيار مقرر اللغات = 3

ثانياً: عدد طرق إختيار مقرر الرياضيات = 4

ثالثاً: عدد طرق إختيار مقرر الحاسوب = 2

وبالتالي عدد طرق إختيار مقرر واحد فقط من اللغات أو الرياضيات أو الحاسوب =3+4+2= 9

(7-2) التباديل (Permutation)

إن تبديل عدد من الأشياء يعني تنظيم هذه الاشياء في ترتيب محدد وبالتالي فالتبديلية هي ترتيبه لعدة أشياء نأخذها كلها أو بعض منها مع مراعاة الترتيب فعدد التباديل لمجموعة مكونة من n عنصر مأخوذ منها عدد r يساوي عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن تكوينها من n عنصر بحيث تحوي كل ترتيبه على r عنصر مع مراعاة الترتيب.

مثال: إذا كان لدينا الأرقام 3, 2, 1 فإنه يمكن تنظيم هذه الأعداد على هيئة:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)

أي أن هناك 6 تباديل للأرقام 1 ,2 ,3 وهذا العدد من التباديل يمكن الحصول عليه من قاعدة الضرب (7-1-1) كما يلي:

المكان الأول يمكن شغلة بعدد 3 طرق.

المكان الثاني يمكن شغلة بعدد 2 طريقة.

المكان الثالث يمكن شغلة بعدد 1 طريقة.

إذن عدد التباديل = $3\times2\times1= 6$

تعريف (7.2.1): عدد تباديل n عنصر مأخوذه كلها معاً هو n! ويسمى مضروب n حيث أن:

$$n! = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n$$

والرمز ! يسمى مضروب factorial

ملاحظات:

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2.1$

$3! = 3.2.1 = 3.2!$

$n! = n\,(n-1)!$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب عشرة اشخاص

الحل:

عدد طرق الترتيب = $10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب الأحرف الثلاثة a, b, c

الحل:

عدد طرق الترتيب = $3! = 1.2.3 = 6$

وهي:

(a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, a, b), (c, b, a)

مثال: ما هو عدد الأعداد الممكن تشكيلها من الأرقام 1, 2, 3, 4 دون تكرار ثم اكتب هذه الأرقام

الحل:

عدد الأعداد التي من الممكن تشكيلها = $4! = 1.2.3.4 = 24$

وهي:

(1, 4, 3, 2), (1,4 ,2, 3), (1, 3, 4, 2), (1,3 ,2, 4), (1,2, 4, 3), (1, 2, 3, 4)

(2,4 ,3, 1), (2, 4,1, 3), (2,3, 4, 1), (2,3,1, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4)

(3,4 ,2 ,1), (3,4 ,1 ,2), (3,2 ,4 ,1), (3,2 ,1 4,), (3,1 ,4,2), (3,1 ,2 ,4)

(4,3 ,2 ,1), (4,3 ,1 ,2), (4, 2,3 ,1), (4,2 ,1 ,3), (4,1 ,3,2), (4,1 ,2 ,3)

ملاحظة:

عندما يسمح بتكرار العناصر دون أي قيود على عدد التكرارات فإنه يمكن أن نختار العنصر الأول ب n طريقة.

ونختار العنصر الثاني ب n طريقة.

ونختار العنصر الثالث ب n طريقة.

وبالتالي يكون عدد الاختيارات (التباديل) هو:

$$n^n = n.n.n\ldots.n$$

مثال: ما هو عدد الأعداد التي من الممكن تشكيلها من الأرقام 1, 2, 3 مع التكرار ثم إكتب هذه الأرقام

الحل:

عدد الأعداد التي من الممكن تشكيلها = $3^3 = 27$

وهي:

(1, 1,1), (1,1 ,2), (1, 1, 3), (1,2 ,3), (1,3,2), (1,2 ,2), (1,3 ,3), (1,2 ,1), (1,3 ,1)

(2,2 ,2), (2, 2,1), (2,2 , 3), (2,1 ,3), (2,3,1), (2,1 ,1), (2,3 ,3), (2,1 ,2), (2,3 , 2)

(3, 3,3), (3,3 ,1), (3, 1,3), (3,1 ,2), (3,2,1), (3,2 ,3), (3,3 ,2), (3,1 ,1), (3,2 ,2)

تعريف (7.2.1): إذا أردنا ترتيب r عنصر مأخوذه كلها معا من بين n عنصر بحيث $r \le n$ فإن عدد تباديل r عنصر من بين n عنصر مأخوذه كلها معا مع الأخذ في الاعتبار الترتيب هو:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب ثلاث كتب على رف مأخوذة من بين 7 كتب مختلفة.

الحل:

عدد طرق الترتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 7, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^7 = \frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1} = 7.6.5 = 210$$

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لوضع ستة أشخاص في أربع غرف متجاورة.

الحل:

عدد التراتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 6, r = 4$ نحصل على:

$$P_4^6 = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2.1} = 6.5.4.3 = 360$$

مثال: بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 5 مقاعد في صف واحد.

الحل:

عدد التراتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 5$ نحصل على:

$$P_5^5 = \frac{5!}{0!} = \frac{5.4.3.2.1}{1} = 120$$

مثال: بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 3 مقاعد في صف واحد.

الحل:

عدد التراتيب = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^5 = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 60$$

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لأخذ عنصرين من المجموعة a, b, c, d دون تكرار ثم اكتب هذه الإمكانيات.

الحل:

عدد التراتيب بدون تكرار = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

وهي:

$(a, b), (b, a), (c, a), (d, a)$

$(a, c), (b, c), (c, b), (d, b)$

$(a, d), (b, d), (c, d), (d, c)$

ملاحظة: السحب مع الإرجاع : إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n عنصر مختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بإرجاع (أي أن العنصر المسحوب يعاد مرة ثانية قبل سحب العنصر التالي) فإنه يمكن أن نختار العنصر الأول ب n طريقة و نختار العنصر الثاني ب n طريقة و نختار العنصر الثالث ب n طريقة وهكذا ....

فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب تساوي:

$$B_r^n = \underbrace{n.n \dots n}_{r-times} = n^r$$

مثال: بكم طريقة يمكن سحب كرتين من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة.

أولاً: بإرجاع.

ثانياً : بدون إرجاع.

الحل:

أولاً: السحب بإرجاع: n=15 و r=2 وبالتالي عدد طرق سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$$B_r^n = \underbrace{n.n \dots n}_{r-times} = n^r = 15^2 = 225$$

ثانياً: السحب بدون إرجاع: n=15 و r=2 وبالتالي عدد طرق سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{15!}{13!} = (15)(14) = 210$$

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لأخذ عنصرين من المجموعة a, b, c, d مع التكرار ثم اكتب هذه الامكانيات.

الحل:

عدد التراتيب مع التكرار = $B_r^n = \underbrace{n.n \dots n}_{r-times} = n^r$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$B_2^4 = 4^2 = 16$$

وهي:

(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)

(a, b), (b, a), (c, a), (d, a)

(a, c), (b, c), (c, b), (d, b)

(a, d), (b, d), (c, d), (d, c)

مثال: ما هو عدد التراتيب الممكنة لأخذ 3 عناصر من المجموعة $0, 1, 2, \ldots, 9$

1. دون تكرار.
2. مع التكرار.

الحل:

أولاً: عدد الترتيب بدون تكرار = $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = 10.9.8 = 720$$

ثانياً: عدد التراتيب مع التكرار = $B_r^n = \underbrace{n.n\ldots n}_{r-times} = n^r$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 3$ نحصل على:

$$B_3^{10} = 10^3 = 1000$$

(7-3) التوافيق (Combination)

إن قاعدة حساب عدد التباديل تمكننا من إيجاد عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب العناصر في صف مرتب أي حسب إختيارها أو ظهورها ولكن في بعض الأحيان قد تتطلب المسألة إختيار العناصر دون الأخذ في الإعتبار ترتيب الإختيار (الظهور) وذلك لأن تغيير الترتيب في هذه الحالات لا ينتج عنه ظهور عنصر جديد.

فمثلا إختيار لجنه مكونه من شخصين من بين ثلاثة أشخاص فإن عدد التباديل (عدد الاختيارات) هو $P_2^3 = \frac{3!}{1!} = \frac{3.2.1}{1} = 6$

فإذا رمزنا للعضو الأول بالرمز a ورمزنا للعضو الثاني بالرمز b ورمزنا للعضو الثالث بالرمز c فإن 6 تباديل السابقة هي:

$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$

ولكن اللجنة التي تحوي العضو الأول والثاني هي $(a, b) = (b, a)$

و اللجنة التي تحوي العضو الأول والثالث هي $(a, c) = (c, a)$

و اللجنة التي تحوي العضو الثالث والثاني هي $(c, b) = (b, c)$

إذن الحل الصحيح لعدد الإختيارات هو 3 وليس 6 وهذه الإختيارات تسمى توافيق.

تعريف (7.3.1): التوافيق هي إختيار العناصر بدون الأخذ في الإعتبار الترتيب الـذي تختار به وبالتالي يكون عدد الطرق التي يمكن بها إختيار r عنصر من بين n عنصر بدون الأخذ في الإعتبار الترتيب هي عـدد التوافيـق ل n مـن العناصـر مـأخوذه r عنصر منها ويرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ أو C_r^n وتساوي

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

مثال: ما هو عدد الطرق التي يمكن بها إختيار بعثة مكونة من 3 رجال وإمـرتين مـن بـين 6 رجال و5 نساء.

الحل:

عدد طرق إختيار الرجال في البعثة هو: $20 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \binom{6}{3}$

عدد طرق إختيار النساء في البعثة هو $10 = \frac{6!}{2!\,3!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \binom{5}{2}$

إذن عدد طرق إختيار البعثة هو $20\times 10= 200$ طريقة.

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لوضع ستة أشخاص في أربع غرف متجاورة.

الحل:

عدد الطرق $= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$

وبالتعويض عن $n = 6, r = 4$ نحصل على:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\ 2!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{(4.3.2.1)(2.1)} = 15$$

ملاحظة: إن عدد التوافيق ل n عنصر والتي يمكـن أن تأخـذ منهـا r عنصـر مـع إمكانيـة التكرار هي:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\ (n-1)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن إختيار لجنه من عنصرين من بين المجموعة $\{a, b, c, d\}$ بحيث يكون

1. دون تكرار.
2. مع التكرار.

الحل:

أولاً: عدد التوافيق بدون تكرار = $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\;2!} = \frac{4.3.2.1}{(2.1)(2.1)} = 6$$

وهي:

(a, b), (a, c), (a, d)

(b, c), (b, d), (c, d)

ثانياً: عدد التوافيق مع التكرار = $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

وبالتعويض عن $n = 4, r = 2$ نحصل على:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\;3!} = \frac{5.4.3.2.1}{(2.1)(3.2.1)} = 10$$

وهي:

(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)

(a, b), (a, c), (a, d)

(b, c), (b, d), (c, d)

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنه مؤلفه من ثلاث طلاب من بين 30 طالب.

الحل:

بما أن الترتيب لا يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التوافيق:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\;(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 30, r = 3$ نحصل على:

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{3!\;27!} = 4060$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنه مؤلفه من رئيس ونائب للرئيس وأمـين السـر من بين 30 طالب.

الحل:

بما أن الترتيب سوف يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التباديل:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 30, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^{30} = \frac{30!}{27!} = 24360$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار 5 طلاب من بين 10 طالب.

الحل:

بما أن الترتيب لا يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التوافيق:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 5$ نحصل على:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

مثال: بكم طريقة يمكن إختيار 5 طلاب من بين 10 لترتيبهم على خمس مقاعد دراسية.

الحل:

بما أن الترتيب سوف يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التباديل:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 10, r = 5$ نحصل على:

$$P_5^{10} = \frac{10!}{5!} = 30240$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار 3 أرقام من المجموعة $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ دون تكرار.

الحل:

بما أن الترتيب لا يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التوافيق:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 3$ نحصل على:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

مثال: ما هو عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات (أرقام) الممكن تكوينها من المجموعة $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ بدون تكرار .

الحل:

بما أن الترتيب سوف يؤثر على الإختيار فإن عدد الطرق هو عدد التباديل:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبالتعويض عن $n = 5, r = 3$ نحصل على:

$$P_3^5 = \frac{5!}{2!} = 20$$

ملاحظة: التباديل داخل أشياء متشابهة أو متساوية:

إذا كان لدينا n عنصر مكونة من r مجموعة بحيث تكون المجموعة الأولى تحتوي على n_1 عنصر متشابهة و المجموعة الثانية تحتوي على n_2 عنصر متشابهة وهكذا حتى المجموعة رقم r تحتوي على n_r عنصر متشابهة وبحيث يكون:

$$n_1 + n_2 + .. + n_r = n$$

فإن عدد التبديل المختلفة يساوي:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$$

كما يمكن النظر إلى العدد $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$ على إنه يساوي عدد طرق تقسيم مجموعة مكونه من n عنصر مختلف على r مجموعة بحيث تكون المجموعة الأولى تحتوي على n_1 عنصر متشابهة و المجموعة الثانية تحتوي على n_2 عنصر متشابهة وهكذا حتى المجموعة رقم r تحتوي على n_r عنصر متشابهة وبحيث يكون:

$$n_1 + n_2 + .. + n_r = n$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة PROBABILITY؟

الحل:

لدينا الحروف التالية: P-R-O-B-B-A-I-I-L-T-Y

إذن عدد طرق ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY يساوي:

$$\binom{11}{1,1,1,2,1,2,1,1,1} = \frac{11!}{2!\ 2!} = 9979200$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة STATISTICS؟

الحل:

لدينا الحروف التالية: S-S-S-T-T-T-A-I-I-C

إذن عدد طرق ترتيب أحرف كلمة STATISTICS يساوي:

$$\binom{10}{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!\ 3!\ 2!} = 50400$$

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع 8 طلاب بحيث يكون 4 طلاب رياضيات و 3 طلاب فيزياء وطالب واحد حاسوب.

الحل:

عدد الطرق لتوزيع الطلاب بحيث يكون 4 طلاب رياضيات و 3 طلاب فيزياء وطالب واحد حاسوب يساوي

$$\binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4!\ 3!\ 1!} = 280$$

(7-4) نظرية ذات الحدين (Binomial theorem)

في هذا الجزء سوف ندرس نظرية ذات الحدين وبعض تطبيقاتها المهمة:

نظرية ذات الحدين (7-4-1): إذا كانت x, y متغيرين وكان $n \geq 1$ عددا صحيحا فإن:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

البرهان:

بإستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي:

نفرض أن p(n) هي العبارة:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

أولاً: p(1) صحيحة لأن:

$$L.H.S.=x+y$$

$$R.H.S.=\binom{1}{0}x^1y^0+\binom{1}{1}x^0y^1=x+y$$

ثانياً: نفرض صحة العبارة p(n) صحيحة ونحاول إثبات ذلك من أجل n + 1 ولعمل ذلك نأخذ:

$$p(n+1)=(x+y)^{n+1}=(x+y)^n(x+y)=(x+y)^nx+(x+y)^ny$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}$$

ولكن:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k$$

وأيضاً:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}+y^{n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k+y^{n+1}$$

إذن:

$$p(n+1)=(x+y)^{n+1}$$

$$=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k+y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right\} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

ولكن:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

إذن:

$$p(n+1) = (x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}$$

إذن العبارة صحيحة في حالة $n+1$

مثال:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

مثال:

$$(1-x)^5 = 1 - \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 - \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 - x^5$$
$$= 1 - \frac{5!}{1!.4!}x + \frac{5!}{2!.3!}x^2 - \frac{5!}{3!.2!}x^3 + \frac{5!}{4!.1!}x^4 - x^5$$
$$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$$

مبرهنه (7.4.2) : إن مجموع معاملات مفكوك ذات الحدين يساوي 2^n

البرهان:

$$2^2 = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

مبرهنه (7.4.3) :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

البرهان:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

مبرهنه (7.4.4) :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

البرهان:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,n!} = \binom{n}{k}$$

مبرهنه (7.4.5) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

البرهان:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\ (n-k)(n-k-1)!} + \frac{k(n-1)!}{k\,(k-1)!\ (n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)\ (n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-k)\ (n-1)! + k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{[\,(n-k) + k\,](n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

مبرهنه (7.4.6) :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}$$

حيث $0 < k \leq n$

البرهان:

من المبرهنة السابقة نجد أن:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$$
$$=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k+1}$$

بالاستمرار بهذا الأسلوب فإن:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}$$

ولكن:

$$\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}=1$$

إذن:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}$$

ملاحظة:

العلاقة $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ تمكنا من معرفة معاملات ذات الحدين المرفـوع إلى القوى n وذلك إذا علمت معاملات مفكوك ذات الحدين المرفوع إلى القـوى $n-1$ ويـتم ذلك من خلال جدول يسمى مثلث بسكال حيث نضع في كل سطر معاملات المفكـوك إلى قوى معينه و نستنتج مفكوك ذات الحدين للقوى التالية وذلك كما يظهر في الجدول التـالي حيث نحصل على كل معامل عن طريق جمع المعاملين السابقين في السطر السابق الذي فوقـه مع المعامل الواقع على يساره كما يلي:

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$
0	1							
1	1 →	1 ↓						
2	1	2	1					
3	1	3 →	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15→	20 ↓	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

مثال: بإستخدام ذات الحدين احسب قيمة 1.05^4 .

الحل:

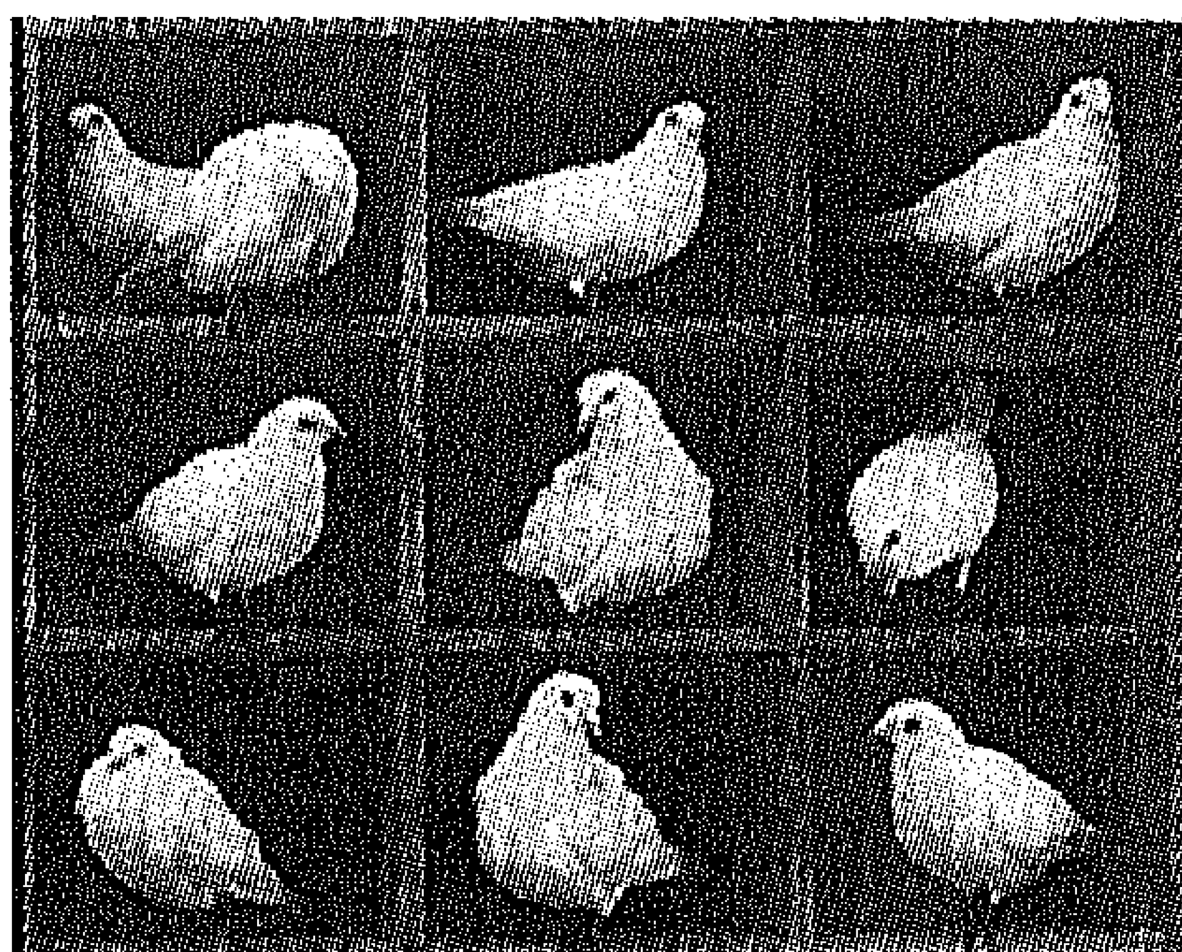
$$1.05^4 = (1+0.05)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}1^k 0.05^{4-k}$$

$$= 1 + (4)(0.05) + (6)(0.05)^2 + (4)(0.05)^3 + (0.05)^4$$

$$= 1 + 0.2 + 0.015 + 0.0005 + 0.00000625 = 1.211550625$$

(7-5) مبدأ برج الحمام Pigeonhole Principle

إذا كان لدينا 10 حمامات ونريد وضعهم في برج حمام يتكون من 9 عيون فقط فمن الواضح أن عدد الحمام أكبر من عدد الأماكن المخصصة لوضع الحمام وبالتالي فمن المؤكد أن هناك عين واحدة على الأقل من عيون البرج سوف تحتوي على أكثر من حمامة وهذا المثال يشرح ببساطة مبدأ برج الحمام والذي سوف ندرسه بشكل عام في هذا الجزء مع بعض تطبيقاته.



نظرية (7.5.1) مبدأ برج الحمام

إذا وضعنا عدد m حمامة في برج حمام يتكون من n عين وكان $n<m$ فإنه يوجد عين واحدة على الأقل من عيون البرج تحتوي على أكثر من حمامة واحدة.

البرهان:

نفرض جدلاً أن كل عين في برج الحمام تحتوي على حمامة على الأكثر وبالتالي يجب أن يكون عدد الحمام على الأكثر هو n وهذا يناقض كون عدد الحمام m هو أكبر تماما من n.

ملاحظات:

1. مبدأ برج الحمام يسمى أيضاً مبدأ ديرشلت Dirichlet principle نسبة إلى العالم الألماني G. Lejeune Dirichlet
2. بعض الرياضيون يعرفون مبدأ برج الحمام كما يلي "إذا كان لدينا n+1 شيء ونريد وضعها في n موضع فإن أحد المواضع يحتوي على الأقل على شيئين أو أكثر من الأشياء.

مبرهنة (7.5.2)

إذا كانت الدالة f من مجموعة X إلى مجموعة Y وكانت $|Y| < |X|$ فإن الدالة f ليست دالة أحادية.

البرهان:

نفرض أن:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \quad y = f(x), \quad m > n$$

بما أن $m > n$ فمن مبدأ برج الحمام يوجد أكثر من متغير x يكون لهم نفس المتغير التابع y ومعنى ذلك أن:

$$f(x_i) = f(x_j) = y, \qquad x_i \neq x_j$$

إذن الدالة f ليست دالة أحادية.

مثال: إذا كان لدينا 367 شخص وبما أن السنه تحتوي على 365 أو 366 يوم وبتطبيق مبدأ برج الحمام فإننا نجد أنه يوجد أكثر من شخص واحد على الأقل من بين 367 سوف يكون لهم نفس تاريخ الميلاد.

مثال: إذا كتبنا 27 كلمة إنجليزي وبما أن عدد حروف الهجاء الإنجليزي هي 26 حرف فبتطبيق مبدأ برج الحمام فإننا نجد أنه يوجد كلمتين على الأقل من بين 27 يكونا مشتركين في نفس حرف البداية.

مثال: إذا كان لدينا 101 طالب دخلو امتحان من 100 درجة فبتطبيق مبدأ برج الحمام فمن المؤكد وجود أكثر من طالب يكونا مشتركين في نفس المحصلة من الامتحان.

مثال: إذا كان لدينا صندوق فيه جوارب بلونين فبتطبيق مبدأ برج الحمام فإنه يكفي سحب 3 جوارب حتى نحصل على زوج من الجوارب بنفس اللون.

مثال: إذا كان لدينا كيس يحتوي على 6 كرات حمراء و 8 كرات زرقاء فما هو أقل عدد من الكرات يجب سحبة لكي نحصل على كرتين من نفس اللون فإذا فرضنا أن الألوان هي عيون البرج =2 والتالي تكون الكرات التي يجب سحبها بحث نحصل على كرتين من نفس اللون هي الحمام وتساوي ثلاث كرات على الأقل.

نظرية (7.5.3) تعميم مبدأ برج الحمام

إذا وزعنا m حمامة على برج حمام يتكون من n عين بحيث $m > kn$ حيث k عدد صحيح موجب فإن عينا واحدة على الأقل يجب أن تحتوي على الأقل على k+1 حمامة.

البرهان:

نفرض جدلاً إن كل عين تحتوي على الأكثر على k حمامة وبالتالي يكون عدد الحمام أقل أو يساوي kn ومعنى ذلك أن $m \leq kn$ وهذا يناقض الفرض أن $m>kn$ وبالتالي لحل هذا التناقض فإن عيناً واحدة على الأقل يجب أن تحتوي على الأقل على k+1 حمامة.

ملاحظة: بعض الرياضيون يعرفون مبدأ برج الحمام العام كما يلي "إذا كان لدينا kn+1 شيء ونريد وضعها في n موضع فإن أحد المواضع يحتوي على الأقل على k+1 أو أكثر من الأشياء.

مثال: إذا وزعنا 34 كرة على ثلاث صناديق فأثبت أن أحد الصناديق يحتوي على الأقل على 12 كرة.

الحل:

بما أن $(3)(11) < 34$ وبتطبيق نظرية (7.5.3) تعميم مبدأ برج الحمام فإنه يوجد صندوق واحد على الأقل يحتوي على الأقل على $11+1=12$ كرة.

نظرية (7.5.4)

إذا وضعنا عدد N كرة في k صندوق فإنه يوجد صندوق واحد على الأقل يحتوي على $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ كرة.

البرهان:

نفرض جدلاً أنه لا يوجد أي من الصناديق يحتوي على أكثر من $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ كرة فإن عدد الكرات يكون على الأكثر هو

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{K} + 1\right) - 1\right) = N$$

وهذا يناقض كون عدد الكرات يساوي N وبالتالي لفك هذا التناقض فإن أحد الصناديق يجب أن يحتوي على الأقل على $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ كرة.

ملاحظة: في النظرية السابقة استخدمنا دالة الجزء الصحيح $\lceil x \rceil$ التي تعطي أصغر عدد طبيعي يكون أكبر أو يساوي x وهي تحقق $\lceil x \rceil < x + 1$.

مثال: من بين 100 شخص يوجد على الأقل $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = \lceil 8.33 \rceil = 9$ يكونو مولودون في نفس الشهر.

ملاحظة: لحساب أقل عدد N من الكرات التي تتوزع على K صندوق بحيث يكون على الأقل r كرة في أحد الصناديق؟

فمن نظرية (7.5.4) لكي يوجد على الأقل r كرة في صندوق واحد من k صندوق فإنه يجب أن يكون $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r$ وبالتالي يكون أقل عدد N يحقق $\frac{N}{k} > r - 1$ هو $N = k(r-1) + 1$ وهذا هو أقل عدد يحقق $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil \geq r$.

مثال: ما هو أقل عدد مطلوب من الطلاب لكي يكون من المؤكد أن 6 منهم سوف يحصلوا على نفس التقدير في امتحان الرياضيات علماً بأنه يوجد 5 تقديرات وهم A, B, C, D, F.

الحل:

نأخذ k=5 و r=6 وبالتالي أقل عدد من الطلاب بحيث يكون على الأقل 6 منهم يحصلوا نفس التقدير هو أقل عدد N يحقق $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil \geq 6$

وبالتالي $N = k(r-1)+1$

وبالتالي $N = 5(5)+1 = 26$

مثال: حقيبة بها كرات بيضاء وحمراء وسوداء فما هو أقل عدد من الكرات يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 9 كرات من نفس اللون.

الحل:

نأخذ k=3 و r=9 وبالتالي أقل عدد من الكرات يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 9 كرات من نفس اللون هو أقل عدد N يحقق $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil \geq 9$

وبالتالي $N = k(r-1)+1$

وبالتالي $N = 3(8)+1 = 25$

مثال: كيس يحتوي على 6 أقلام زرقاء و 8 أقلام حمراء و 11 قلم أسود فما هو أقل عدد من الأقلام يجب سحبة حتى نحصل على 5 أقلام على الأقل من نفس اللون.

الحل:

نأخذ k=3 و r=5 وبالتالي أقل عدد من الأقلام يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 5 اقلام من نفس اللون هو أقل عدد N يحقق $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil \geq 5$ ،

وبالتالي $N = k(r-1)+1$

وبالتالي $N = 3(4)+1 = 13$

تمارين

1. شخص يرغب في أكل وجبة سريعة تحتوي على لحم وحلويات ومشروب غازي وفي المطعم وجد 10 أنواع من اللحوم و 6 أنواع من الحلويات و 7 أنواع من المشروبات الغازية فما هو عدد الاختيارات الممكنة لذلك.
2. ما هو عدد التباديل الممكنة للأحرف a, b, c, d, e بدون تكرار ثم مع التكرار وإكتبها في كل حالة.
3. ما هو عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث أرقام والممكن تشكيلها من الأرقام 1, 2, 3 في كلتا الحالتين الأولى دون التكرار والثانية مع التكرار ثم إكتب هذه التراتيب.
4. احسب عدد الكلمات التي يمكن كتابتها من ثلاث أحرف من المجموعة {c, e, m, n, k} في كلتا الحالتين الأولى دون التكرار والثانية مع التكرار ثم إكتب هذه الكلمات بغض النظر عن معانيها.
5. يحوي صف 18 طالب نصفهم ذكور والنصف الأخر إناث والمطلوب إيجاد:
   - عدد الطرق لإختيار لجنه مؤلفه من خمس أشخاص من هذا الصف.
   - عدد الطرق لإختيار لجنه مؤلفه من خمس أشخاص من هذا الصف بحيث تضم ثلاث ذكور.
   - عدد الطرق لإختيار لجنه مؤلفه من خمس أشخاص من هذا الصف بحيث تضم ثلاث ذكور على الأقل.
6. أوجد عدد التباديل الممكنة للعناصر a, a, a, b, b ثم أوجدها.
7. أوجد عدد التراتيب المؤلفة من ثلاث أرقام والمأخوذة من مجموعة الأرقام {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7 ,8} في كلتا الحالتين الأولى دون التكرار والثانية مع التكرار.
8. ما هو عدد الطرق التي يمكن بها إختيار لجنه مؤلفة من خمس طلاب من بين 20 طالب.
9. يتألف مجلس من 9 أعضاء بينهم 3 إناث والمطلوب:
   - ما هو عدد الطرق التي يمكن بها أن يجتمع المجلس بالحد الادنى للنصاب القانوني والبالغ 5 أعضاء.
   - ما هو عدد الطرق التي يمكن بها أن يجتمع المجلس بالنصاب القانوني على الأقل بحيث تحضر أنثى واحدة على الاقل.
10. أوجد مفكوك $(x-3)^6$

11. أوجد معامل الحد x^3y^5 في المفكوك $(x+y)^8$
12. أوجد قيمة 0.95^5 وذلك بإستخدام ذات الحدين.
13. أوجد الحدين الخامس والسادس في المفكوك $(2x-3)^9$
14. أوجد الحد رقم 11 في مفكوك $(x+\frac{1}{x})^{14}$
15. كم عدد ممكن أن يتكون من 5 أرقام مختلفة أخذت من المجموعة $\{1,4,5,7,8,9\}$
16. بكم طريقة يمكن إختيار طبق يتكون من 5 تفاحات و 4 برتقالات و 3 رمانات مأخوذة من صندوق يتكون من 10 تفاحات و 9 برتقالات و 7 رمانات.
17. بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة 'زمهرير'.
18. بكم طريقة يمكن وضع 6 صحون متشابهة و 4 فناجين متشابهة و 12 ملعقة متشابهة على رف معين.
19. كم عدد الأوجه التي يمكن أن نحصل عليها لو قذفنا قطعة نقود معدنية 10 مرات
20. كم عدد متكون من 5 خانات أخذت أرقامه ضمن الأعداد $\{1,2,3,4\}$
21. تقدم 55 طالب لامتحان من 50 درجة فأثبت أنه يوجد على الأقل 5 طلاب يكون لهم نفس النتيجة.
22. ولد 97 طفل في أحد الأيام في أحد المدن فأثبت أن 5 من الأطفال على الأقل قد ولدو في نفس الساعة.
23. يحتوي صندوق على 40 كرة وكان هذا الصندوق يحتوي على كرات حمراء وزرقاء وبيضاء فأثبت أن الصندوق يحتوي على الأقل على 14 كرة من الكرات الحمراء.
24. كم أقل عدد يجب سحبة من مجموعة كرات مكونه من 3 كرات زرقاء و 5 بيضاء و 8 حمراء و 12 سوداء حتى نحصل على الأقل على 6 كرات من نفس اللون.
25. حقيبة بها كرات بيضاء وحمراء وسوداء فما هو أقل عدد من الكرات يجب سحبة بحيث نضمن حصولنا على الأقل على 8 كرات من نفس اللون.

الفصل الثامن

المخططات

Graphs

(8-1) تعاريف أساسية

(8-2) تشاكل مخططين

(8-3) العمليات على المخططات

(8-4) المسارات والدارات

(8-5) مسارات ودارات أويلر

(8-6) مسارات ودارات هاملتون

(8-7) تمثيل المخططات بالمصفوفات

(8-8) المخططات المستوية

(8-9) الأشجار

(8-10) الأشجار ذات الجذور

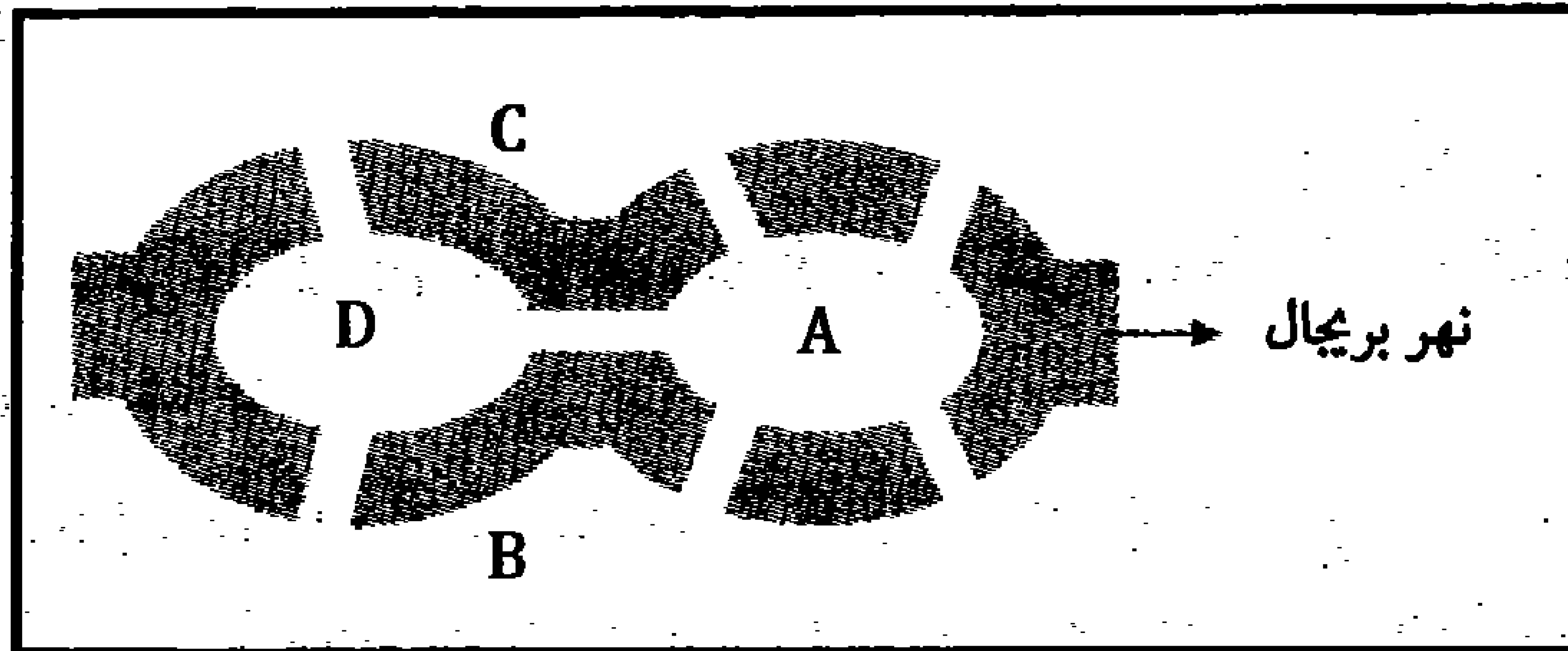
(8-11) الأشجار الثنائية المرتبة

تمارين

الفصل الثامن

المخططات

نشأت المبادئ الأولية لنظرية المخططات على يد الرياضي السويسري ليونارد أويلر عام 1735 م عندما قدم أويلر طريقة رياضية لحل مسألة الجسور السبعة لمدينة كونكسبرج Konigsberg وهي مدينة روسية ويمر بها نهر بريجال Pregel وهذا النهر يقسم المدينه إلى أربعة أجزاء من الأراضي اليابسة وتربطها سبعة جسور والمطلوب هو الإنطلاق من أي جزء من الأجزاء اليابسة الأربعة للمدينة وعبور جميع الجسور السبعة مرة واحدة فقط ثم الرجوع إلى نفس نقطة البداية وسوف نعرض هذه المسألة لاحقاً بإذن الله.



وتزداد أهمية دراسة نظرية المخططات يوماً بعد يوم نظراً لسهولة تطبيقها في مختلف العلوم التطبيقية مثل الحاسبات والإدارة والهندسة والإقتصاد والكيمياء وغيرها... وكالعادة عند دراسة أي موضوع جديد فإننا نبدأ أولاً بإعطاء التعاريف الأساسية.

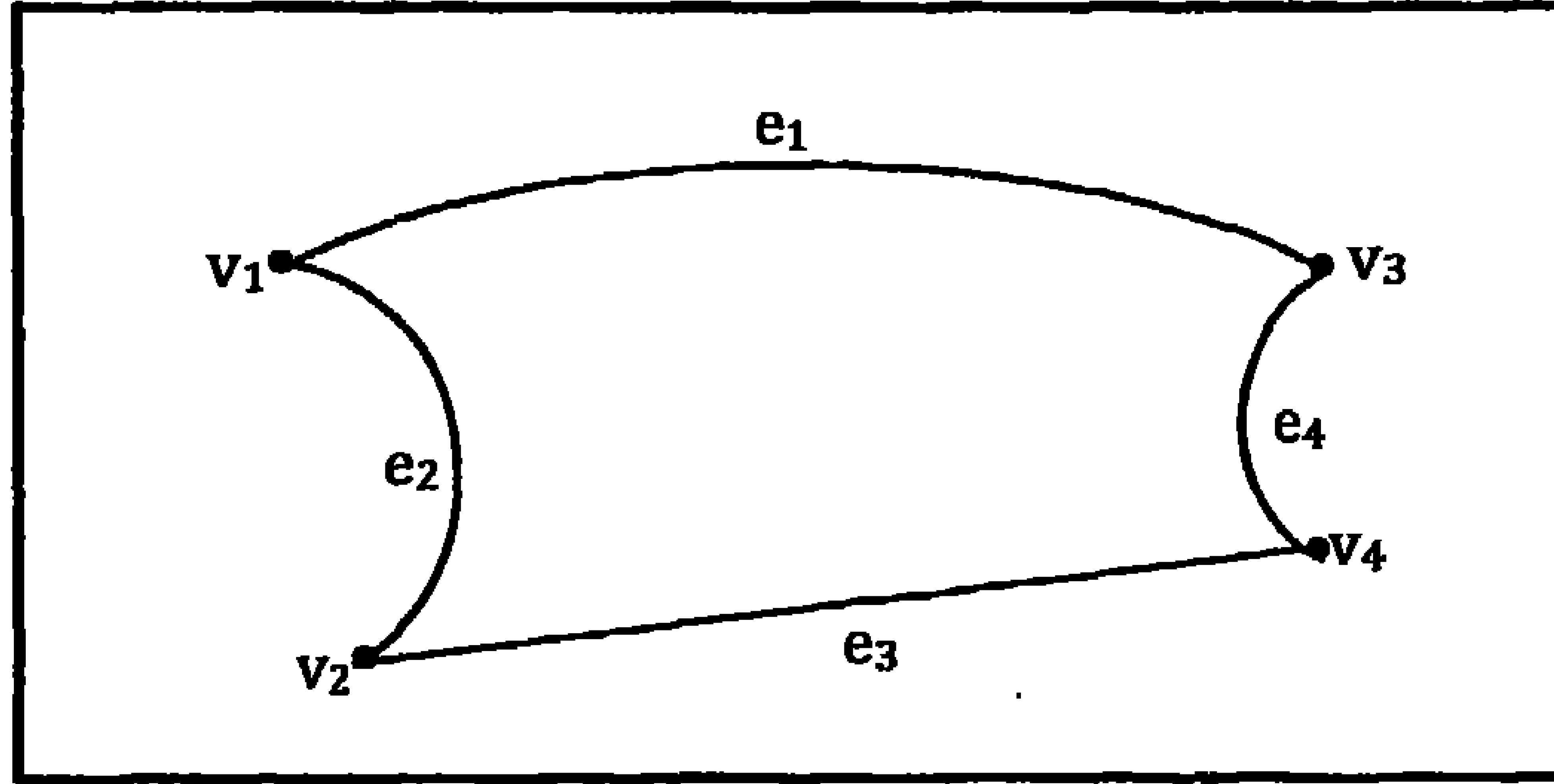
(8-1) تعاريف أساسية

(8-1-1) تعريف المخطط

يتكون المخطط G=(V, E) من مجموعة غير خالية V تسمى رؤوس (نقاط – بؤر) vertices تكون مرتبطة مع مجموعة أخرى E من الخطوط الواصلة بين الرؤوس تسمى أضلاع (خطوط – حواف) Edges بحيث كل ضلع من أضلاع المخطط G يربط بين رأسين من رؤوس المخطط G مع إمكانية وجود أكثر من ضلع ممكن أن يربط بين رأسين من

رؤوس المخطط G وكذلك يمكن أن يوجد رأس من رؤوس المخطط G لا يرتبط بأي ضلع من أضلاع المخطط .

مثال: في المخطط التالي G :



مجموعة الرؤوس هي:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

مجموعة الأضلاع هي:

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

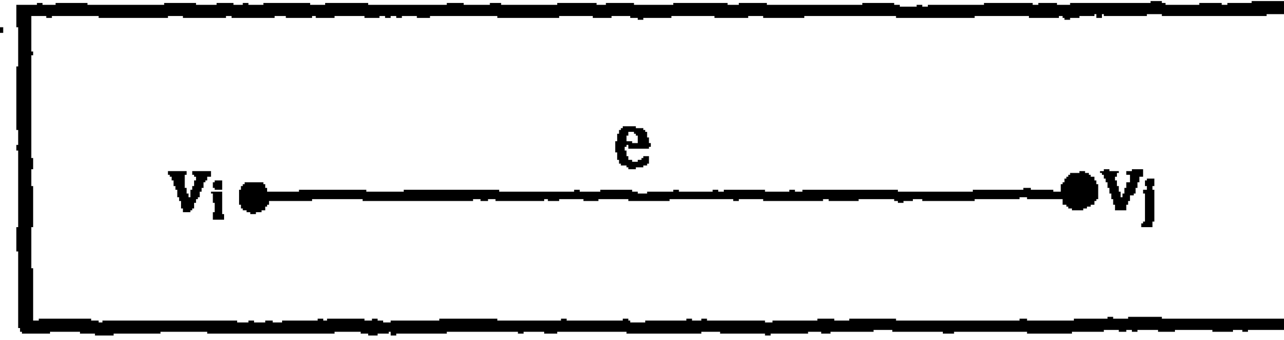
ملاحظة (1): من الممكن أن تكون مجموعة الرؤوس غير محدودة ولكن هذه الحالة خارج نطاق دراستنا هنا.

ملاحظة (2): إذا كان الضلع e يصل بين الرأسين v_i, v_j فإن الزوج الغير مرتب $[v_i, v_j]$ يرمز للضلع e أي أن $e = [v_i, v_j]$ أو $e = [v_j, v_i]$ وذلك لإهمال الترتيب وبالتالي:

$$e \in E \Leftrightarrow \exists v_i, v_j \in V: e = [v_i, v_j]$$

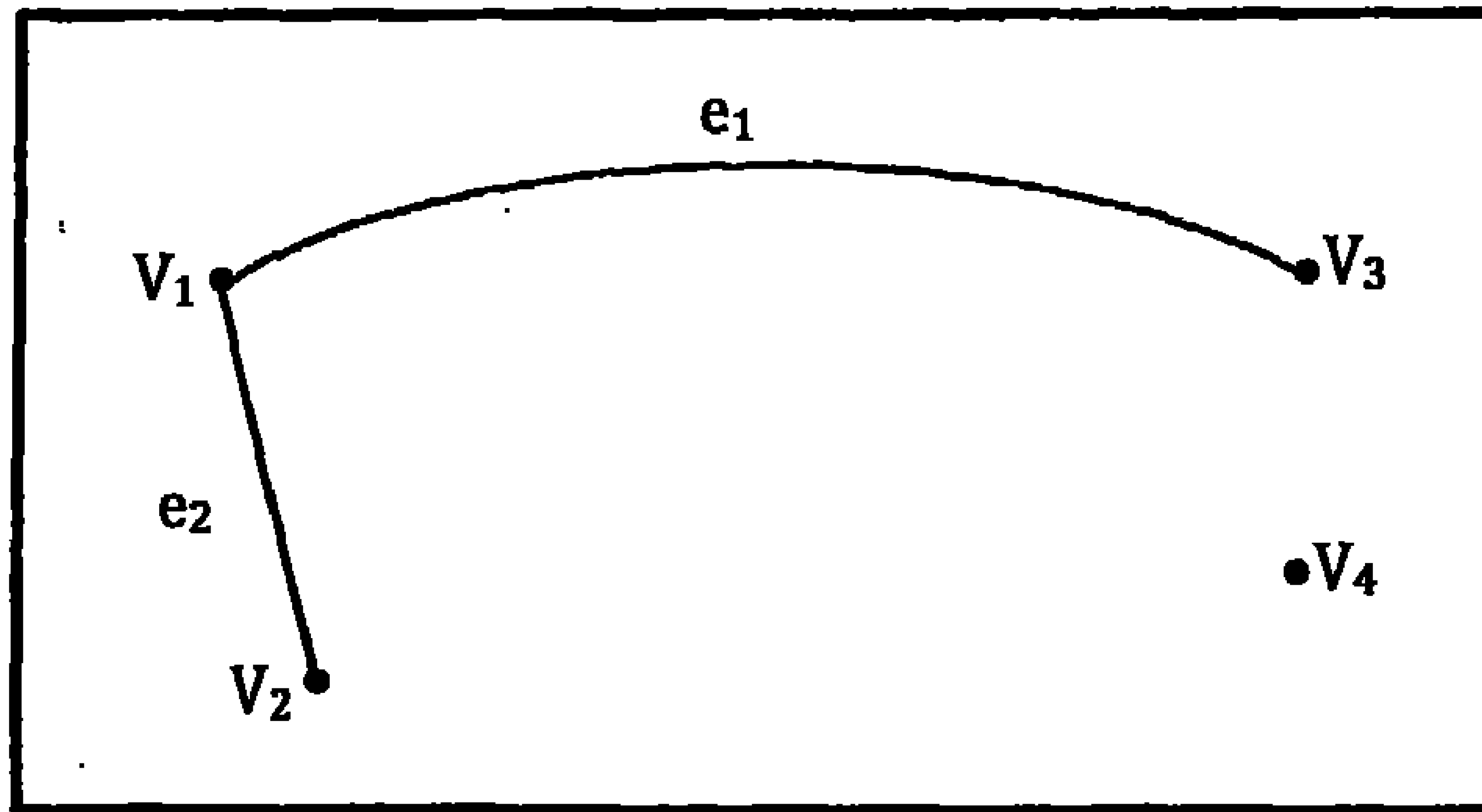
وفي هذه الحالة نسمي v_i, v_j طرفان (نهايتان) للضلع e وفي هذه الحالة أيضاً نقول عن الرأسين v_i, v_j إنهما متجاوران adjacent كما نقول عندئذ أن كلاً من الرأسين v_i, v_j واقع على الضلع e incident with و إذا كان الرأس v طرف للضلع e فإننا نقول أن الضلع e يلتقي مع الرأس v وفي هذه الحالة نقول عن v و e إنهما ملتقيان(e and v are incident) وأيضاً فإننا نقول عن الضلعان e_i و e_j إنهما متجاوران إذا كانا يلتقيان في نفس الرأس بينما نقول عن الرأس الذي لا يقع على أي ضلع من أضلاع المخطط إنها رأس معزولة isolated .

مثال: في المخطط التالي:



الرأسان v_i و v_j هما متجاوران لأنهما يرتبطان بنفس الضلع e .

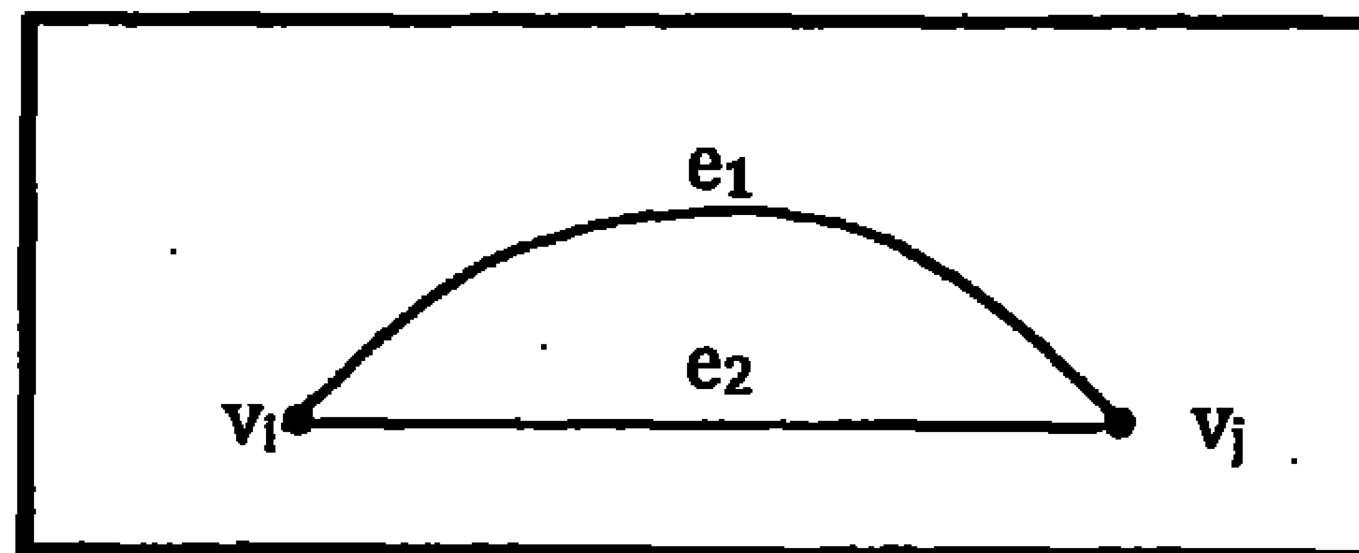
مثال: في المخطط التالي:



حيث الضلعان e_1 و e_2 هما ضلعان متجاوران لأنهما يلتقيان عند نفس الرأس v_1 بينما الرأس v_4 معزولة.

ملاحظة (3): إذا كان الضلعان e_2 , e_1 يربطان الرأسين v_i و v_j فإننا نقول أن الضلعين e_2 و e_1 أنهما ضلعان مكرران (متوازيان).

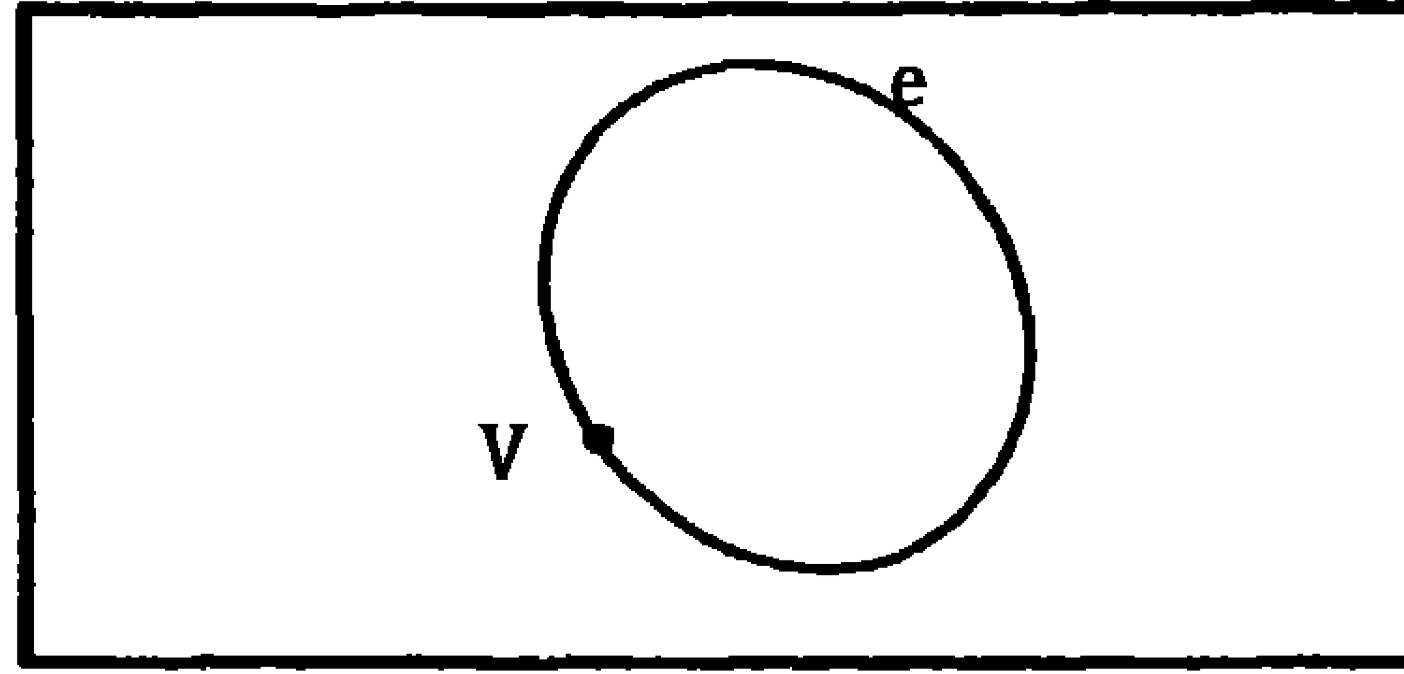
مثال: في المخطط التالي:



الضلعان e_1 و e_2 ضلعان مكرران (متوازيان).

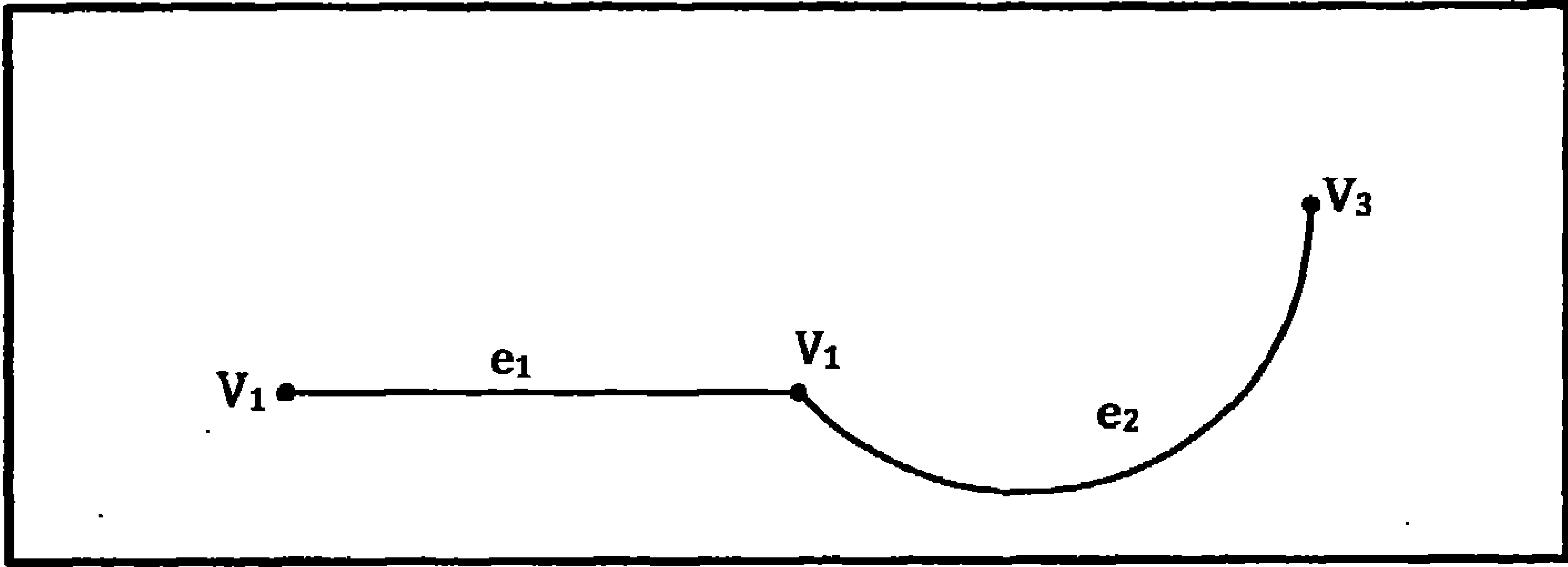
ملاحظة (4): في الحالة العامة لكل ضلع له طرفان أو نهايتان أما إذا كان لضلع ما نهاية واحدة فقط فإننا نسمي الضلع في هذه الحالة عقدة (لفه- عروة) loop إذن الضلع الذي يربط الرأس بنفسه يسمى عقدة.

مثال: في المخطط التالي الضلع e يمثل عقدة.

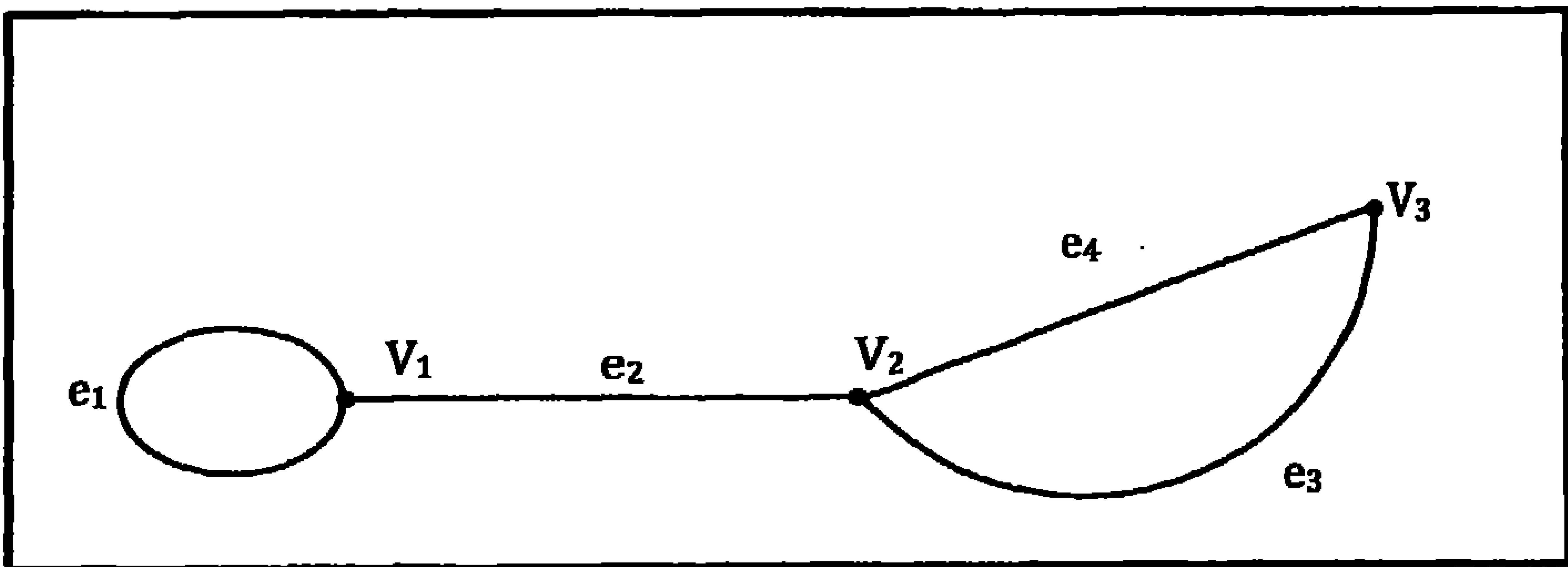


ملاحظة (5): المخطط الذي لا يحتوي على أي عقد أو أي أضلاع متكررة يسمى مخطط بسيط simple graph .

مثال: المخطط التالي هو مخطط بسيط

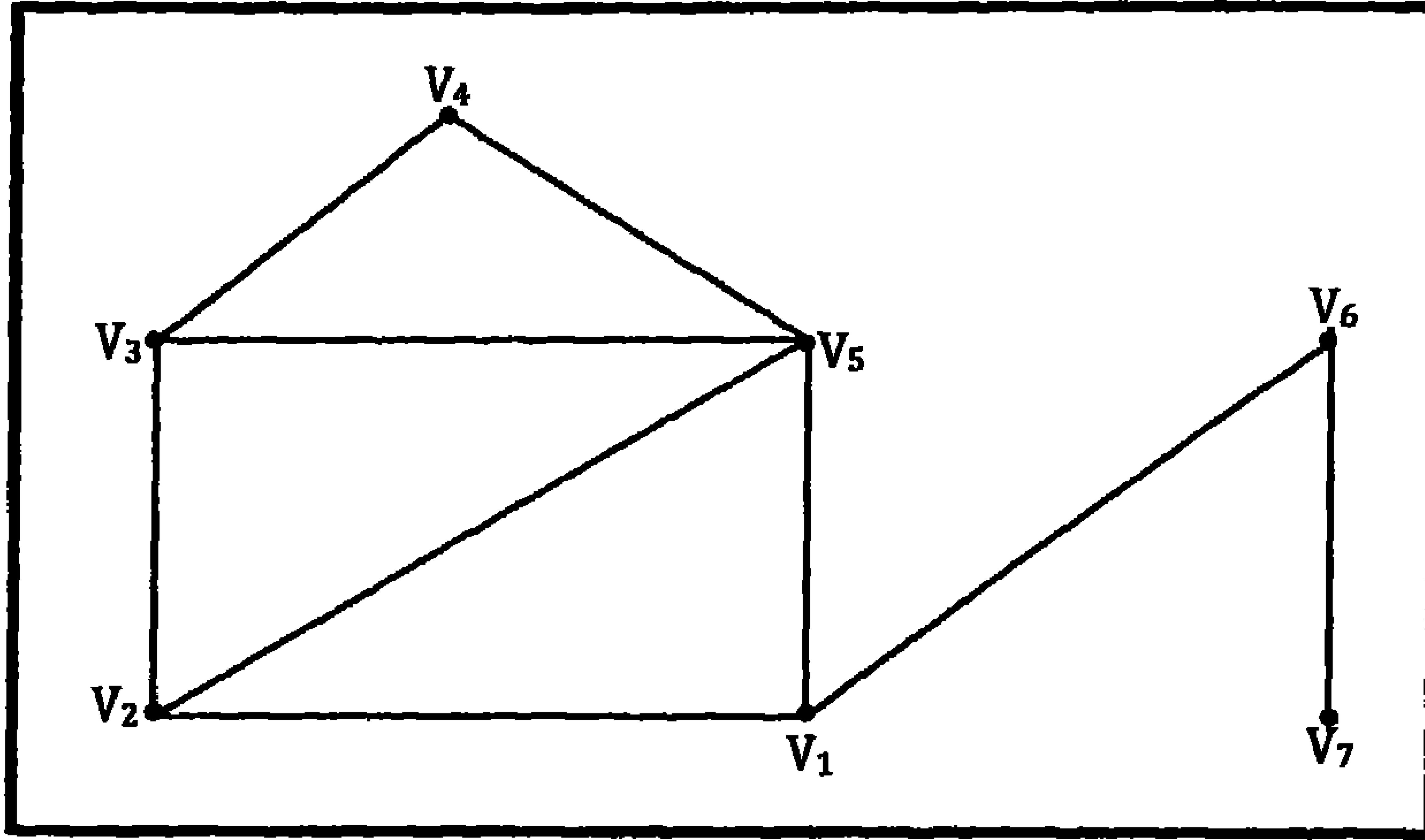


مثال: المخطط التالي هو مخطط غير بسيط



بسبب وجود العقدة e_1 وكذلك بسبب وجود الضلعان المكرران e_3 و e_4.

مثال : ليكن لدينا المخطط $G=(V,E)$ التالي:



فإن :

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E(G) = \{[v_1, v_2], [v_1, v_5], [v_1, v_6], [v_2, v_3], [v_2, v_5], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5], [v_6, v_7]\}$$

وهو مخطط بسيط لأنه لا يحتوي على أي عقد أو أضلاع متكررة.

نظرية (8.1.2)

إذا كان G مخطط بسيط ويحتوي على عدد n من الرؤوس فإن الحد الأعلى لعدد أضلاع المخطط G هو $\frac{n(n-1)}{2}$.

البرهان:

بإستخدام مبدأ الإستقراء الرياضي:

الخطوة الأولى: إذا كانت $n=1$ فإن المخطط G يحتوي على رأس واحد وبما أن المخطط G هو مخطط بسيط فلا يحتوي على أي عقد وبالتالي فعدد الأضلاع الممكنة $=0$ وهذا يحقق أن الحد الأعلى لعدد أضلاع المخطط G هو $\frac{n(n-1)}{2}$.

وإذا كانت $n=2$ فإن المخطط G يحتوي على رأسين v_1, v_2 وبالتالي فمن الممكن أن يوجد ضلع يربط بين v_1, v_2 وبما أن المخطط G هو مخطط بسيط فلا يحتوي على أي عقد وبالتالي فعدد الأضلاع الممكنة $=1$ وهذا يحقق أن الحد الأعلى لعدد أضلاع المخطط G هو $1 = \frac{2(1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

الخطوة الثانية: نفرض صحة النظرية في حالة n ونحاول إثبات ذلك في حالة n+1؟

لذا نفرض أن لدينا مخطط G يحتوي على عدد n+1 من الرؤوس $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ وبالتالي يكون لدينا مجموعتان من الأضلاع:

1. المجموعة الأولى وهي مجموعة أضلاع المخطط G التي تربط بين الرؤوس $v_1, v_2, \dots, v_n$ وبالتالي فالحد الأعلى لهذه المجموعة هو $\frac{n(n-1)}{2}$.
2. المجموعة الثانية وهي مجموعة أضلاع المخطط G التي تربط بين الرأس v_{n+1} والرؤوس $v_1, v_2, \dots, v_n$ وبالتالي فالحد الأعلى لهذه المجموعة هو n.

وبجمع عدد أضلاع المجموعتين نحصل على:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\big((n+1)-1\big)}{2}$$

أي أن النظرية صحيحة في حالة n+1.

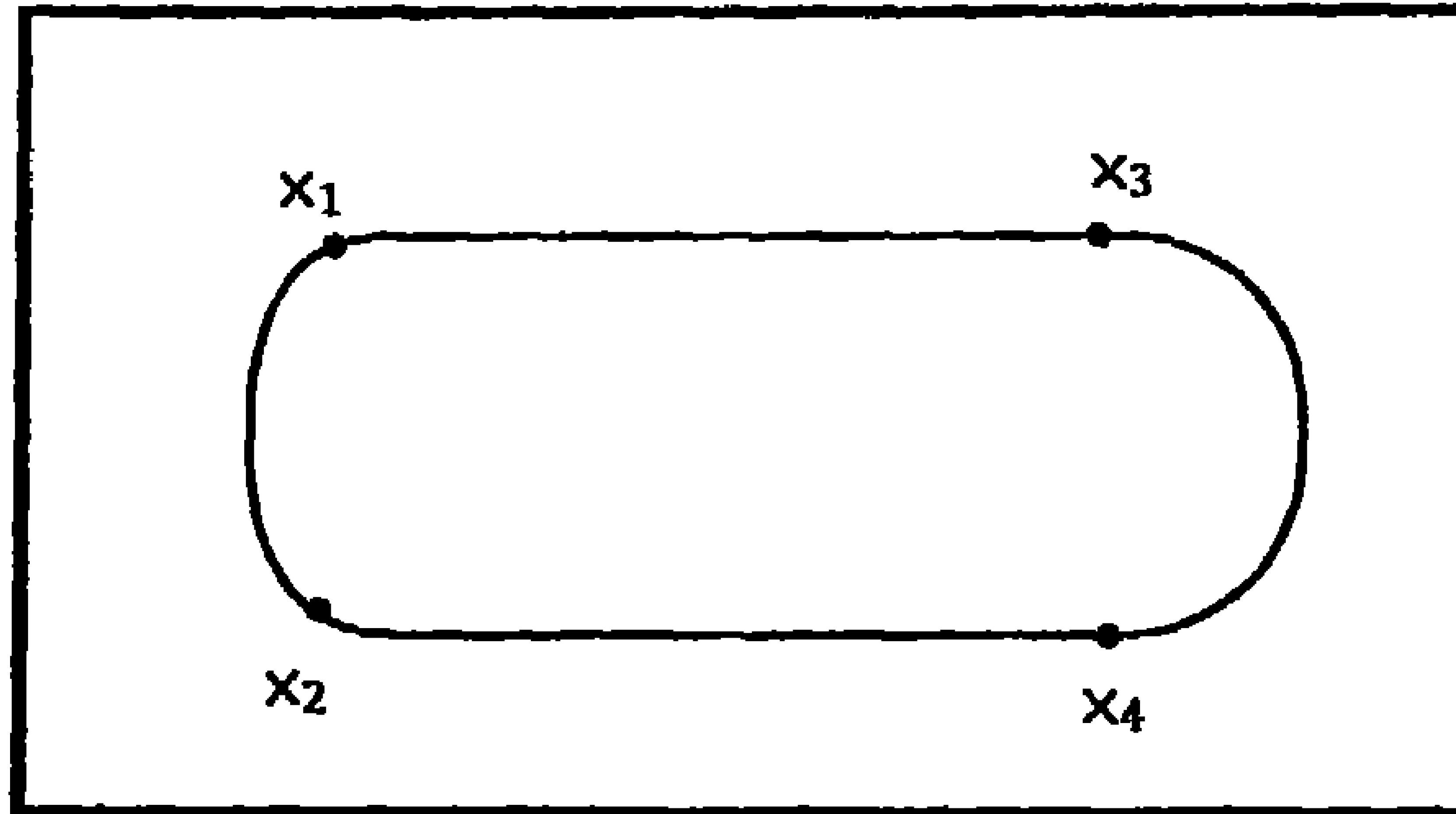
ملاحظة (6): من الممكن أن نعرف المخطط رياضياً كما يلي:

- لتكن X مجموعة غير خالية من النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ ولتكن $f: X \to X$ دالة معرفة كما يلي: $\forall x_i, x_j \in X$ فإن $f(x_i) = x_j$
- وفي هذه الحالة نرمز للمخطط بالرمز $G(X, f)$ أو إختصاراً بـ G وتسمى مجموعة النقاط X بأنها مجموعة رؤوس المخطط G ويرمز لها بالرمز V(G) وبينما تسمى المجموعة f(X) بأنها مجموعة أضلاع المخطط G ويرمز لها بالرمز E(G) .

ملاحظة (7): يوجد ثلاث أنواع من المخططات:

- **النوع الأول:** المخططات المتجهه Didraph أو Directected graph وفيها تكون جميع أضلاع المخطط الواصلة بين رؤوسة هي أسهم وبالتالي يكون السير في إتجاه واحد فقط خلال الضلع الواصل بين رأسين من رؤوس المخطط.
- **النوع الثاني:** المخططات الغير متجهه Nondirected graph وفيه تكون جميع أضلاع المخطط الواصلة بين رؤوسة هي خطوط غير متجهه وبالتالي إذا كانت a, b رأسين من رؤوس المخطط فإنه يمكن السير من a إلى b أو العكس .
- **النوع الثالث:** المخططات المختلطة Mixed graph وهو مخطط تكون بعض أضلاعة خطوط متجهه والبعض الأخر يكون غير متجهه.

مثال: ليكن لدينا المخطط الغير متجهه التالي G :



فإن:

$V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

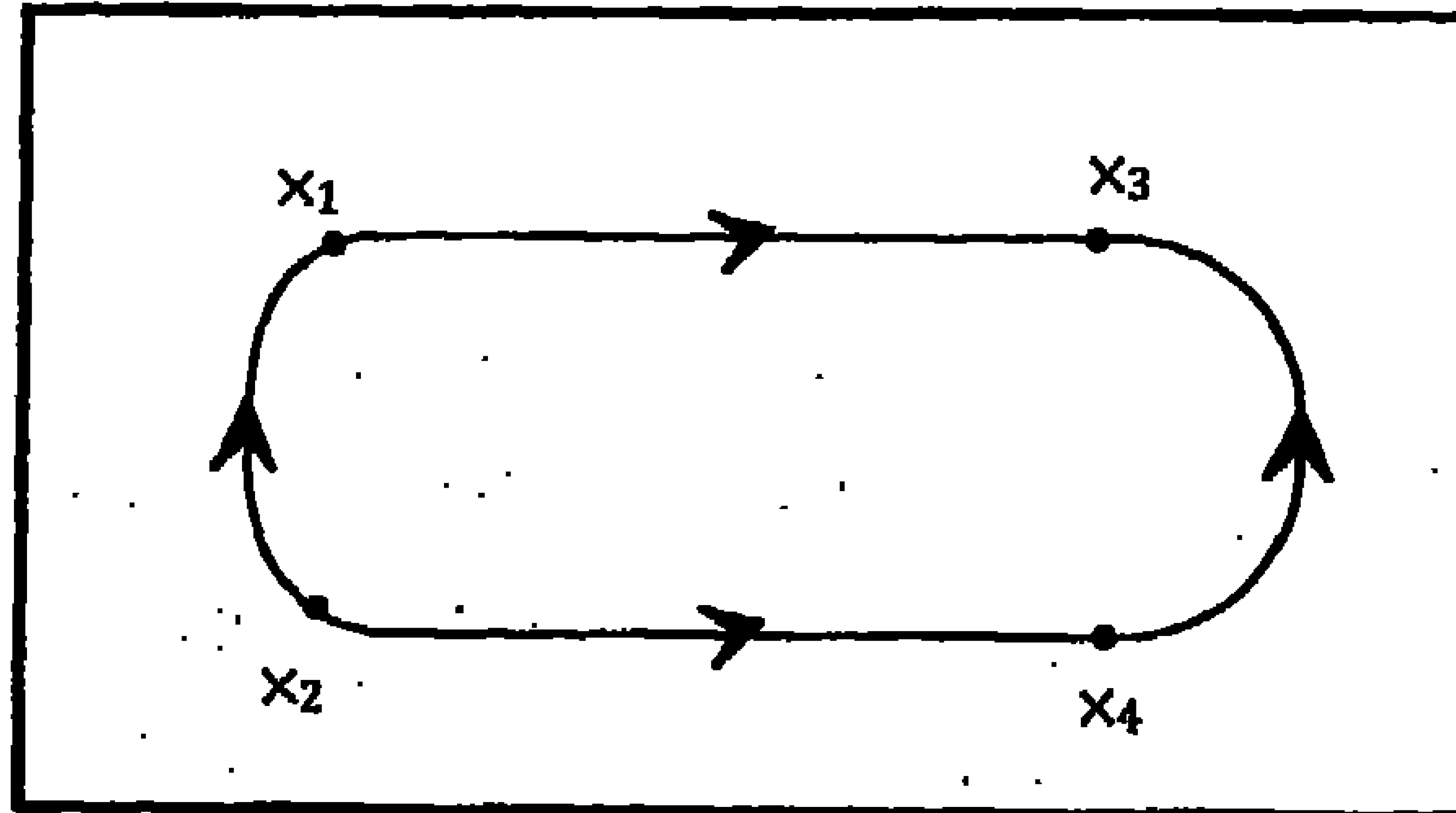
$E(G) = \{x_1x_2, x_2x_1, x_1x_3, x_3x_1, x_2x_4, x_4x_2, x_3x_4, x_4x_3\}$

$f(x_1) = \{x_2, x_3\}$
$f(x_2) = \{x_1, x_4\}$

$f(x_3) = \{x_1, x_4\}$

$f(x_4) = \{x_2, x_3\}$

مثال: ليكن لدينا المخطط المتجهه التالي G :



فإن:

$V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$E(G) = \{x_2x_1, x_1x_3, x_2x_4, x_4x_3\}$

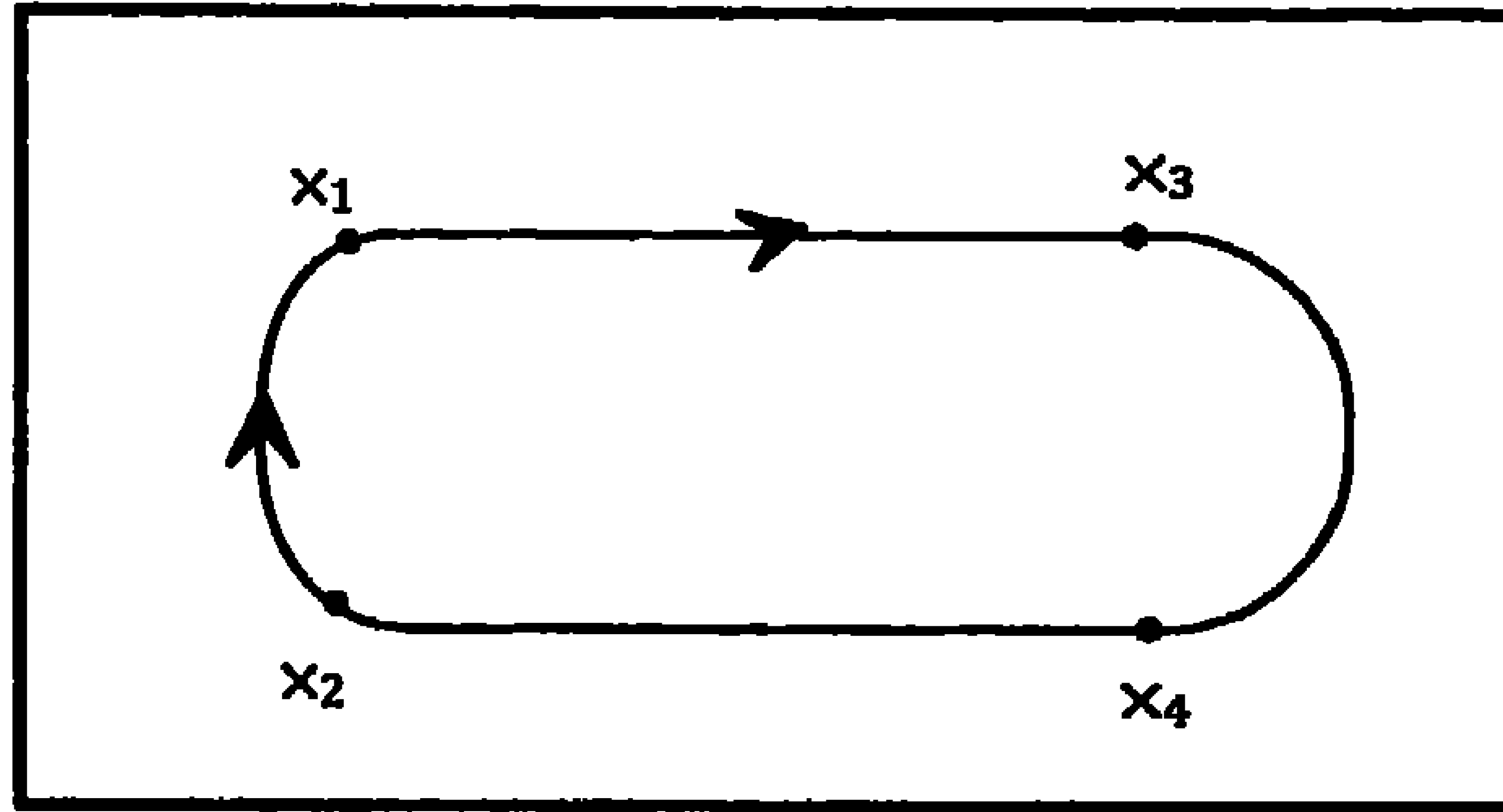
$f(x_1) = \{x_3\}$

$f(x_2) = \{x_1, x_4\}$

$f(x_3) = \{\Phi\}$

$f(x_4) = \{x_3\}$

مثال: ليكن لدينا المخطط المختلط التالي G :



فإن:

$V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$E(G) = \{x_2x_1, x_1x_3, x_2x_4, x_4x_2, x_3x_4, x_4x_3\}$

$f(x_1) = \{x_3\}$

$f(x_2) = \{x_1, x_4\}$

$f(x_3) = \{x_4\}$

$f(x_4) = \{x_2, x_3\}$

ملاحظة (8): من الممكن وصف المخططات بإستخدام جدول يكون سطره الأول هو مجموعة الأضلاع E وسطره الثاني أطراف الأضلاع بحيث يكون في حالة المخططات الغير متجة يوصف الضلع e الذي يصل بين الرأسين a و b بالزوج الغير مرتب [a, b] بينما يكون في حالة المخططات المتجهة يوصف المتجه السهمي الذي يبدأ من الراس a وينتهي بالرأس b بالزوج المرتب (a, b) .

مثال : ليكن لدينا المخطط G=(V, E)

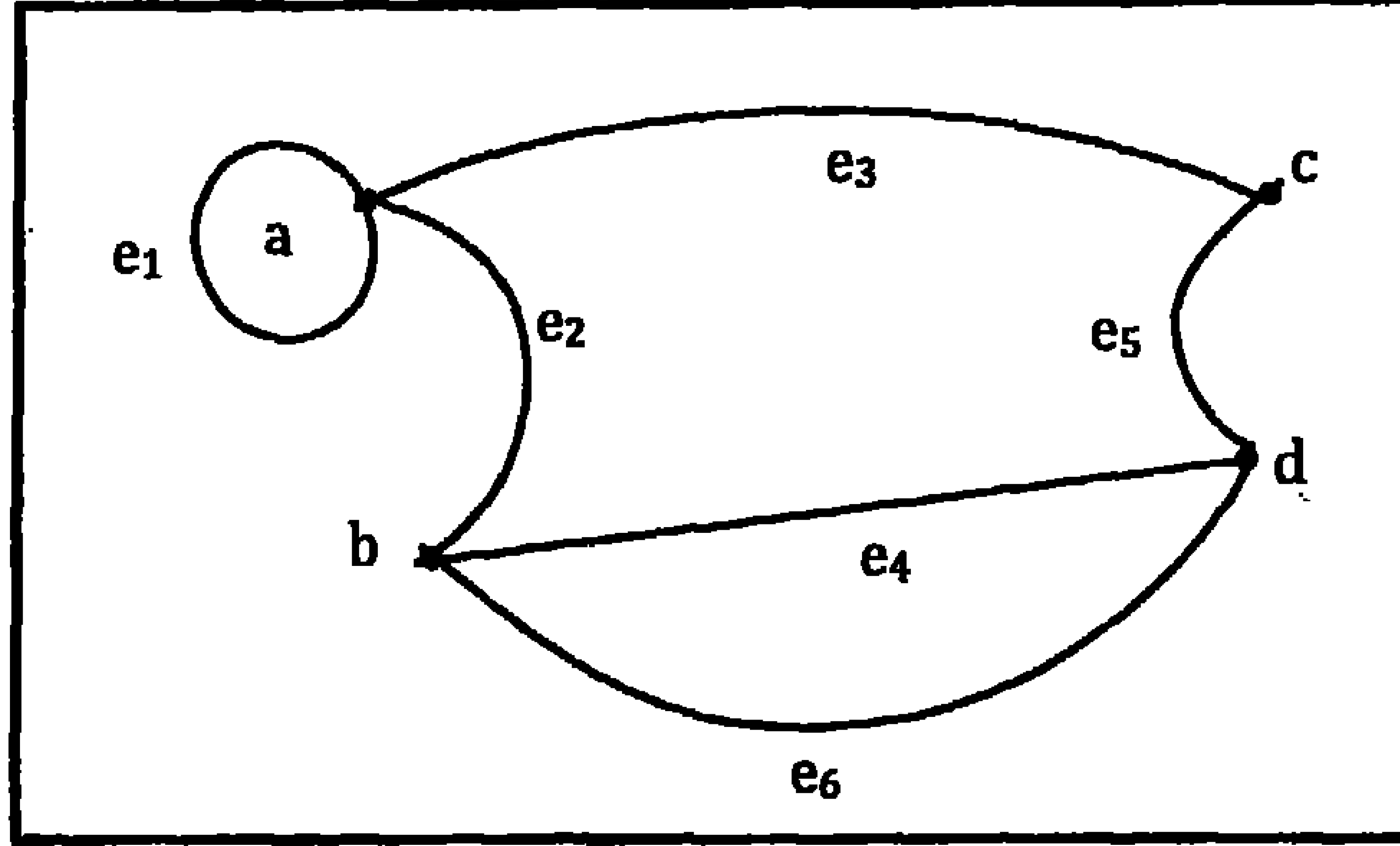
حيث : $V = \{a, b, c, d\}$ و $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

E	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
f(e)	[a, a]	[a, b]	[a, c]	[b, d]	[c, d]	[d, b]

إرسم مخطط هذا الجدول.

الحل:

يمكن رسم هذا المخطط كما يلي:



ومن الواضح أن هذا المخطط غير بسيط لوجود العقدة e_1 ووجود الضلعان المتكرران e_6, e_4

مثال : ليكن لدينا المخطط $G=(V, E)$

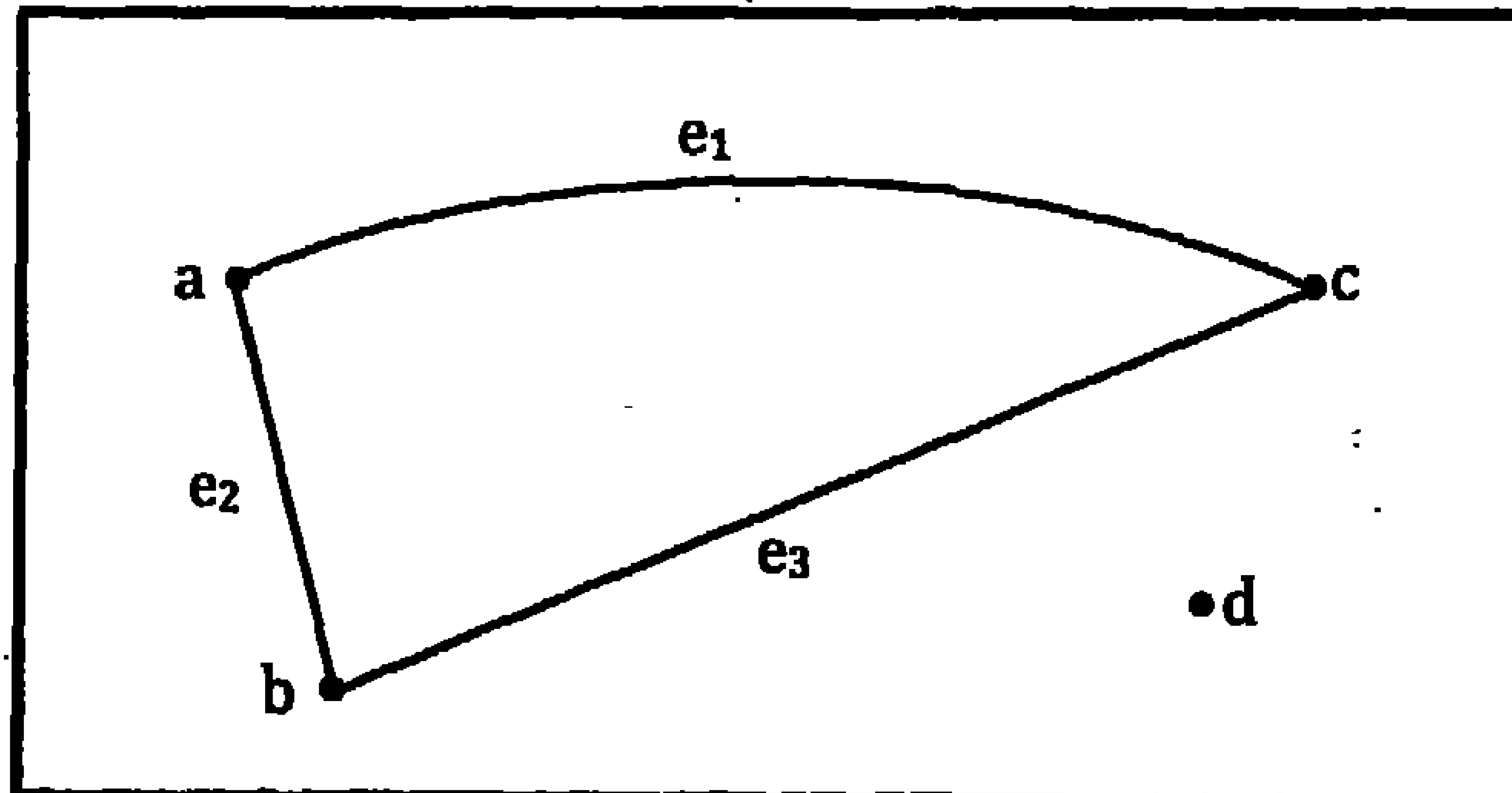
حيث : $V = \{a, b, c, d\}$ و $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

E	e_1	e_2	e_3
f(e)	[a, c]	[a, b]	[b, c]

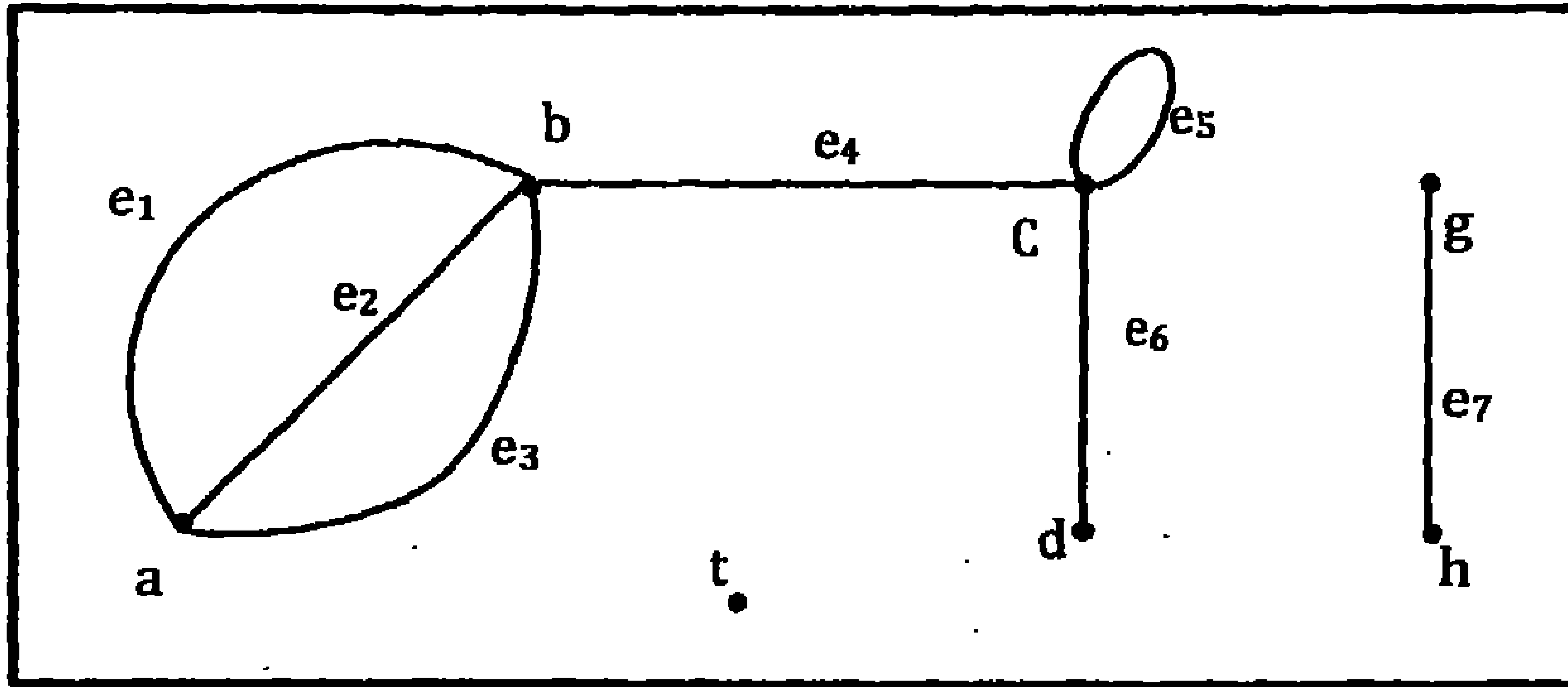
إرسم مخطط هذا الجدول.

الحل:

يمكن رسم هذا المخطط كما يلي:



مثال : أوصف المخطط التالي بإستخدام الجدول :



الحل:

$V = \{a, b, c, d, g, h, t\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

وبالتالي يمكن وصف المخطط بالجدول التالي:

E	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
f(e)	[a, b]	[a, b]	[a, b]	[b, c]	[c, c]	[c, d]	[g, h]

مثال : ليكن لدينا المخطط G=(V, E)

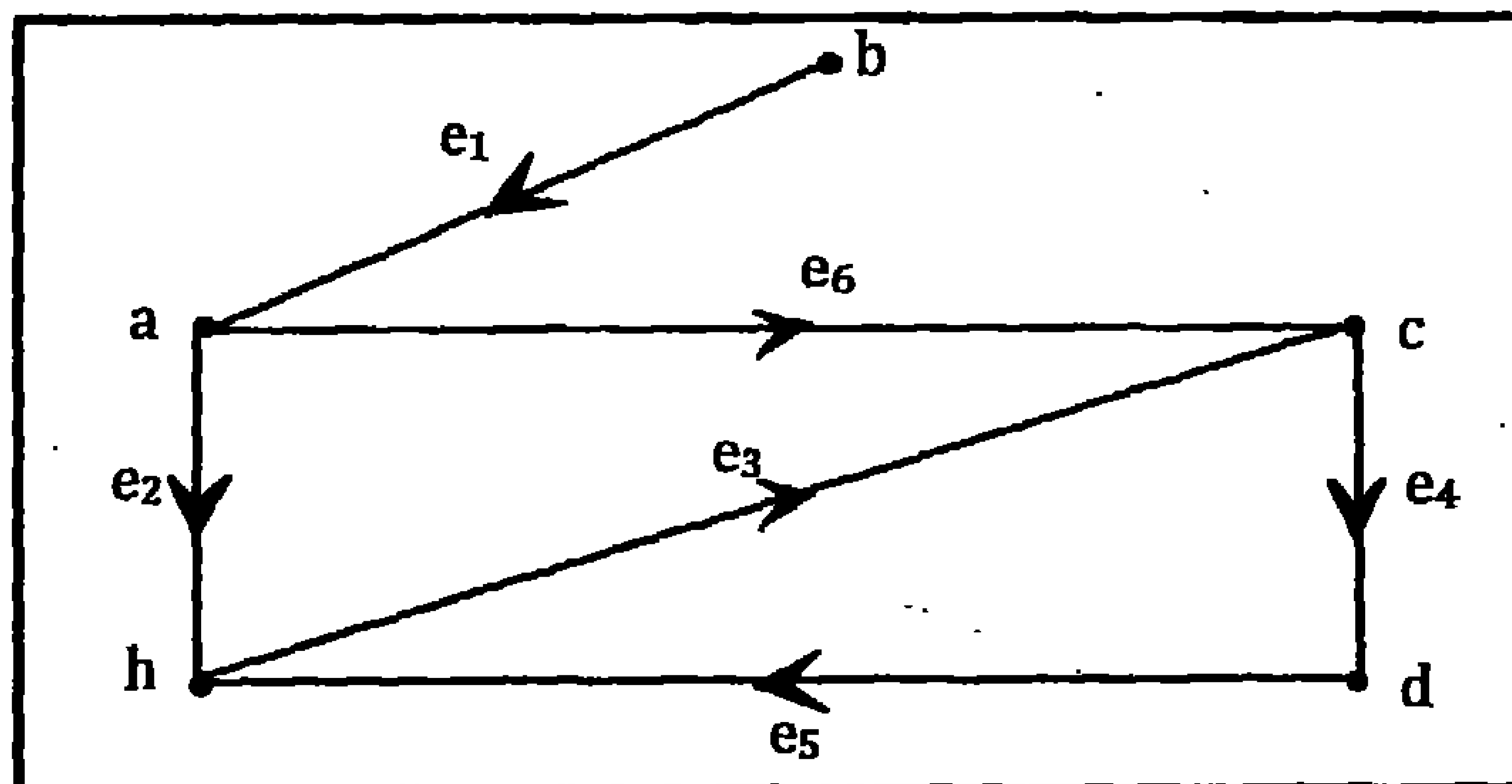
حيث : $V = \{a, b, c, d, h\}$ و $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

E	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
f(e)	(b, a)	(a, h)	(h, c)	(c, d)	(d, h)	(a, c)

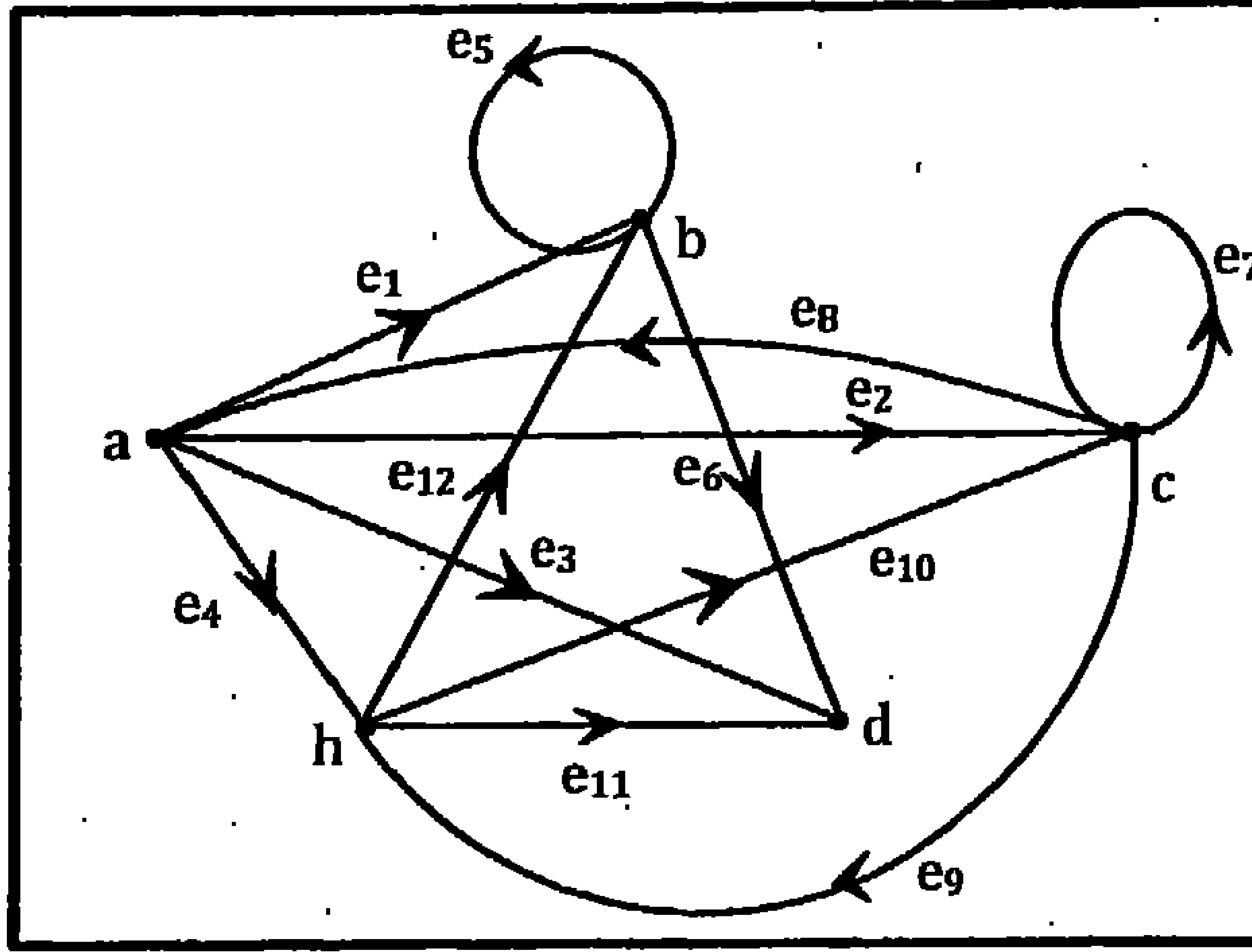
إرسم مخطط هذا الجدول.

الحل:

يمكن رسم هذا المخطط كما يلي:



مثال : أوصف المخطط التالي باستخدام الجدول :



الحل:

$V = \{a, b, c, d, h\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

وبالتالي يمكن وصف المخطط بالجدول التالي:

E	f(e)
e_1	(a, b)
e_2	(a, c)
e_3	(a, d)
e_4	(a, h)
e_5	(b, b)
e_6	(b, d)
e_7	(c, c)
e_8	(c, a)
e_9	(c, h)
e_{10}	(h, c)
e_{11}	(h, d)
e_{12}	(h, b)

ملاحظة (9): نعرف رتبة (order) المخطط $G = (V , E)$ بأنها عدد رؤوس المخطط G و نعرف درجة (degree) الرأس v في المخطط الغير إتجاهي بأنها عدد الأضلاع التي تلتقي مع الرأس v ونرمز لدرجة الرأس بـ deg(v) مع إحتساب أي عقدة بضلعين

ويقال أن المخطط G مخطط منتهي (finite graph) إذا كان عـدد أضـلاعة منتهـي كمـا يقال أن المخطط أنه غير منتهي (infinite graph) إذا كان عـدد أضـلاع المخطـط غـير منتهي و نعرف درجة الرأس v في المخطط الاتجاهي بأنها مجموع عـدد الأضـلاع الـتي تدخل إلى الرأس v مع عدد الأضلاع التي تخرج من الرأس v ونرمـز لعـدد الأضـلاع التي تدخل إلى الرأس v بالرمز $deg^{-}(v)$ بينما نرمز لعدد الأضـلاع الـتي تخـرج مـن الرأس v بالرمز $deg^{+}(v)$.

ملاحظة (10): إذا كانت v هي أحد رؤوس المخطط G وكانت deg(v) عدد فردي فإننـا نقول أن الرأس v رأس فردية odd vertex وإذا كانت deg(v) عدد زوجي فإننا نقول أن الرأس v رأس زوجية even vertex وإذا كانت deg(v)=0 فإننا نقول أن الـرأس v رأس معزوله (منفرده) isolated وإذا كانـت deg(v)=1 فإننـا نقـول أن الـرأس v رأس معلقة pendant وإذا كانت جميع رؤوس المخطط G لها الدرجة =0 فإننـا نقـول أن المخطط G هو مخطط صفري ونرمز له بالرمز 0 وفي هذه الحالة تكون جميـع رؤوس المخطط نقاط معزولة وهذا المخطط غير مهم وأما إذا كانت جميع رؤوس المخطط G لها نفس الدرجة r فإننا نقول أن المخطط G مخطط منتظم (أو مخطط منتظم من الدرجة r).

نظرية (8.1.3): (نظرية المصافحة Handshaking Theorem)

إذا كان G=(V, E) مخطط فإن $\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|E|$.

البرهان:

بما أن كل ضلع من أضلاع المخطط G يدخل في حساب درجتين من مجموع درجات أضلاع المخطط G وبالتالي فإن مجموع درجات جميع رؤوس المخطط G يكون ضعف عـدد أضلاع عدد أضلاع المخطط G وهذا يعني أن $\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|E|$.

ملاحظة : النظرية السابقة يطلق عليها نظرية المصافحة Handshaking Theorem وذلـك لأنه إذا تصافح مجموعة من الأشخاص فإن عدد الأيادي التي تشترك في هذه المصافحة لأبد أن يكون عدد زوجي.

نظرية (8.1.4)

إذا كان G=(V, E) مخطط ويحتوي علـى عـدد e مـن الأضـلاع فـإن مجمـوع درجـات الرؤوس الفردية دائما يكون عدد زوجي.

البرهان:

ليكن J مجموع درجات جميع الرؤوس الزوجية و k هو مجموع درجات جميع الرؤوس الفردية وبما أن $J + k = 2e$ وبالتالي $k = 2e - J$ وبما أن العدد 2e هو عـدد زوجـي و J هو عدد زوجي لأنه يمثل مجموع أعداد زوجية هي درجات الرؤوس الزوجية فإن العـدد k هو أيضاً يكون عدد زوجي.

نظرية (8.1.5) : إذا كان $G=(V, E)$ مخطط إتجاهي فإن:

$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|$$

البرهان:

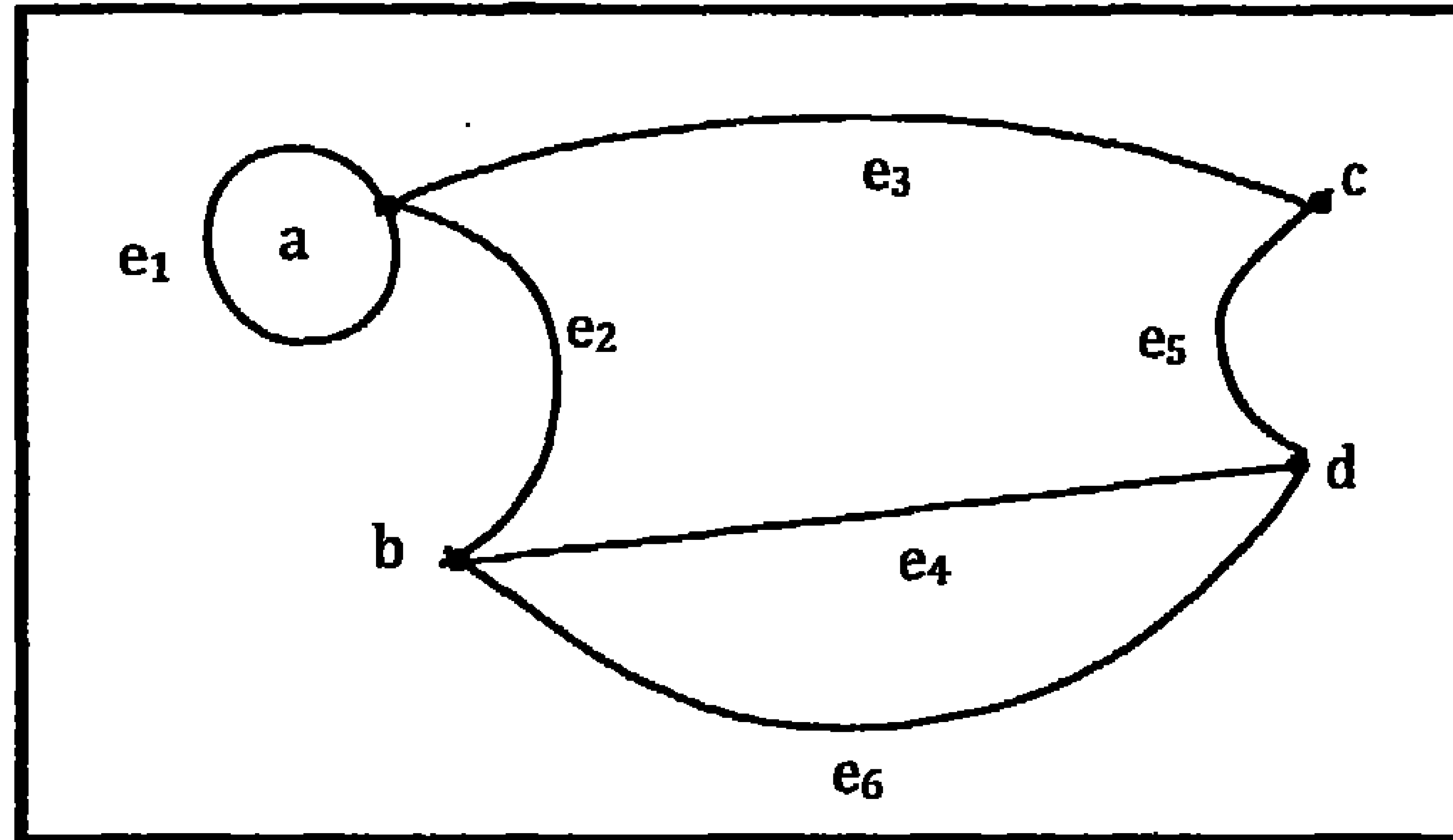
من نظرية المصافحة (8.1.3) فإن:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V} deg^-(v) + \sum_{v \in V} deg^+(v) = 2|E|$$

وبما أن كل ضلع في المخطط الإتجاهي G يكون له نقطة بداية ونقطة نهاية وبالتـالي فكل ضلع يعطي درجتين لرأسين مـن رؤوس المخطـط حيـث الدرجـة الأولى هـي درجـة الدخول $deg^-(v)$ والدرجة الثانية هي درجة الخروج $deg^+(v)$ وهذا ينطبـق علـى جميـع أضلاع المخطط G وبالتـالي فمجمـوع درجـات الـدخول للـرؤوس هـي $\sum_{v \in V} deg^-(v)$ يسـاوي عـدد أضــلاع المخطـط G كـذلك مجمـوع درجـات الخـروج للـرؤوس هـي $\sum_{v \in V} deg^+(v)$ يساوي عدد أضلاع المخطط G وبالتالي يكون:

$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|$$

مثال: إحسب درجات رؤوس المخطط التالي:



الحل:

v	a	b	c	d
deg(v)	4	3	2	3

إذن:

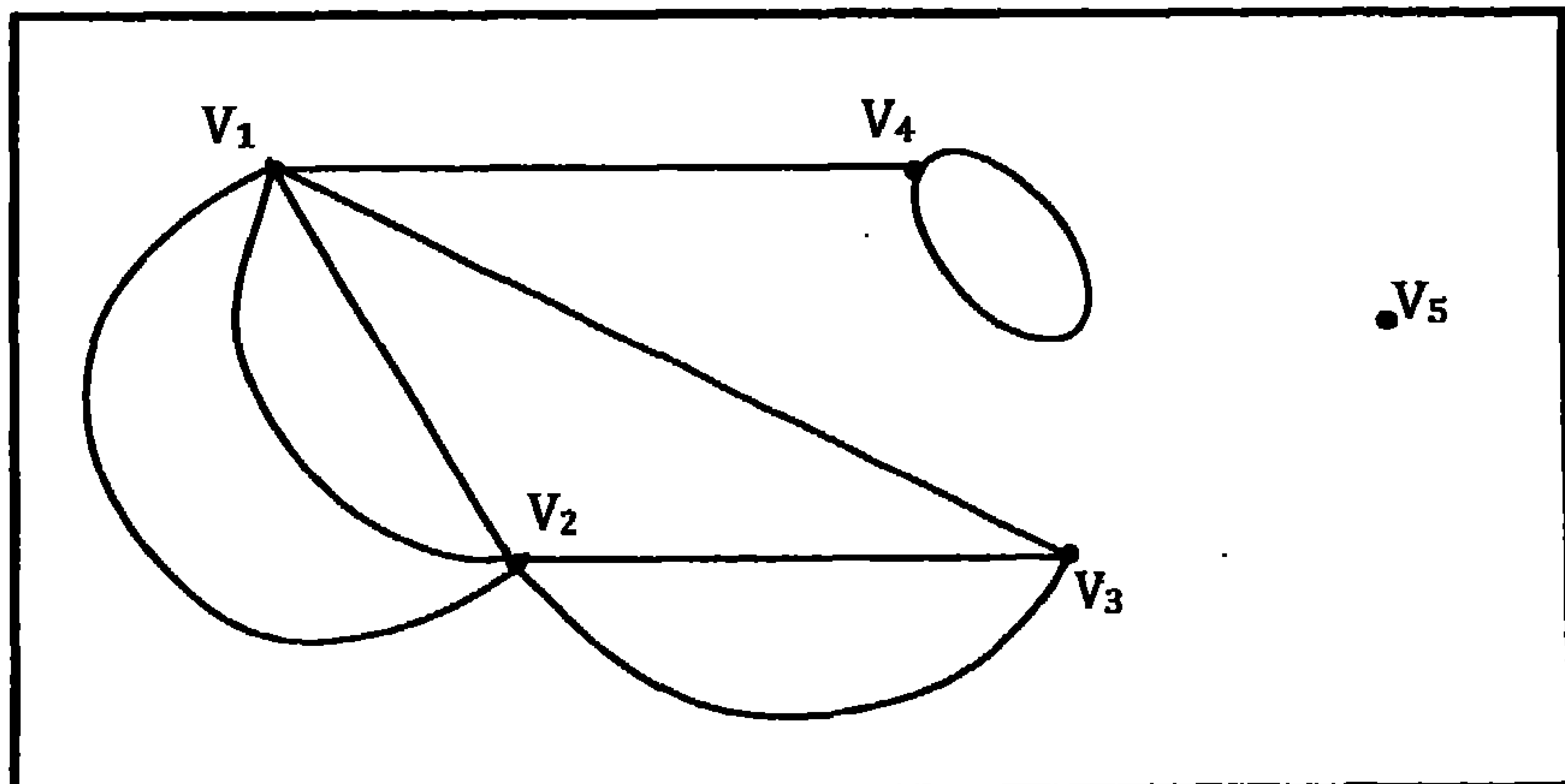
$|E| = 6$ عدد الاضلاع

$$\sum_{t=1}^{4} \deg(v_i) = 2|E|$$

$4 + 3 + 2 + 3 = 2.6$

$12 = 12$

مثال: احسب درجات المخطط التالي:



الحل:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$deg(v_i)$	5	5	3	3	0

إذن:

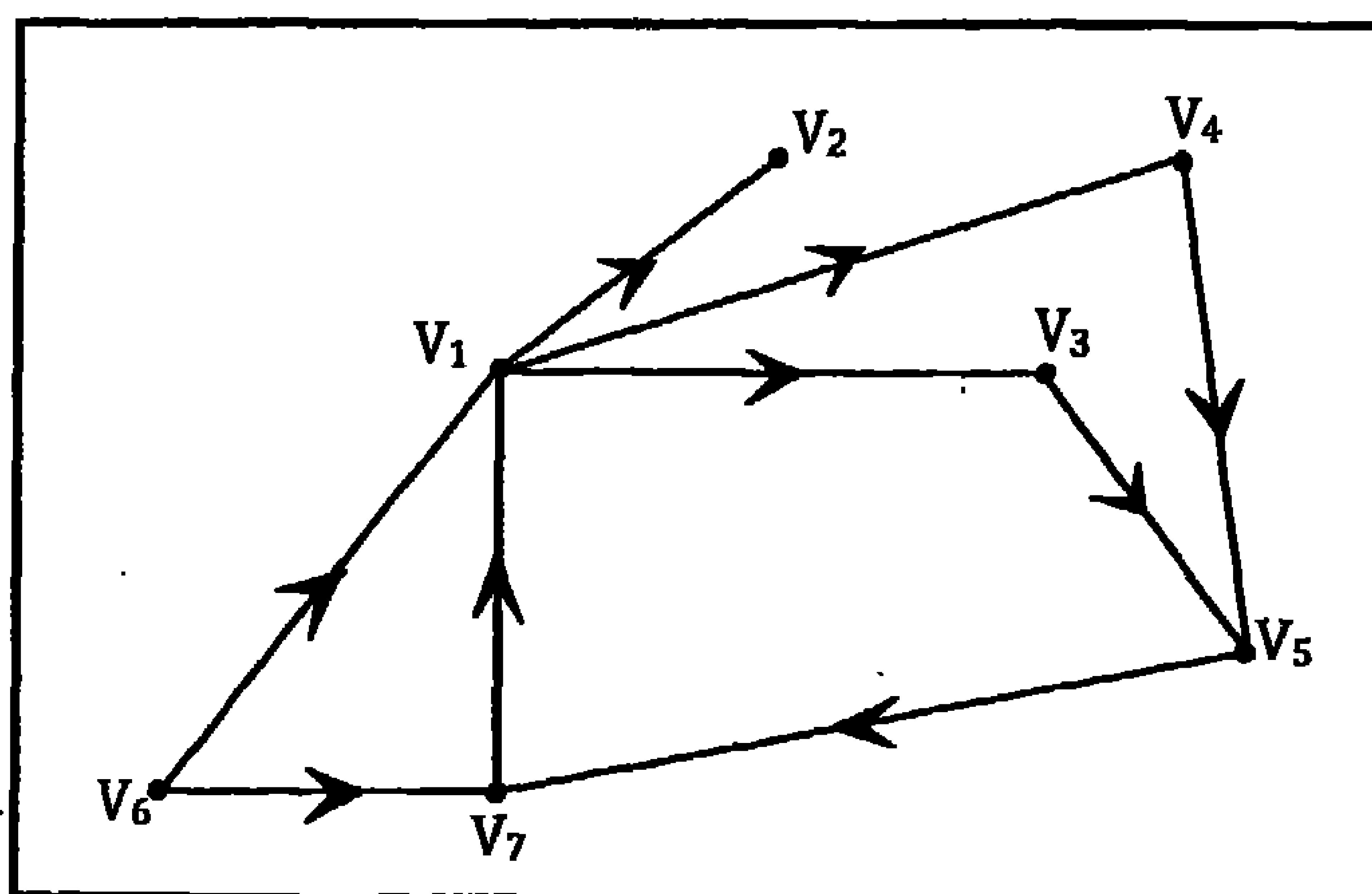
$|E| = 8$ عدد الاضلاع

$$\sum_{i=1}^{5} \deg(v_i) = 5 + 5 + 3 + 3 + 0 = 16$$

إذن:

$$\sum_{i=1}^{5} \deg(v_i) = 2|E| = 16$$

مثال: احسب درجات المخطط التالي:



الحل:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$deg^-(v_i)$	2	1	1	1	2	0	2
$deg^+(v_i)$	3	0	1	1	1	2	1
$deg(v_i)$	5	1	2	2	3	2	3

إذن:

$$\sum_{i=1}^{7} deg(v_i) = 18$$

$$\sum_{i=1}^{7} deg^-(v_i) = 9$$

$$\sum_{i=1}^{7} deg^+(v_i) = 9$$

عدد الاضلاع 9 = $|E|$

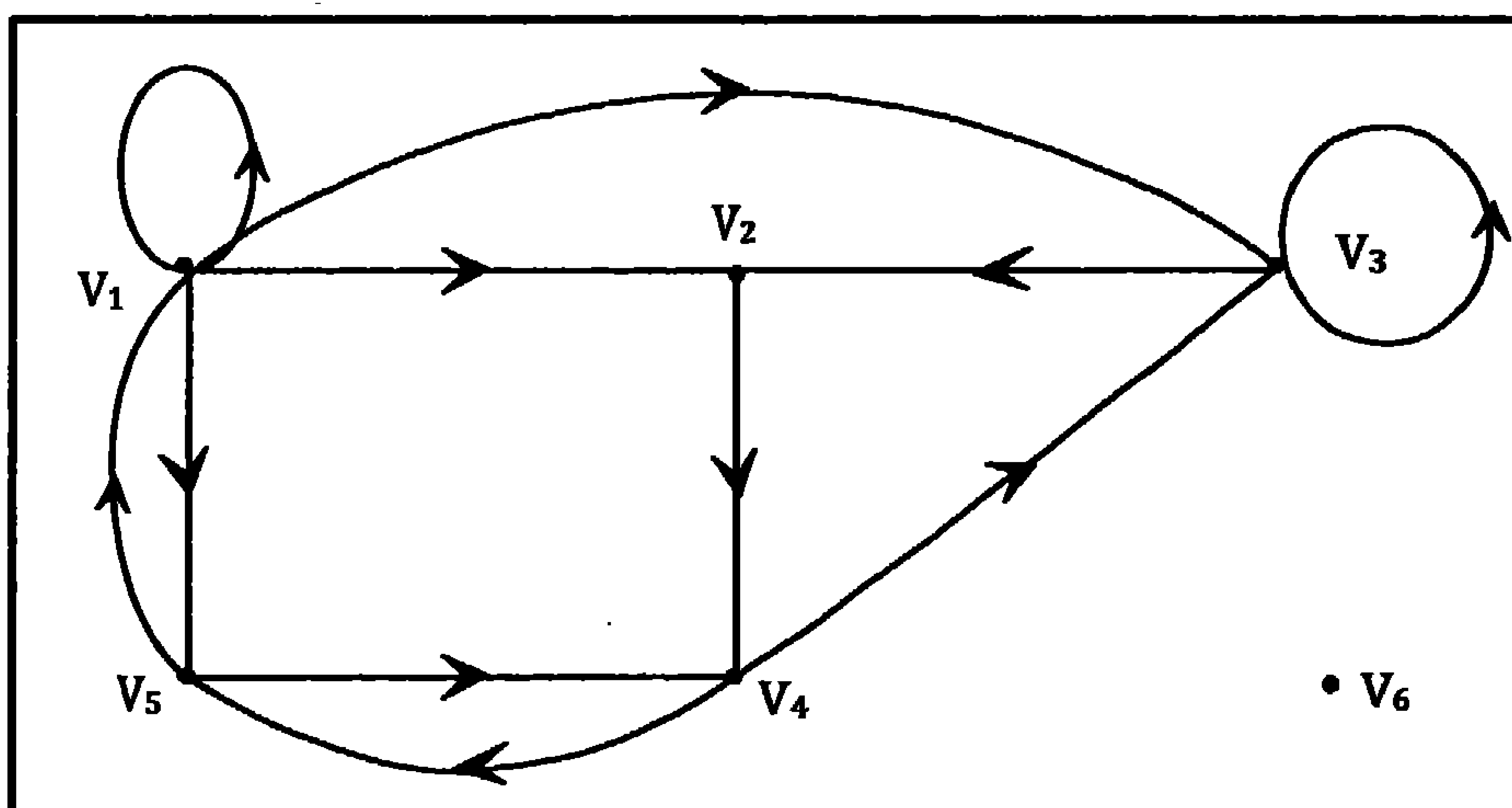
إذن:

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|E| = 18$$

و:

$$\sum_{i=1}^{7} deg^-(v_i) = \sum_{i=1}^{7} deg^+(v_i) = 9$$

مثال: إحسب درجات المخطط التالي:



الحل:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$deg^-(v_i)$	2	2	3	2	3	0
$deg^+(v_i)$	4	1	2	2	3	0
$deg(v_i)$	6	3	5	4	6	0

إذن:

$$\sum_{i=1}^{6} deg^-(v_i) = 12 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} deg^+(v_i) = 12$$

$$\sum_{i=1}^{6} deg(v_i) = 24 \quad , \quad |E| = 12$$

إذن:

$$\sum_{i=1}^{6} deg^-(v_i) = \sum_{i=1}^{6} deg^+(v_i) = 12 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} deg(v_i) = 2|E| = 24$$

مثال : في الجدول التالي للمخطط $G=(V, E)$

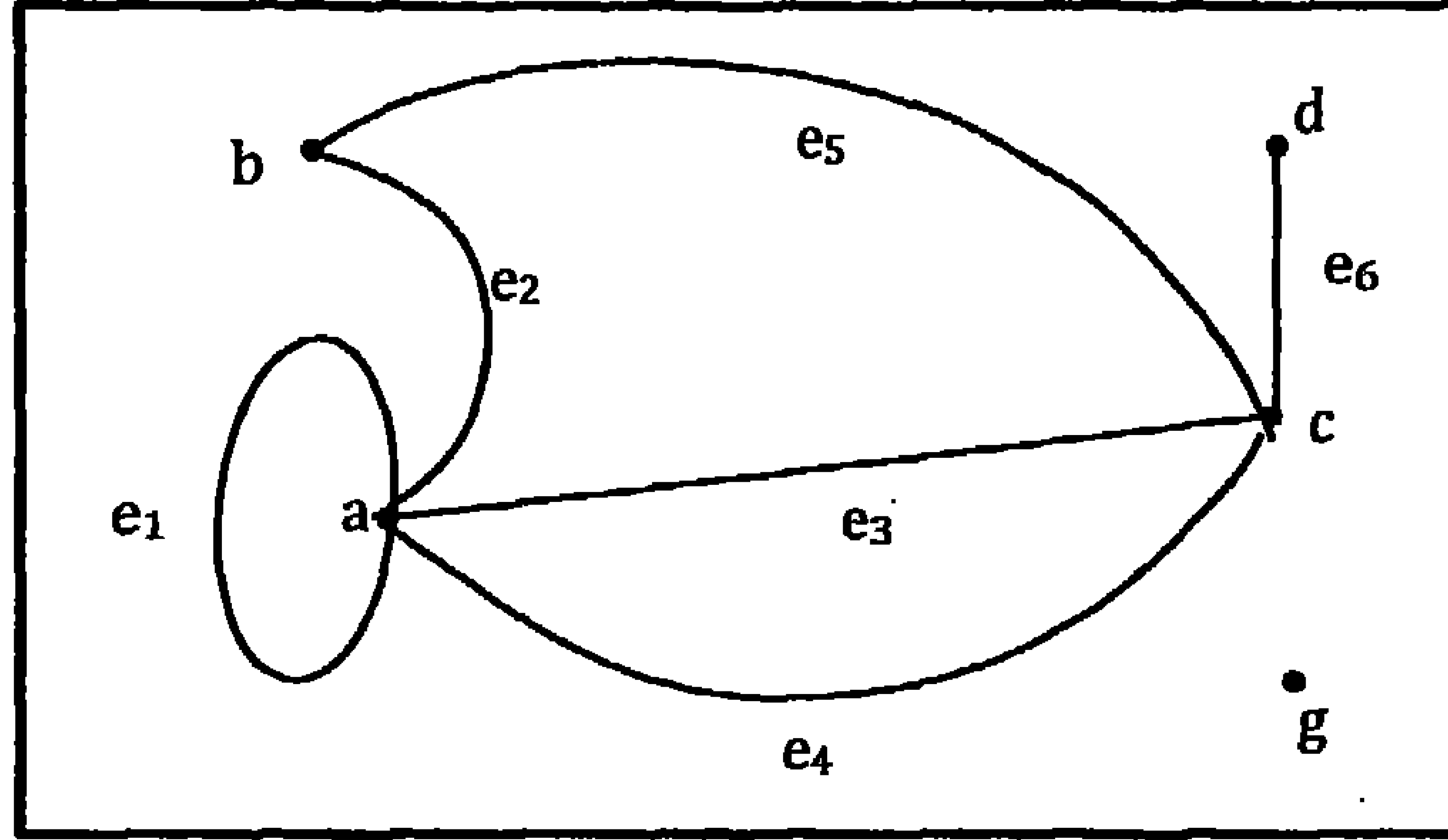
حيث : $V = \{a, b, c, d, g\}$ و $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

E	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
f(e)	[a, a]	[a, b]	[a, c]	[a, c]	[b, c]	[c, d]

1. إرسم المخطط G .
2. إحسب درجات الرؤوس.
3. عين الرؤوس الفردية والرؤوس الزوجية والرؤوس المنعزلة والرؤوس المعلقة والأضلاع المكررة و العقد وهل المخطط بسيط.

الحل:

أولاً: يمكن رسم هذا المخطط كما يلي:



ثانيا: درجات الرؤوس هي:

v	a	b	c	d	g
deg(v)	5	2	4	1	0

إذن:

$|E| = 6$ عدد الاضلاع

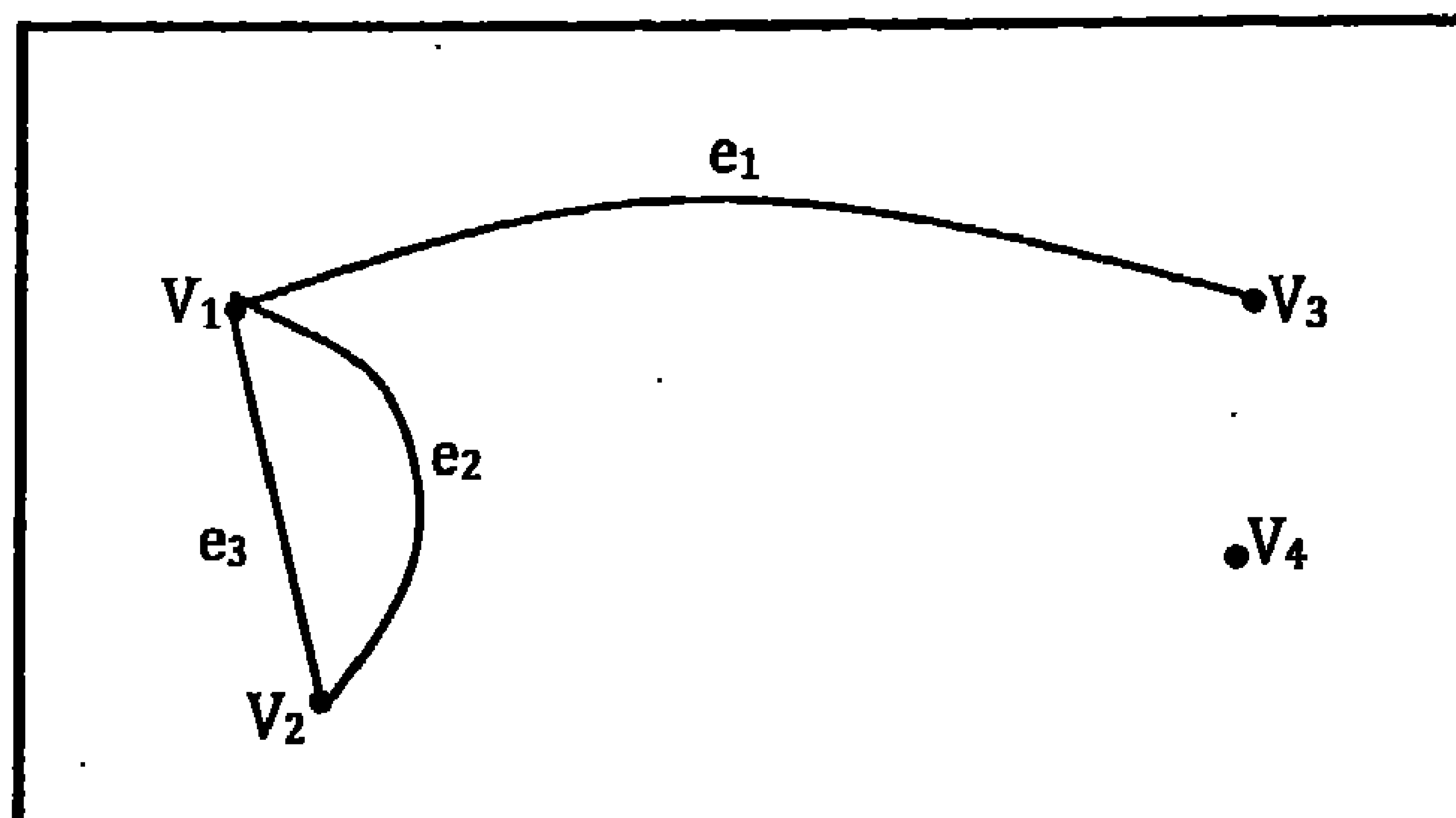
$$\sum_{i=1}^{5} \deg(v_i) = 2|E| = 12$$

ثالثاً:

1. الرؤوس a و d فردية بينما الرؤوس b و c و g زوجية.
2. الرأس g منعزله والرأس d معلقة.
3. الأضلاع e_3 و e_4 ضلعان مكرران (متوزيان) بينما الضلع e_1 عقدة.
4. المخطط G ليس مخطط بسيط لأنه يحتوي على أضلاع متكررة وعلى عقدة.

مثال: في المخطط G التالي:

1. إحسب درجات الرؤوس.
2. عين الرؤوس الفردية والرؤوس الزوجية والرؤوس المنعزلة والرؤوس المعلقة.



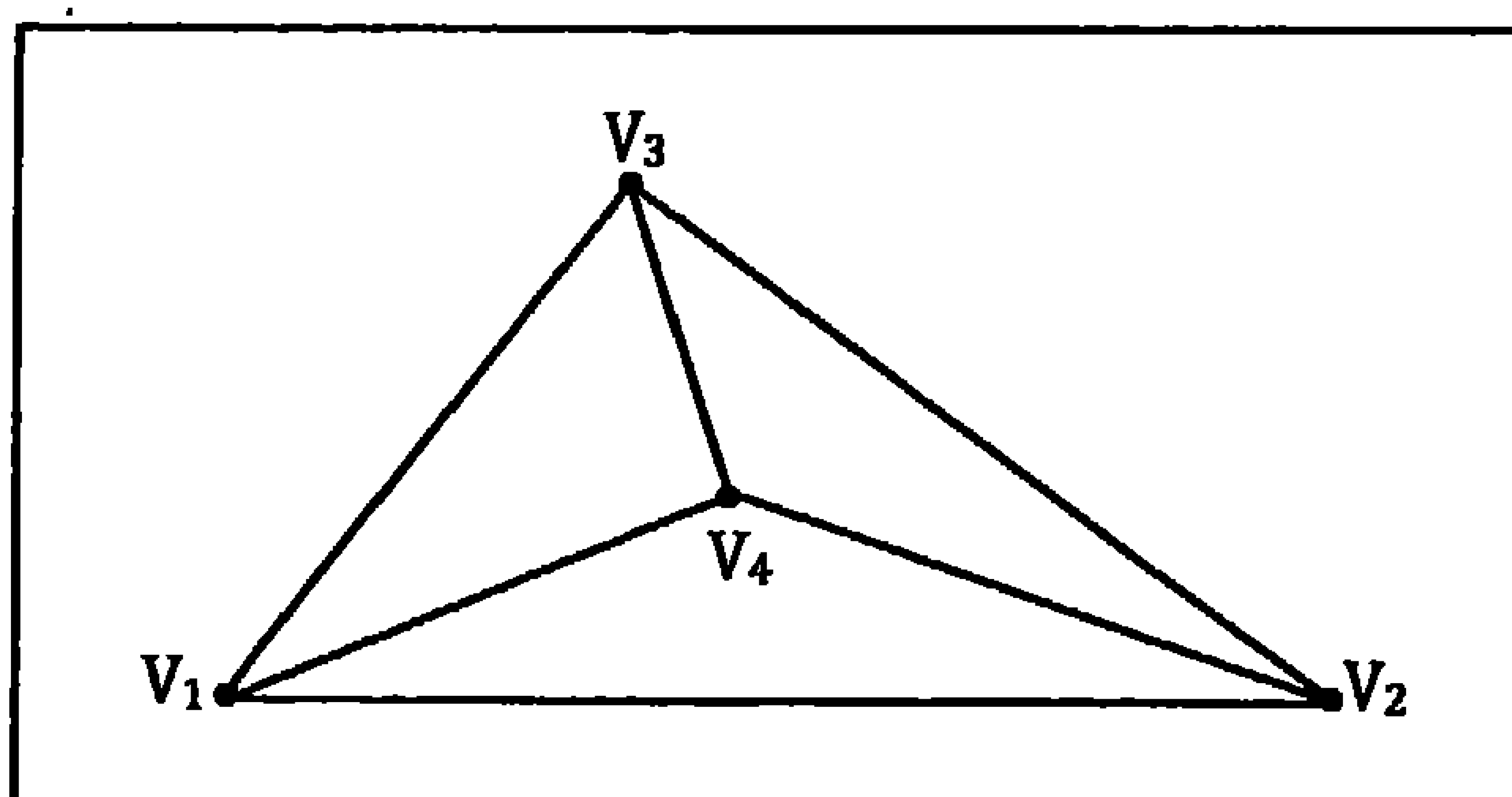
الحل:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4
$deg(v_i)$	3	2	1	0

وبالتالي:

1. الرؤوس الفردية هي V_3, V_1.
2. الرؤوس الزوجية هي V_4, V_2.
3. الرأس v_3 هي رأس معلقة.
4. الرأس v_4 هي رأس منعزلة.

مثال: احسب درجات الرؤوس للمخطط التالي ثم علق على النتائج.

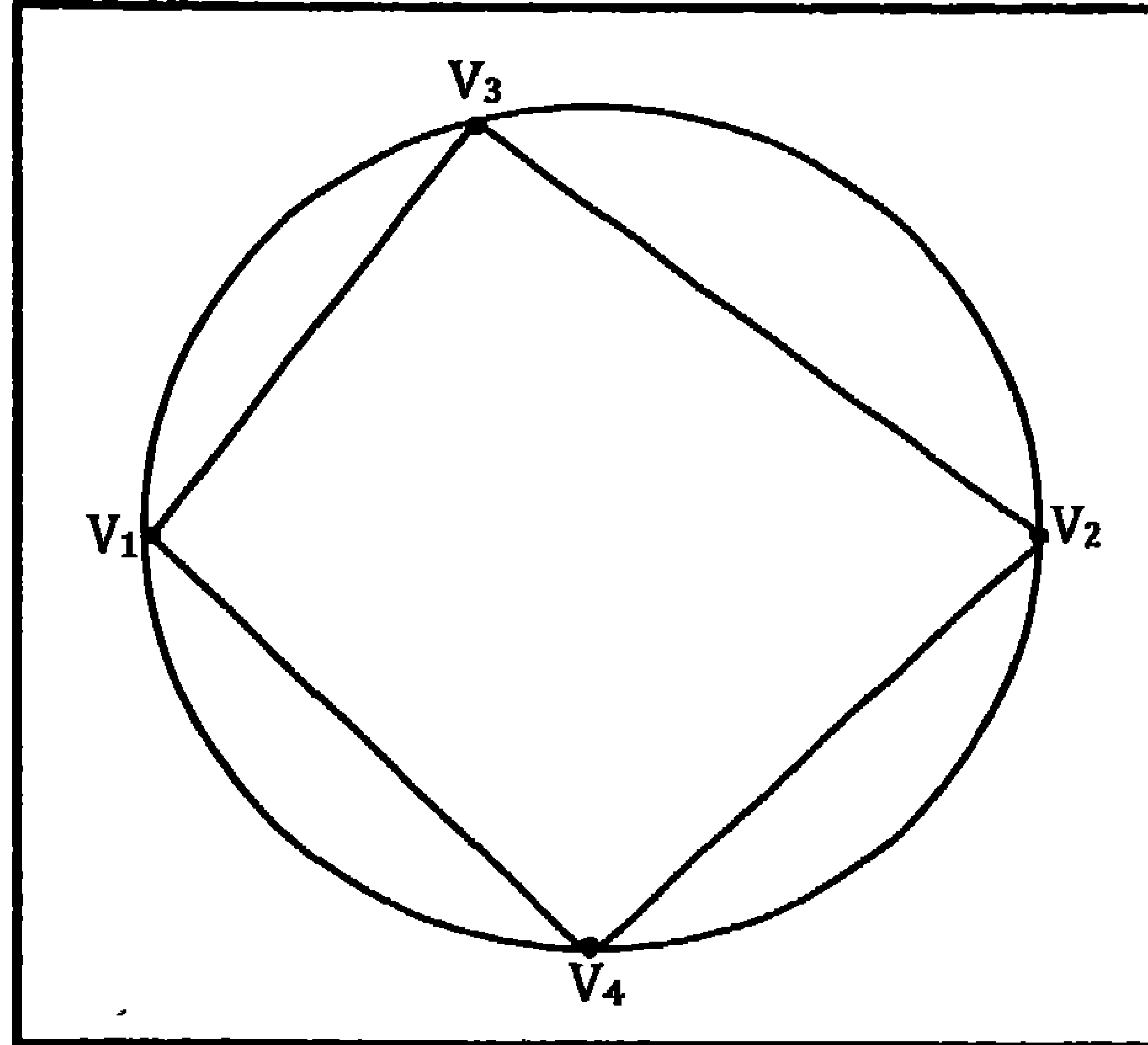


الحل:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4
$deg(v_i)$	3	3	3	3

وبالتالي فالمخطط G مخطط منتظم من الدرجة 3.

مثال: إحسب درجات الرؤوس للمخطط التالي ثم علق على النتائج.

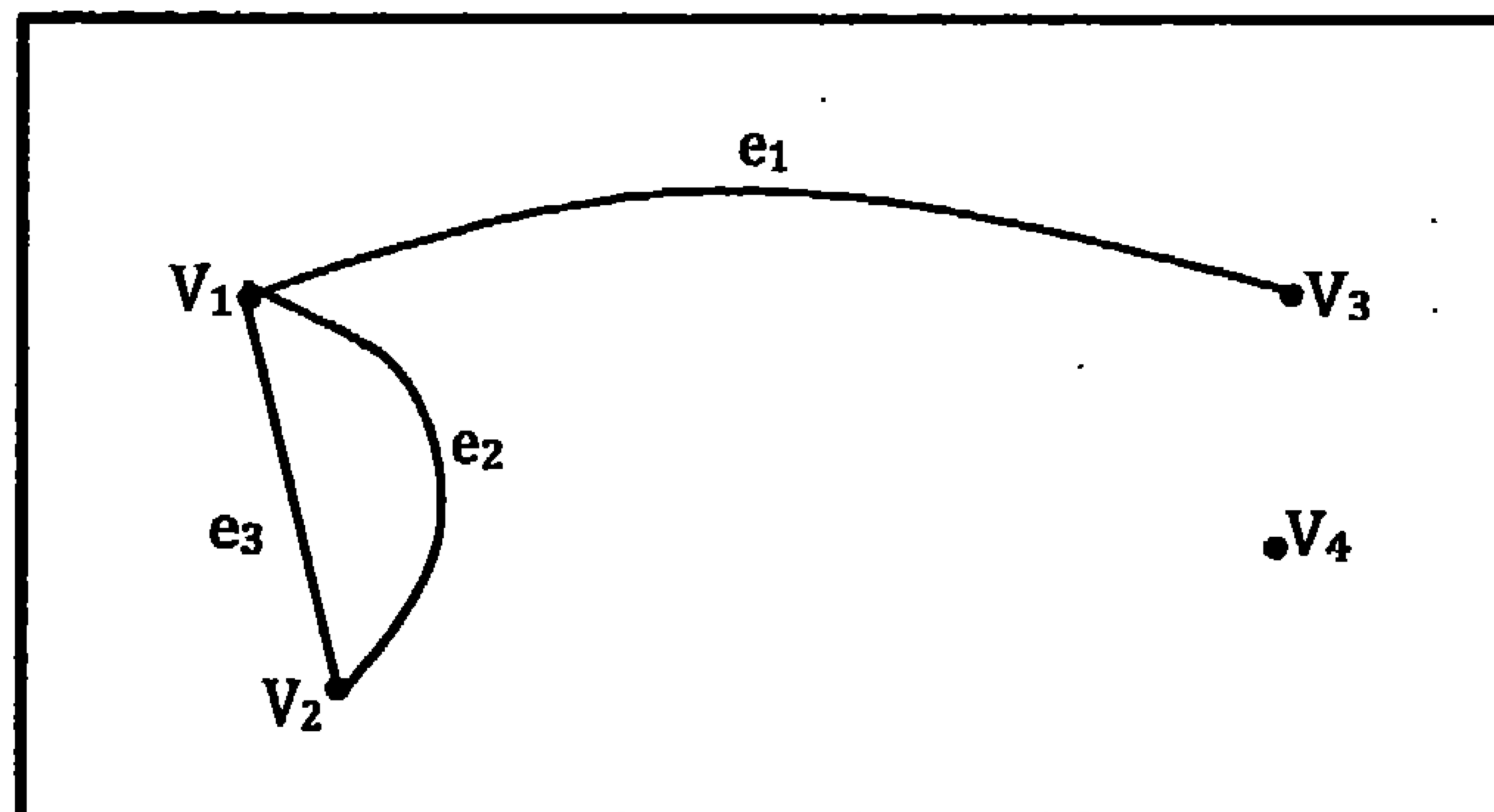


الحل:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4
$deg(v_i)$	4	4	4	4

وبالتالي فالمخطط G مخطط منتظم من الدرجة 4 .

مثال: إحسب درجات الرؤوس للمخطط التالي ثم علق على النتائج.



الحل:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4
$deg(v_i)$	3	2	1	0

وبالتالي:

أولاً: مجموع أضلاع المخطط = 3 و مجموع درجات رؤوس المخطط هو:

$$deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) + deg(v_4) = 6$$

إذن مجموع درجات رؤوس المخطط هو ضعف مجموع أضلاع المخطط.

ثانيا: الرؤس الفردية هي v_1 و v_3 وبالتالي يكون مجموع درجات الرؤوس الفردية هو:

$$deg(v_1) + deg(v_3) = 3 + 1 = 4$$

وهو عدد زوجي.

مثال: هل يوجد مخطط بحيث تكون درجات رؤوسه هي : 4 , 2 , 5 , 3 , 3 , 2 , 1

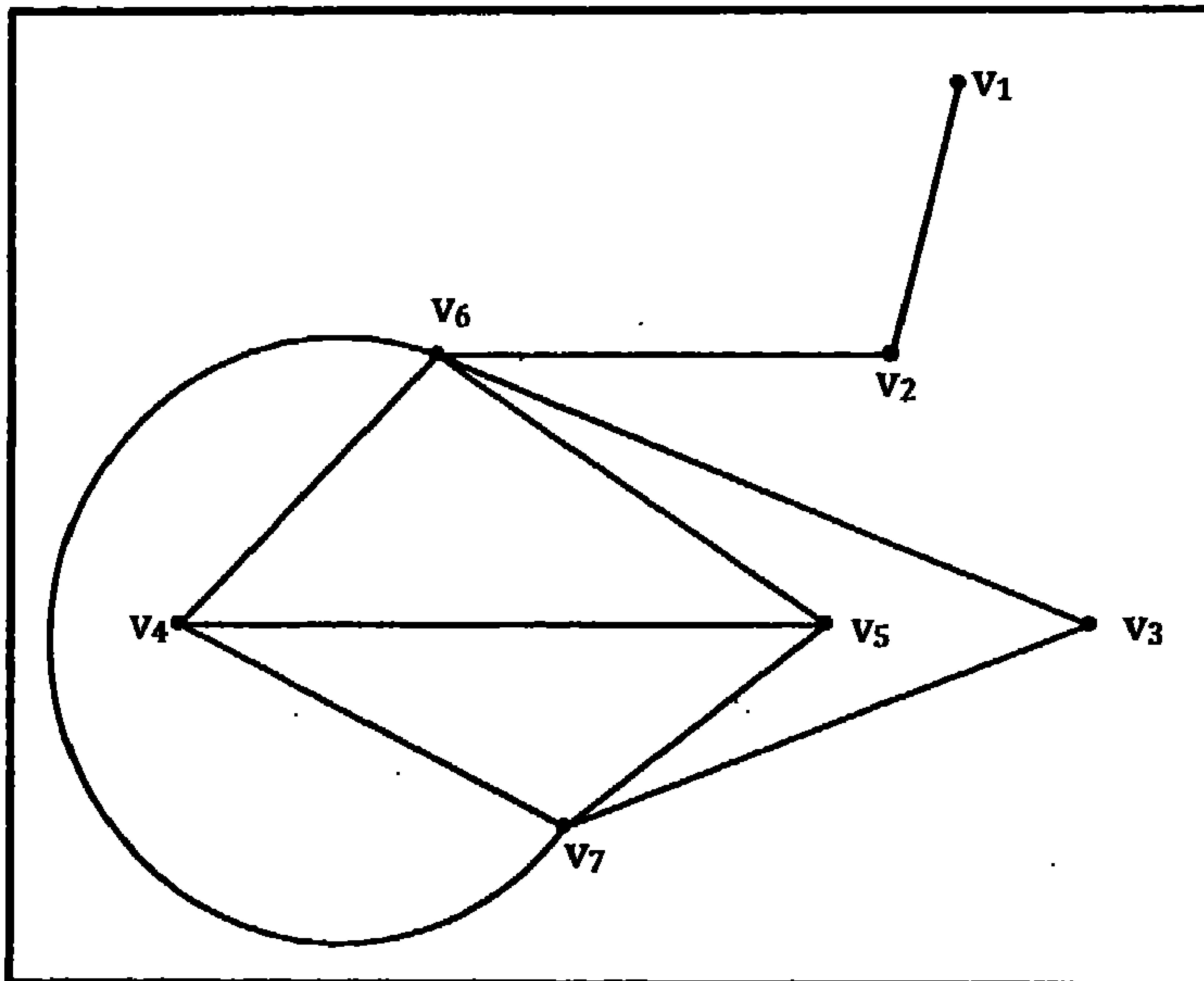
الحل:

نعم يوجد مخطط تكون درجات رؤوسه هي 4 , 2 , 5 , 3 , 3 , 2 , 1 حيث:

$$\sum_{i=1}^{7} deg(v_i) = 1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 2 + 4 = 20 = 2(10)$$

$$= 2|E| \Leftrightarrow |E| = 10$$

وبالتالي فإن عدد أضلاع هذا المخطط هو 10 وبالتالي يمكن رسم المخطط كما يلي:



حيث:

$\deg(v_1) = 1$

$\deg(v_2) = 2$

$\deg(v_3) = 2$

$\deg(v_4) = 3$

$\deg(v_5) = 3$

$\deg(v_6) = 5$

$\deg(v_7) = 4$

مثال: هل يوجد مخطط بحيث تكون درجات رؤوسه هي : 3 , 4 , 2 , 5 ,1

الحل:

لا يوجد مخطط تكون درجات رؤوسه هي 3 , 4 , 2 , 5 ,1 مجموع درجات الرؤوس تساوي 15 أي إنها ليست عدد زوجي كما أن عدد الرؤوس الفردية في أي مخطط هو عدد زوجي بينما في هذا المثال فإنها تساوي 9=3+5+ 1 وهو عدد فردي.

مثال: هل يوجد مخطط ذو خمسة رؤوس وستة أضلاع ودرجات رؤوسه هي4,3,2,2,3

الحل:

بما أن $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E|$

إذاً : 4+3+3+2+2=14

وبالتالي فإن عدد الأضلاع في هذا المخطط =7 وليس 6

إذن لا يوجد مخطط ذو خمسة رؤوس وستة أضلاع ودرجات رؤوسه هي4,3,2,2,3

مثال: هل يوجد مخطط بحيث تكون درجات رؤوسه هي :4,3,3,2,1

الحل:

لا يوجد مخطط تكون درجات رؤوسه هي 3,3,2,1 ,4 مجموع درجات الرؤوس تساوي 13 أي إنها ليست عدد زوجي كما أن عدد الرؤوس الفردية في أي مخطط هو عدد زوجي بينما في هذا المثال فإنها تساوي 7 وهو عدد فردي.

(8-2) تشاكل مخططين

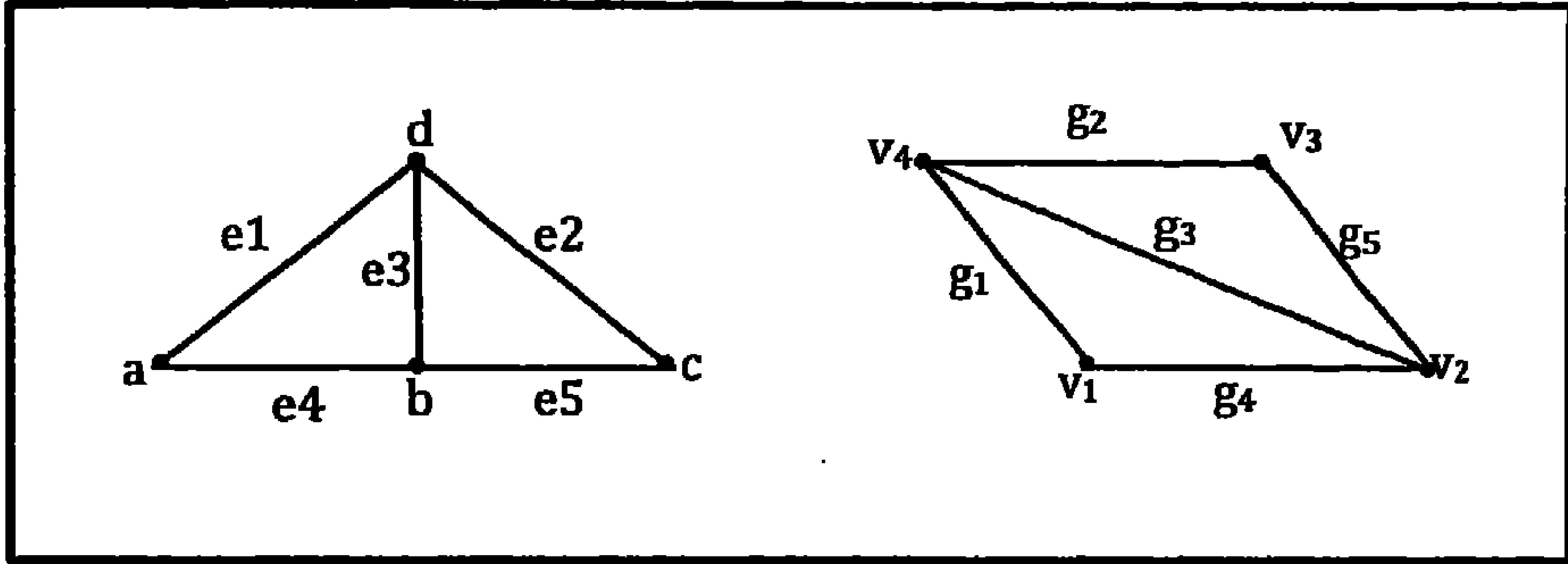
تعريف (8.2.1): نقول أن المخططين $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ متشاكلان isomorphic إذا كان:

- يوجد دالة $\sigma: V_1 \to V_2$ تكون تقابل (أحادية + شاملة).
- يوجد دالة $\tau: E_1 \to E_2$ تكون تقابل (أحادية + شاملة).
- إذا كانت الرأسان v_i, v_j يمثلان بداية ونهاية الضلع e في المخطط G_1 فإن الرأسان $\sigma(v_i), \sigma(v_j)$ يمثلان بداية ونهاية الضلع $\tau(e)$ في المخطط G_2.

ملاحظات:

1. إذا كان المخططان $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ متشاكلان فإنه لا يوجد أي فرق ما بين المخططين إلا في تسمية الرؤوس والأضلاع فقط حتى ولو كان رسم المخططين بشكل مختلف لكن المخططين يجب أن يكونا:
   أ. لهما نفس عدد الرؤوس .
   ب. لهما نفس عدد الأضلاع .
   ج. ثم الرؤوس المتناظرة تكون لها نفس الدرجة.
2. في بعض الأحيان يكون من الصعب التحقق من كون المخططين مشاكلان ويكون من الأسهل التحقق من الشروط الثلاث (أ+ب+ت) للمخططين المتشاكلين فإذا لم يتحقق أي من الشروط الثلاث (أ) أو (ب) أو (ت) فإن المخططين يكونا غير متشاكلين.
3. علاقة التشاكل بين المخططات هي علاقة تكافؤ وذلك لأن:
   أ. علاقة التشاكل بين المخططات هي علاقة إنعكاسية وذلك لأن كل مخطط متشاكل مع نفسه
   ب. علاقة التشاكل بين المخططات هي علاقة متناظرة وذلك لأن إذا كان المخطط G_1 يشاكل المخطط G_2 فإن المخطط G_2 يشاكل المخطط G_1.
   ج. علاقة التشاكل بين المخططات هي علاقة متعدية وذلك لأن إذا كان المخطط G_1 يشاكل المخطط G_2 و كان المخطط G_2 يشاكل المخطط G_3 فإن المخطط G_1 يشاكل المخطط G_3.

مثال: المخططين التاليين متشاكلين:



أولاً: التناظر بين الرؤوس:

$a \leftrightarrow v_1$، $b \leftrightarrow v_2$، $c \leftrightarrow v_3$، $d \leftrightarrow v_4$

ثانياً: التناظر بين الرؤوس:

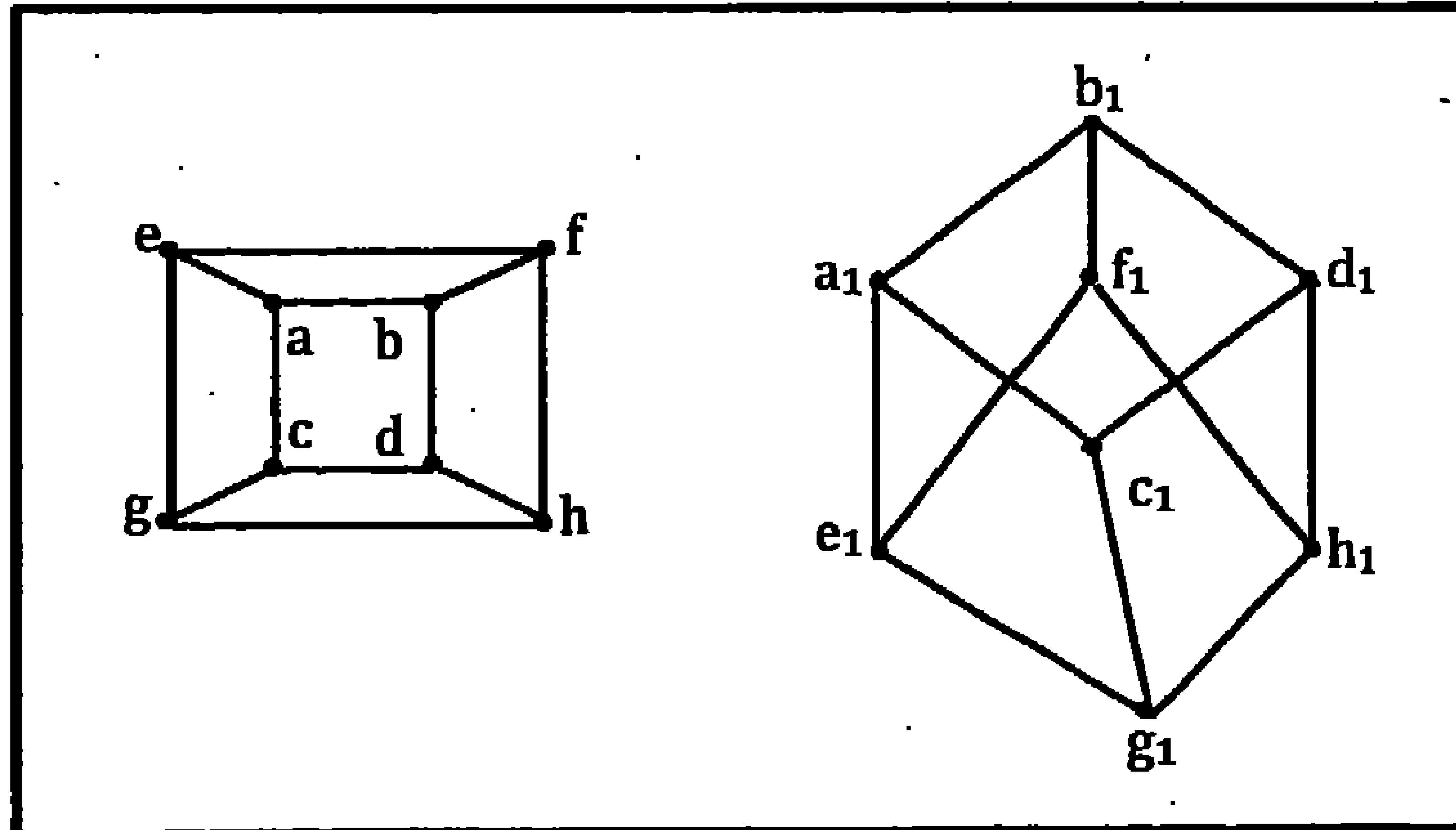
$e_1 \leftrightarrow g_1$، $e_4 \leftrightarrow g_4$، $e_5 \leftrightarrow g_5$، $e_2 \leftrightarrow g_2$، $e_3 \leftrightarrow g_3$

ثالثاً: الرؤوس المتناظرة تكون لها نفس الدرجة:

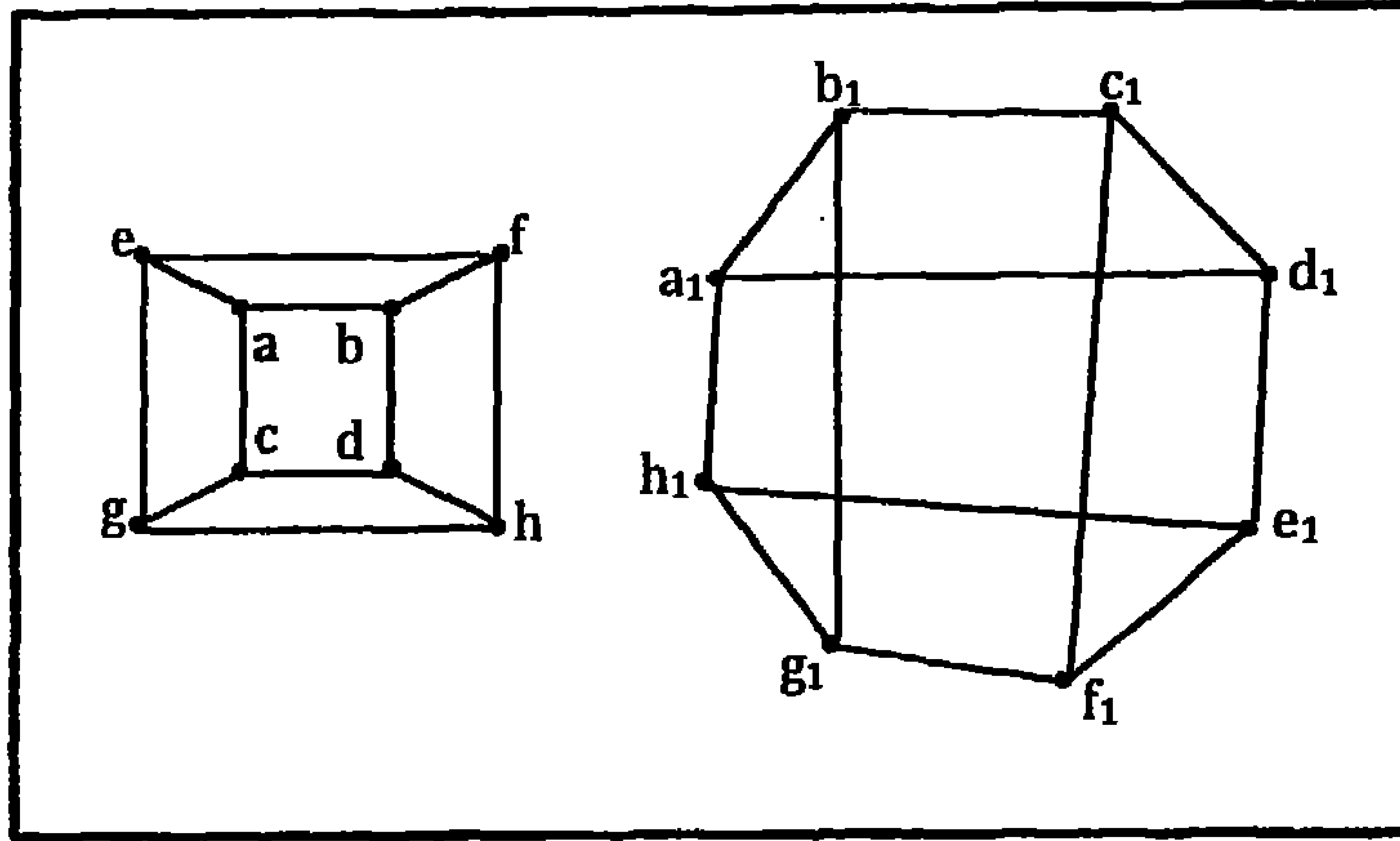
$\deg(a) = \deg(v_1) = 2$, $\deg(b) = \deg(v_2) = 3$,

$\deg(c) = \deg(v_3) = 2$, $\deg(c) = \deg(v_4) = 3$

مثال: المخططين التاليين متشاكلين:

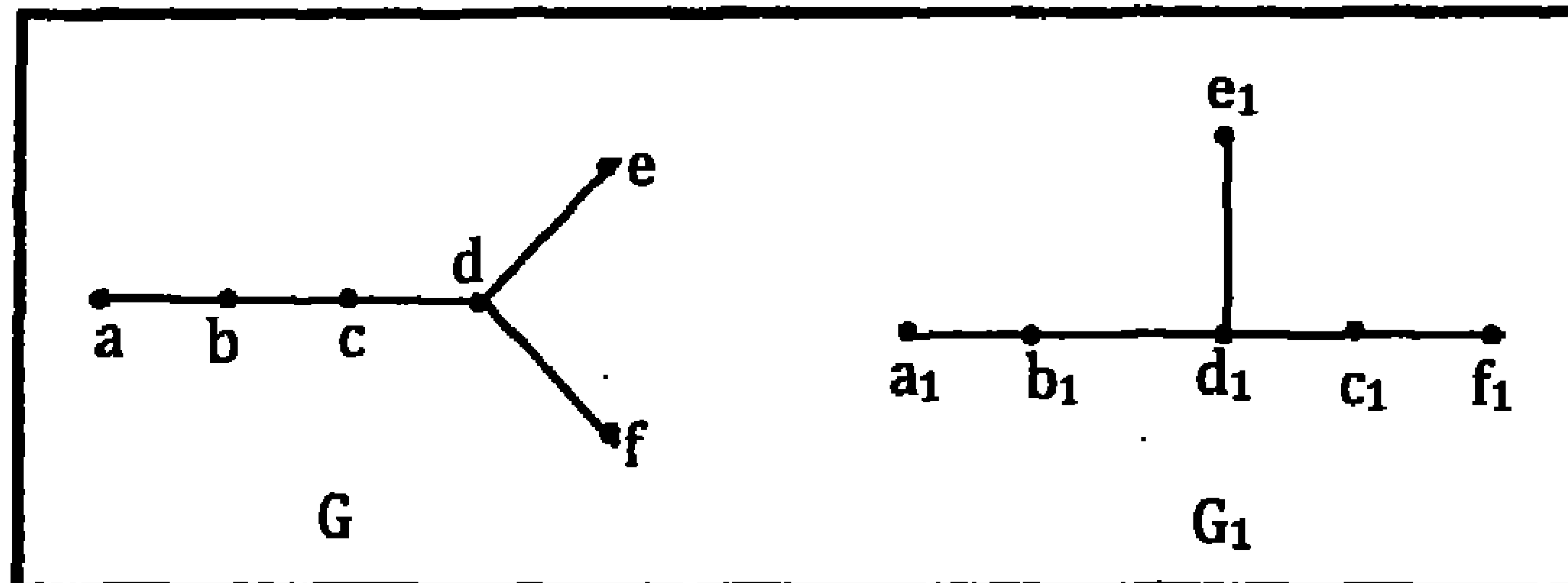


مثال: المخططين التاليين متشاكلين:



ملاحظة: من المثالين السابقين نجد أن الأشكال الثلاث السابقة متشاكلة.

مثال: المخططين التاليين غير متشاكلين:



الرأس d في المخطط الأول G مرتبط برأسين معلقتين e و f بينما الرأس المناظر d_1 في المخطط الثاني G_1 مرتبط برأس معلق واحد e_1 وبالتالي فالمخططين غير متشاكلين.

(8-3) العمليات على المخططات

في هذا الجزء سوف ندرس أهم الخواص التي تشابهة تلك الخواص المعروفة على المجموعات:

(8-3-1) الإحتواء Containment

نقول على المخطط $G1 = (V1, E1)$ إنه مخطط جزئي من المخطط $G = (V, E)$ ونرمز له بالرمز $G1 \subseteq G$ إذا كان:

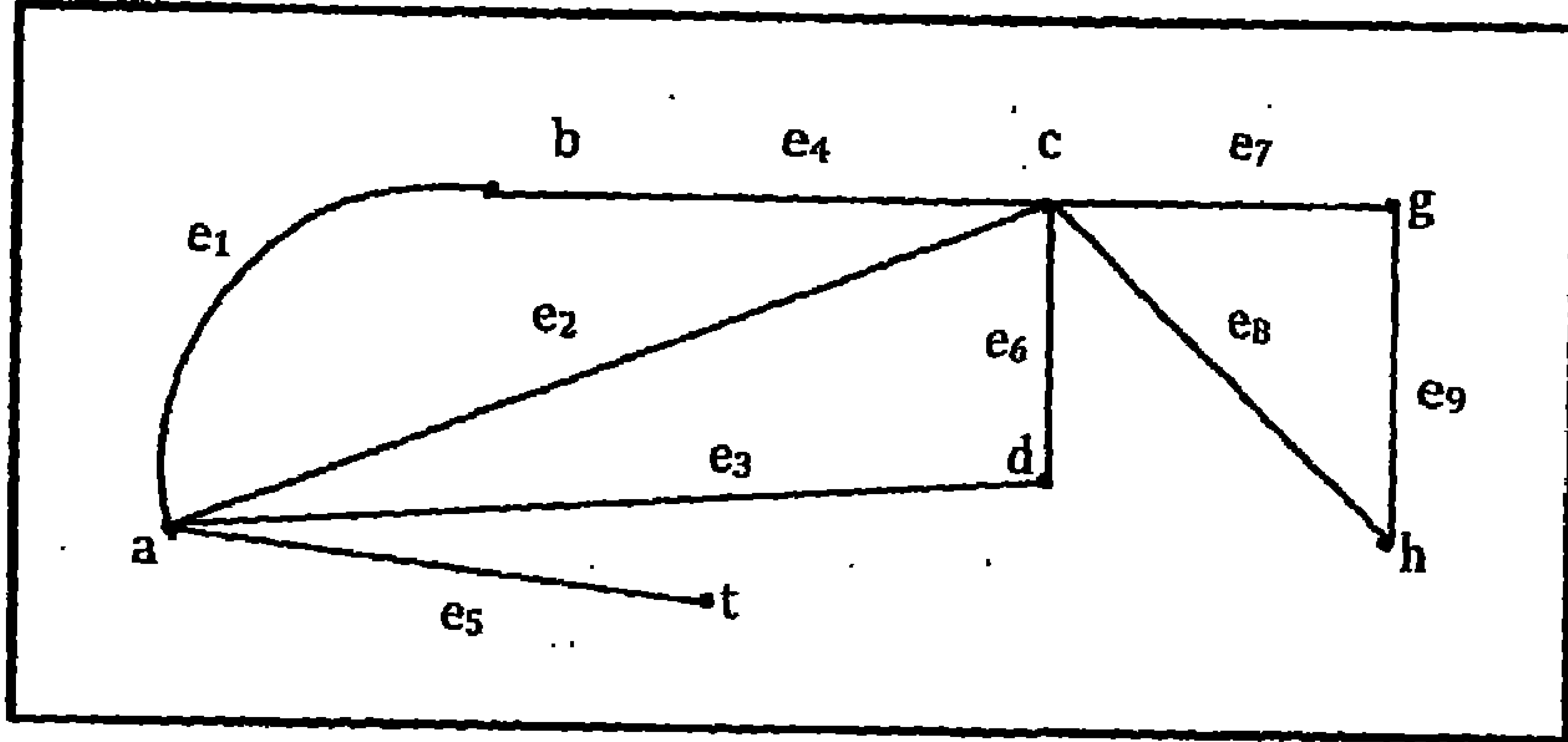
1. $V1 \subseteq V$

2. $E1 \subseteq E$

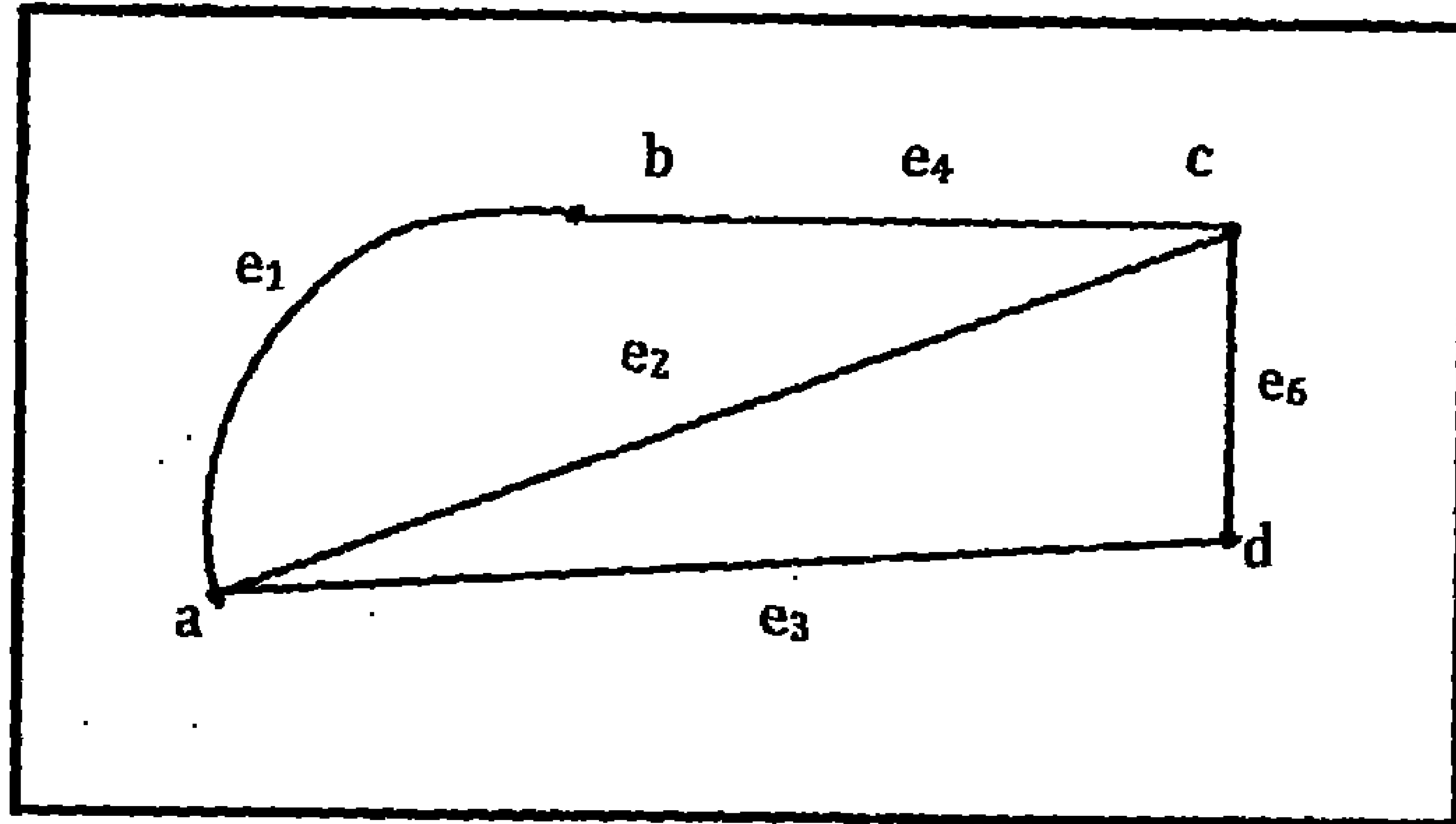
3. كل ضلع في G1 يطابق ضلع في G بحيث يكون لهما نفس نقطتي البداية والنهاية في كـلا المخططين G1 و G .

مثال:

أولاً: المخطط G المعرف كما يلي:



ثانيا: المخطط G1 المعرف كما يلي:

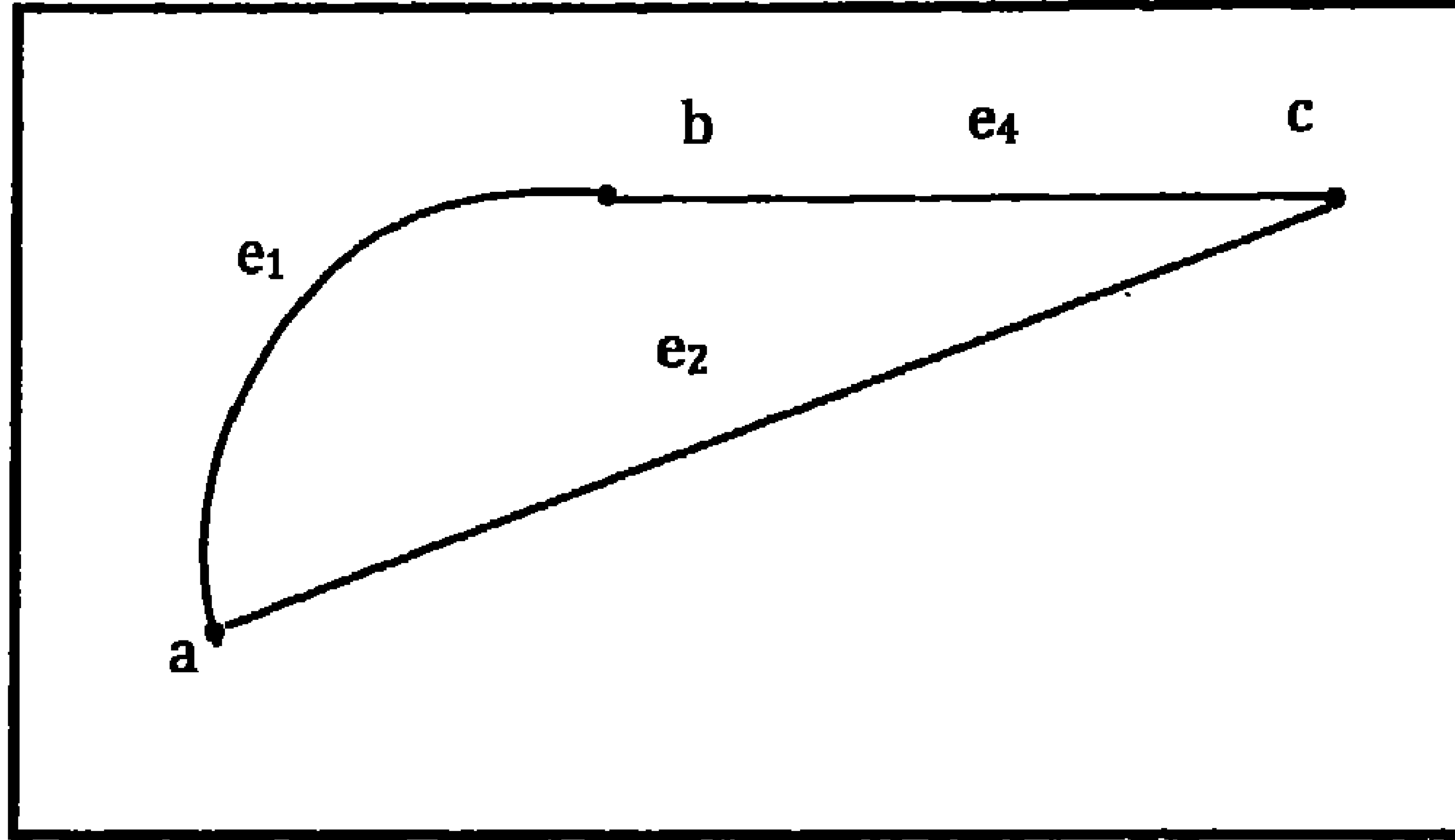


من الواضح أن:

1. كل رؤوس المخطط G1 هي جزء من رؤوس المخطط G .
2. كل أضلاع المخطط G1 هي جزء من أضلاع المخطط G .
3. كل ضلع في المخطط G1 له نفس نقاط البداية والنهاية في المخطط G .

وبالتالي $G1 \subseteq G$

ثالثاً: المخطط G2 المعرف كما يلي:



من الواضح أن:

1. كل رؤوس المخطط G2 هي جزء من رؤوس المخطط G1 .
2. كل أضلاع المخطط G2 هي جزء من أضلاع المخطط G1 .
3. كل ضلع في المخطط G2 له نفس نقاط البداية والنهاية في المخطط G1 .
4. وبالتالي $G2 \subseteq G1 \subseteq G$

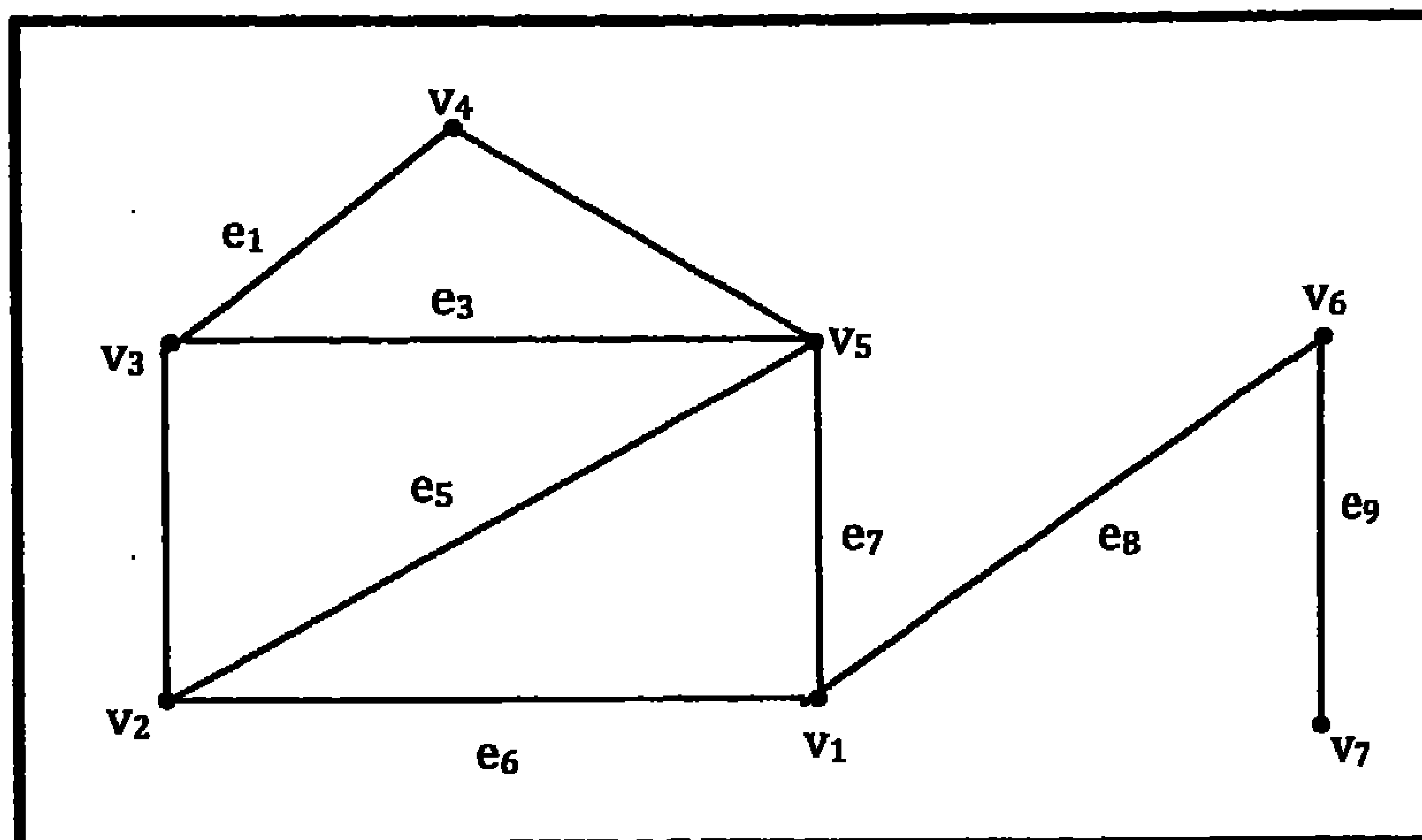
(8-3-2) التقاطع Intersection

نقول على المخطط $G3 = (V3, E3)$ إنه مخطط تقاطع المخططين $G1 = (V1, E1)$ و $G2 = (V2, E2)$ ونرمز له بالرمز $G1 \cap G2$ إذا كان:

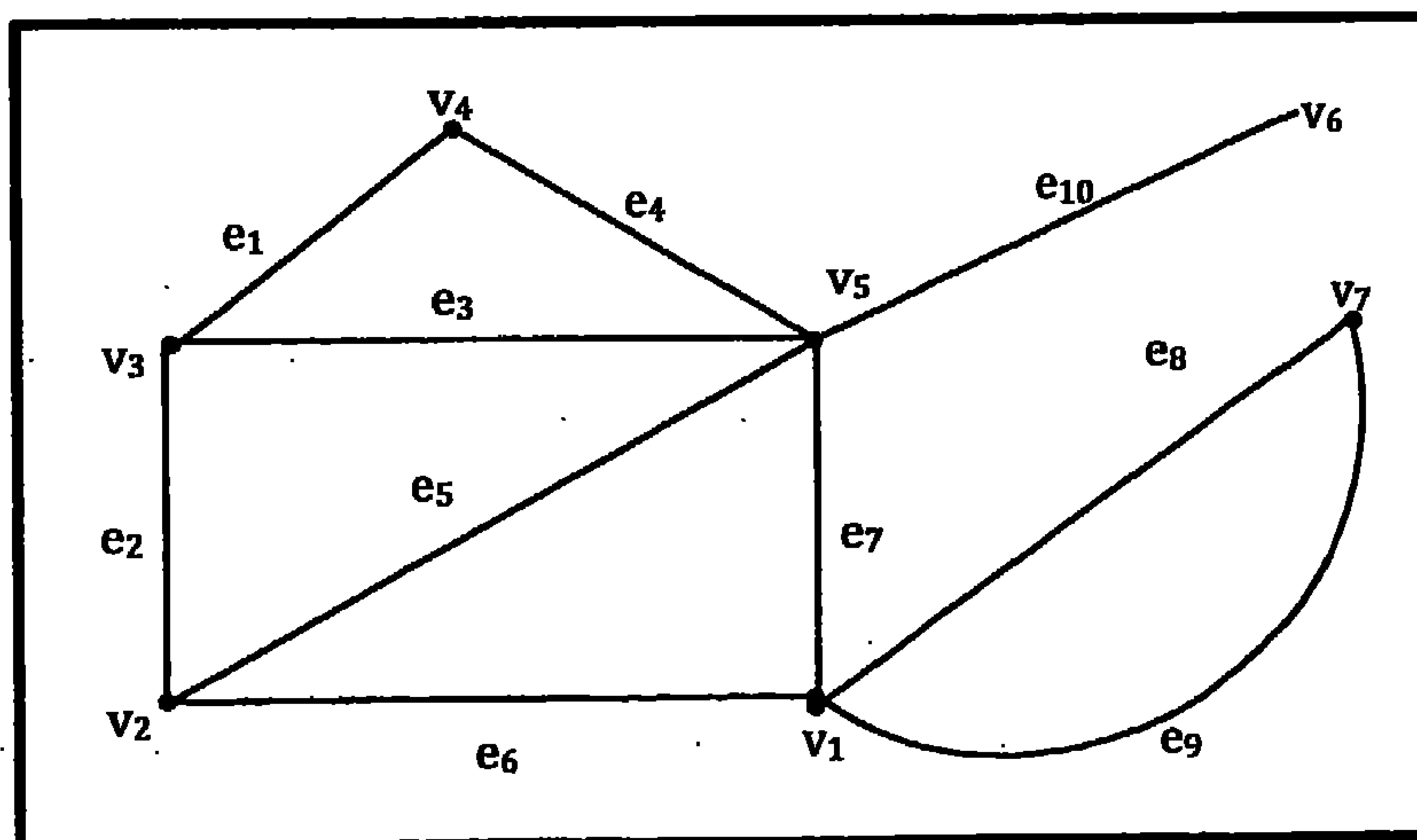
1. $V3 = V1 \cap V2$
2. $E3 = E1 \cap E2$
3. كل ضلع في G3 يطابق ضلع موجود في كلا المخططين G1 و G2 بحيث يكون لهما نفس نقطتي البداية والنهاية في كلا من المخططات G1 و G2 و G3 .

مثال:

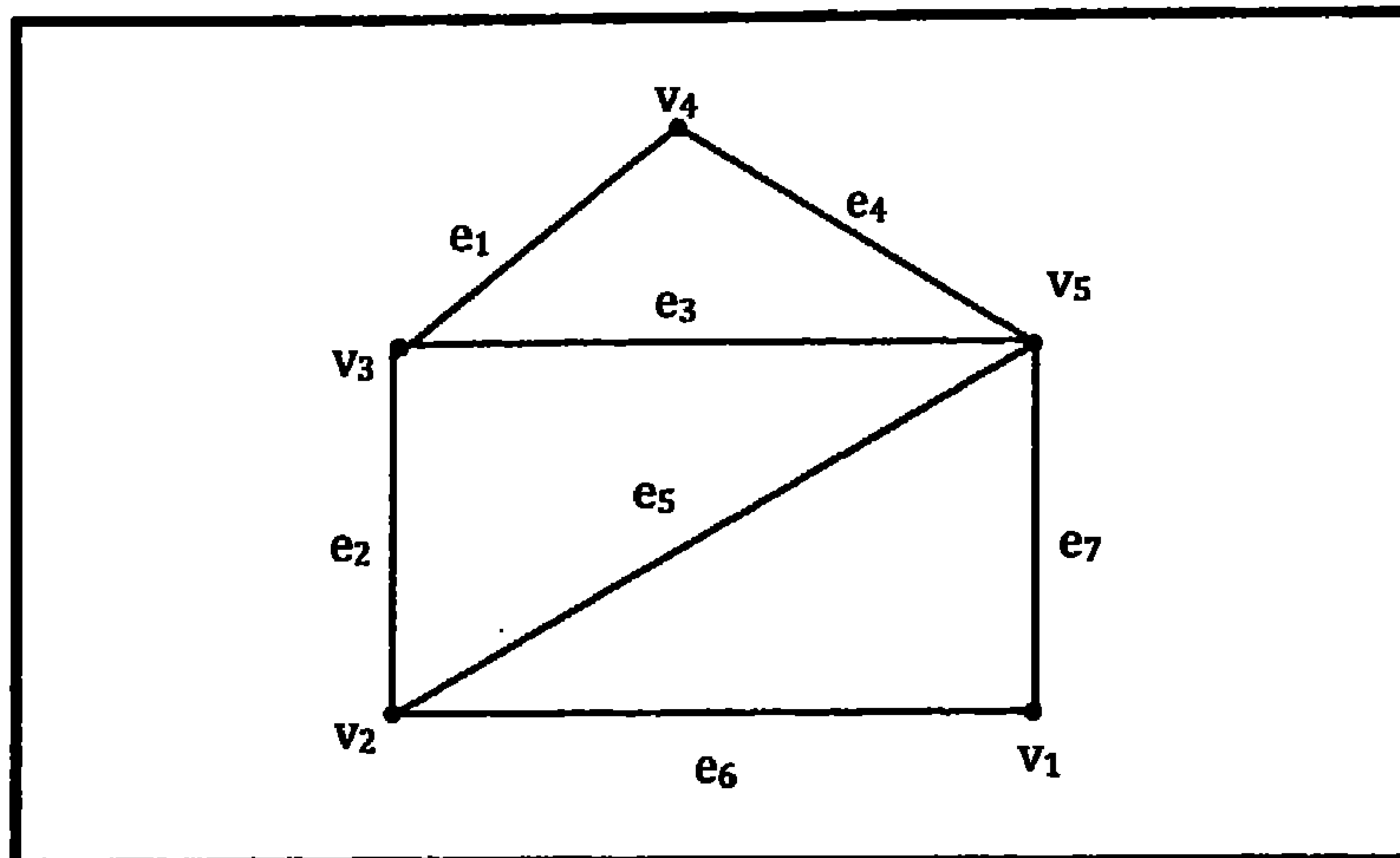
أولا: المخطط G1 المعرف بالرسم:



ثانيا: المخطط G2 المعرف بالرسم:



ثالثا: المخطط $G3 = G1 \cap G2$ المعرف بالرسم:



ومن الواضح أن المخطط $G3 = G1 \cap G2$ يحقق :

1. $V3 = V1 \cap V2$
2. $E3 = E1 \cap E2$
3. كل ضلع في G3 يطابق ضلع موجود في كلا المخططين G1 و G2 بحيث يكون لهما نفس نقطتي البداية والنهاية في كلا من المخططات G1 و G2 و G3 .

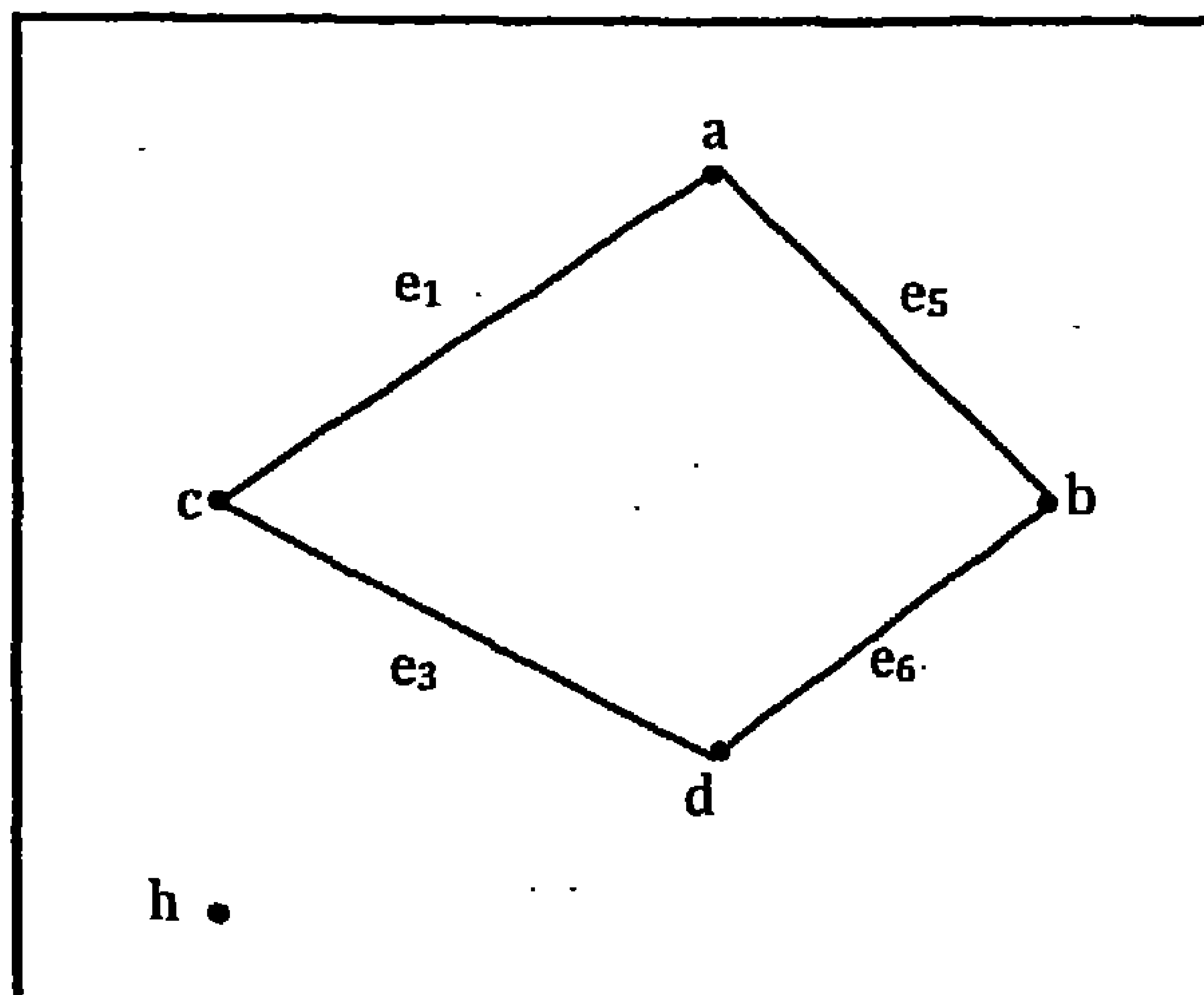
(8-3-3) الإتحاد Union

نقول على المخطط $G3 = (V3, E3)$ إنه مخطط إتحاد المخططين $G1 = (V1, E1)$ و $G2 = (V2, E2)$ ونرمز له بالرمز $G1 \cup G2$ إذا كان:

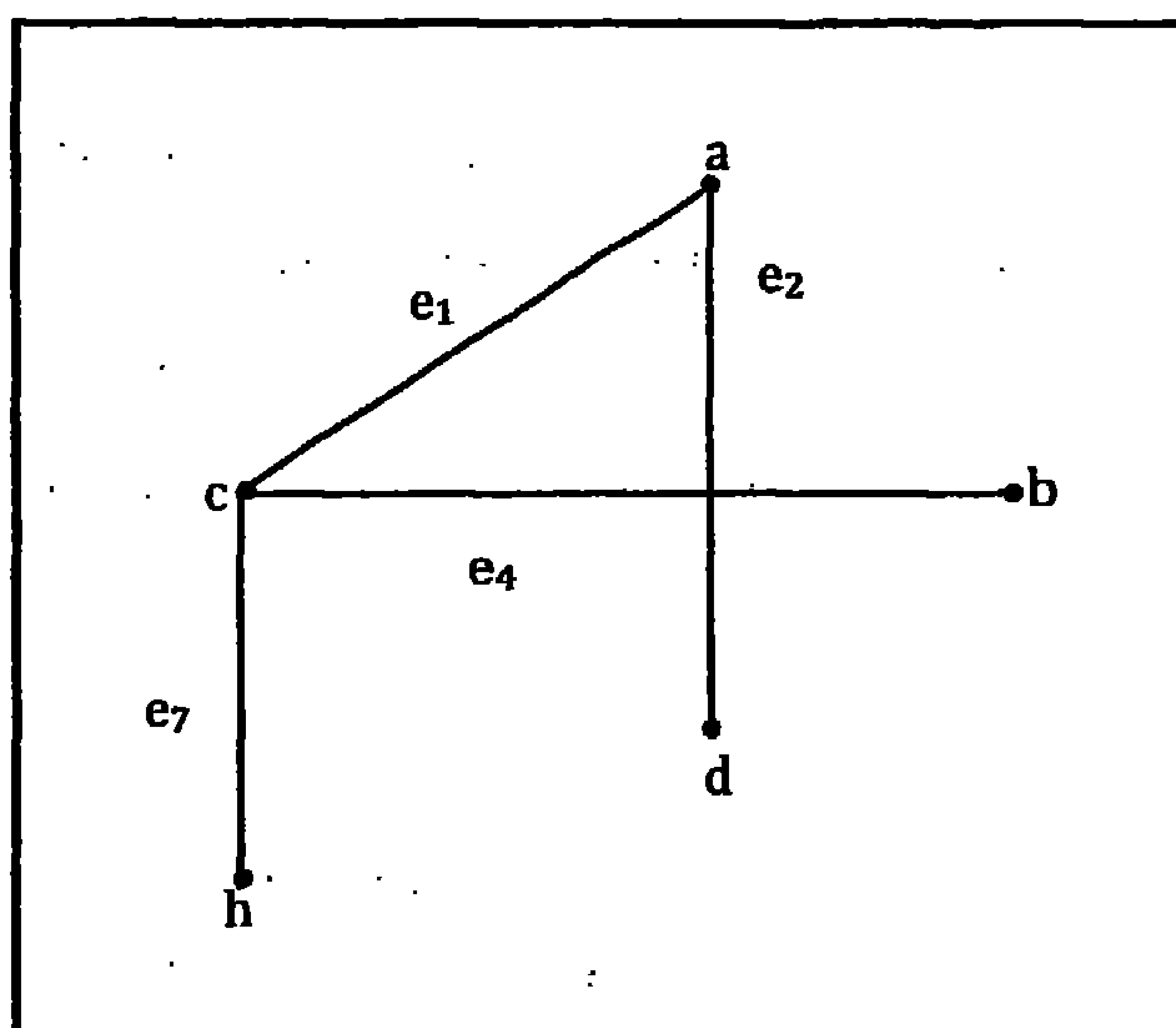
1. $V3 = V1 \cup V2$
2. $E3 = E1 \cup E2$
3. كل ضلع موجود في كلا المخططين G1 و G2 يطابق ضلع موجود في G3 بحيث يكون لهما نفس نقطتي البداية والنهاية في كلا من المخططات G1 و G2 و G3 .

مثال:

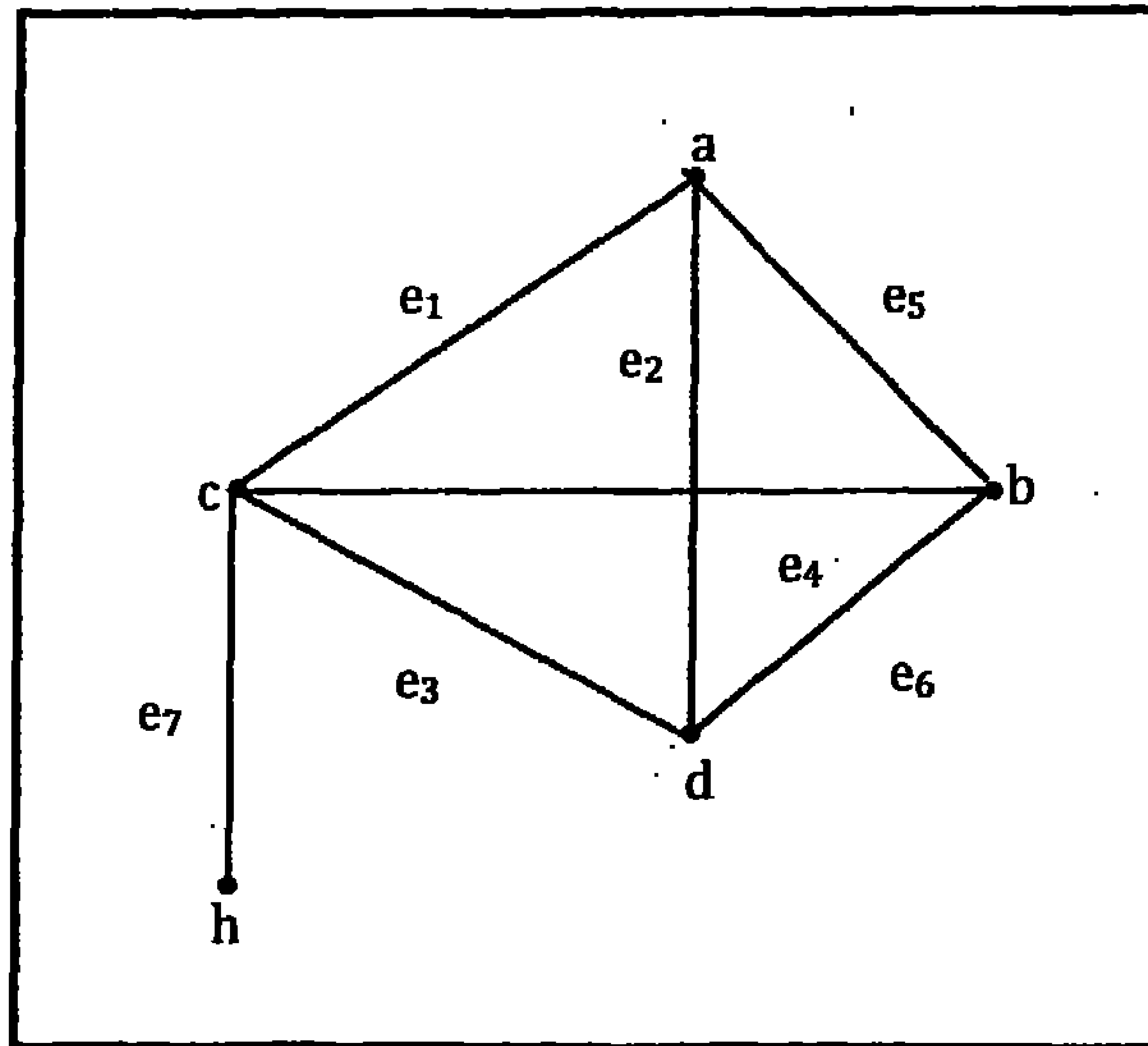
أولا: المخطط G1 المعرف بالرسم:



ثانيا: المخطط G2 المعرف بالرسم:



ثالثا: المخطط $G3 = G1 \cup G2$ المعرف بالرسم:



ومن الواضح أن $G3 = G1 \cup G2$ تحقق:

1. $V3 = V1 \cup V2$
2. $E3 = E1 \cup E2$

كل ضلع موجود في كلا المخططين G1 و G2 يطابق ضلع موجود في G3 بحيث يكون لهما نفس نقطتي البداية والنهاية في كلا من المخططات G1 و G2 و G3 .

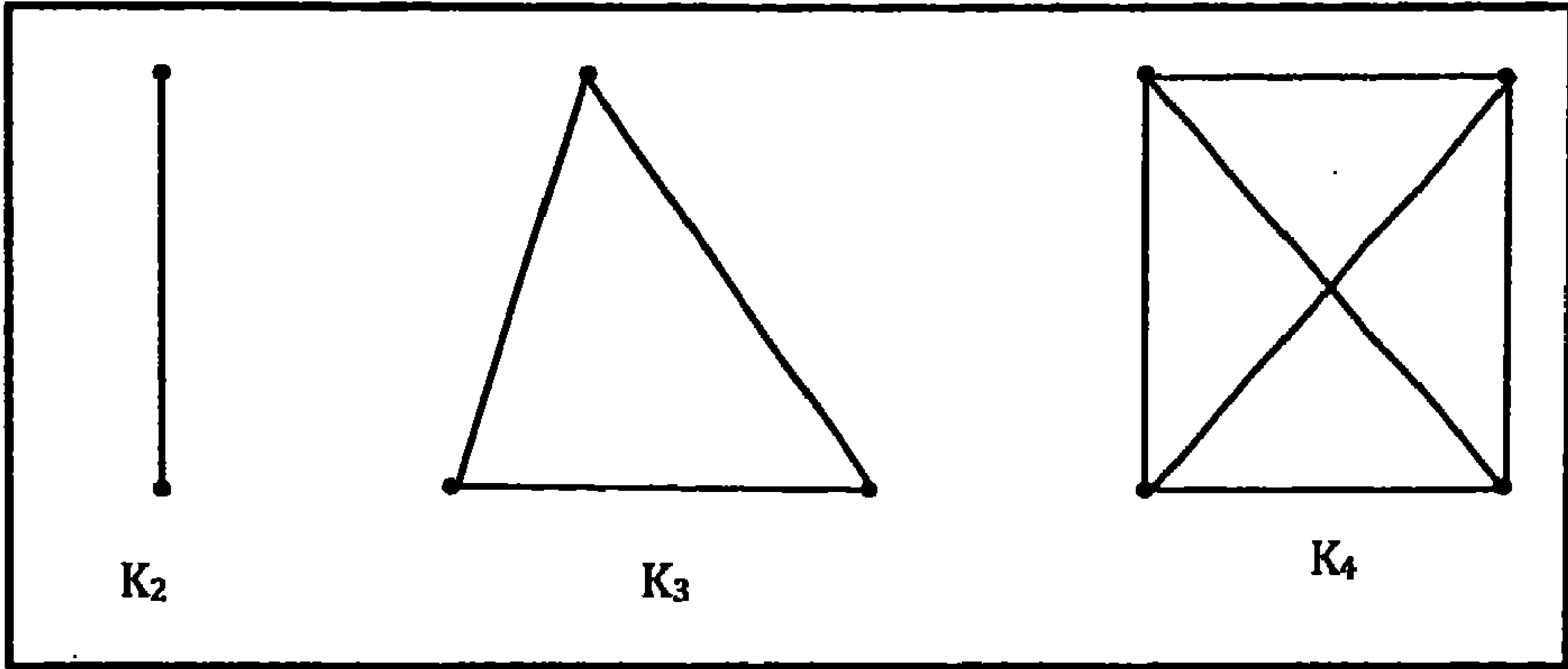
(8-3-4) المخطط التام Complete graph

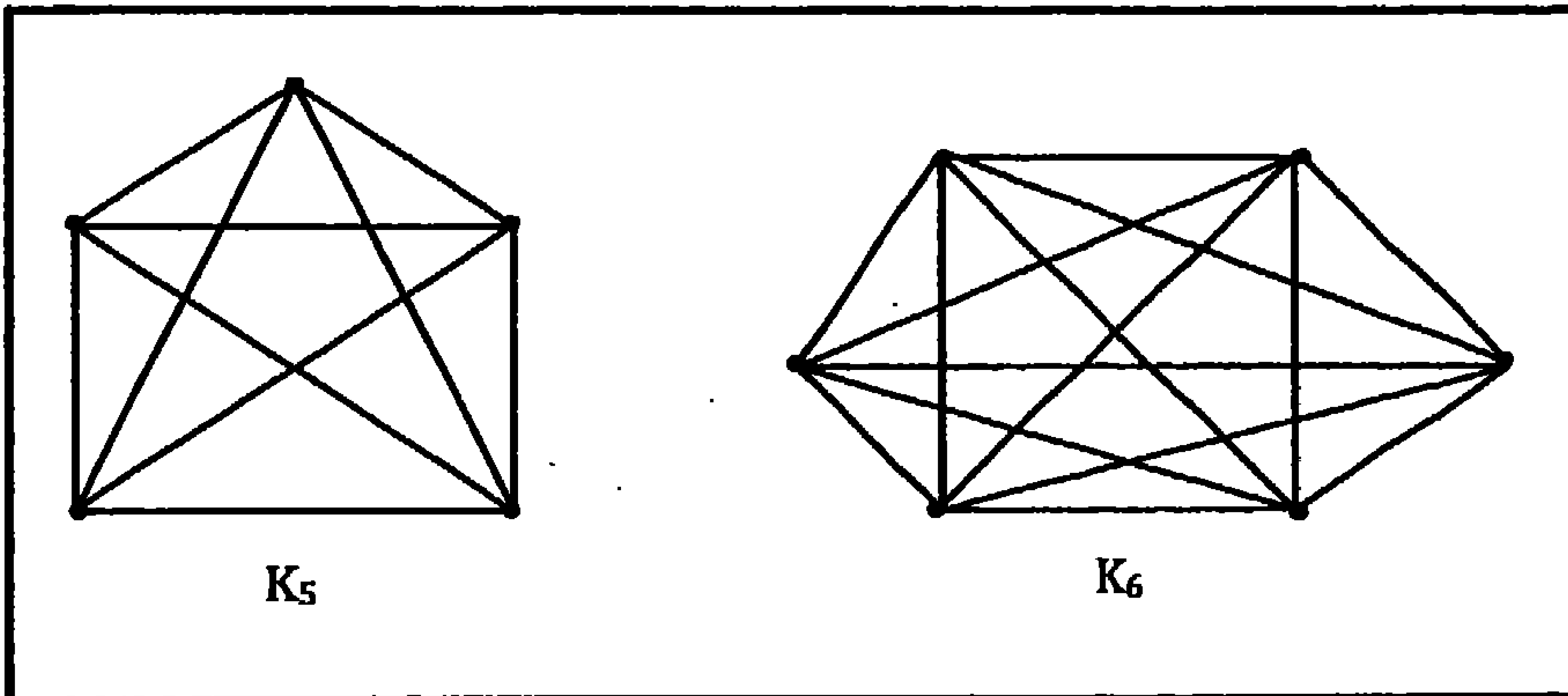
1. يقال أن المخطط G مخطط تام Complete graph إذا كان G مخطط بسيط و يوجد بين كل زوج من نقاط رؤوسه ضلع واحد فقط وهذا يعني عدم وجود نقاط معزولة في المخطط التام ولا يوجد عقد ولا يوجد أضلاع مكررة (متوازية) في المخطط التام ويرمز عادة للمخطط التام الذي عدد رؤوسه n بالرمز K_n حيث $n \geq 2$ وحيث أن درجة كل رأس في المخطط التام K_n هي n-1 وبما أن عدد أضلاع أي مخطط يساوي نصف مجموع درجات رؤوسه فإن عدد أضلاع المخطط التام K_n يساوي $\frac{n(n-1)}{2}$.
2. نقول على المخطط $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ إنه مخطط متمم للمخطط $G = (V, E)$ إذا كان:

- $V = \bar{V}$
- $e \in \bar{E} \Leftrightarrow e \notin E$

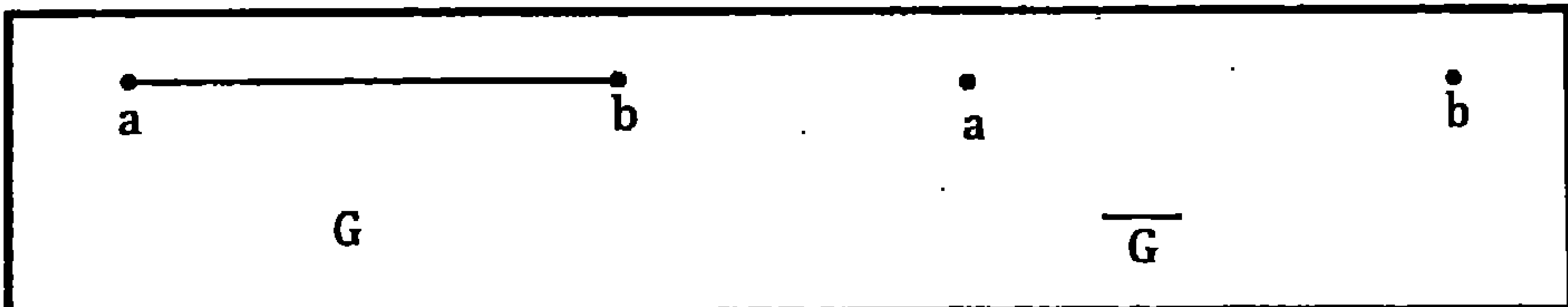
3. إذا كانت درجة كل رأس في المخطط G تساوي r فإننا نقول أن المخطط G مخطط منتظم من الدرجة r بإختصار منتظم –r (r-regular) ومن الواضح أن كل مخطط تام K_n يكون مخطط منتظم من الدرجة (n-1) كما أن متمم المخطط المنتظم من الدرجة r يكون مخطط منتظم من الدرجة n-r-1 .

مثال: الرسم التالي يوضح المخطط التام K_n حيث k=2, 3, 4, 5, 6 :

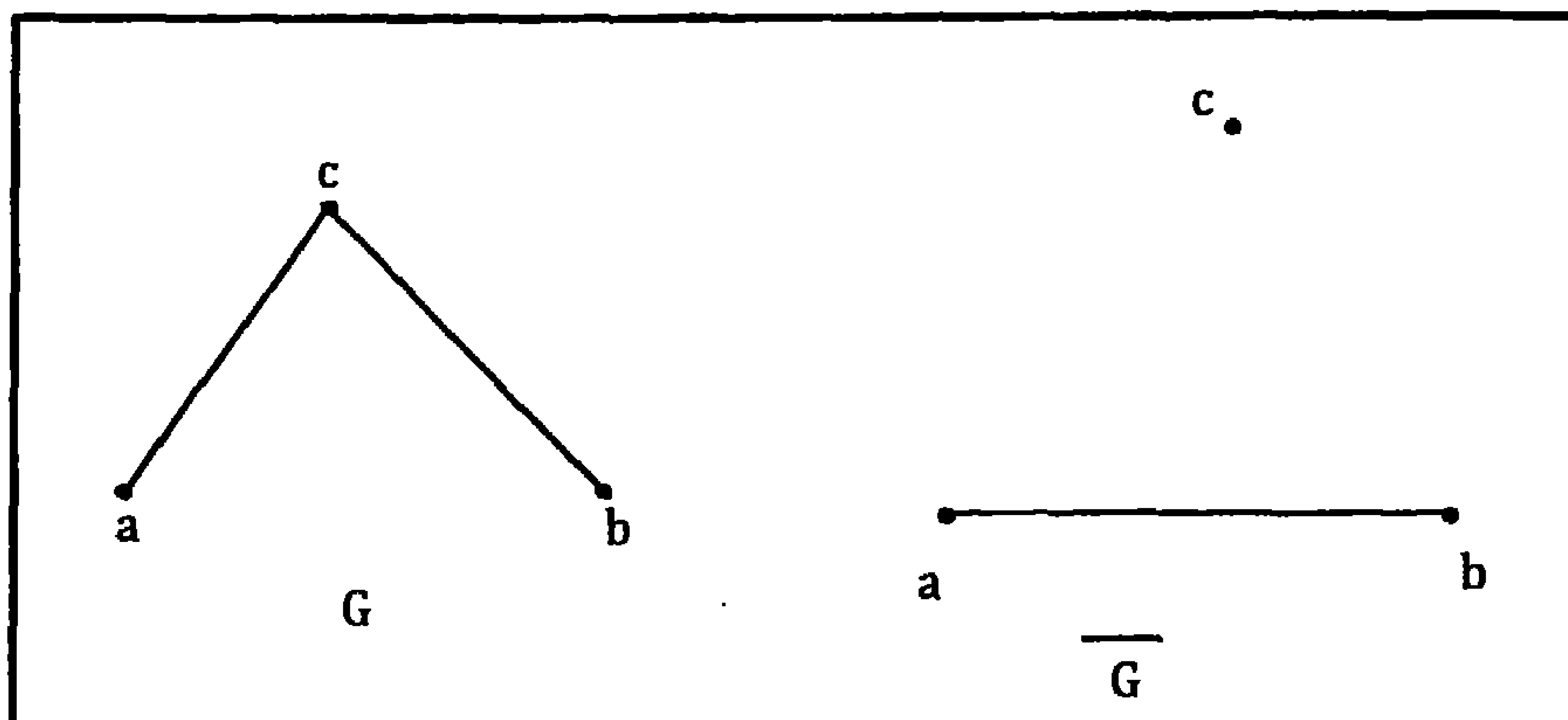




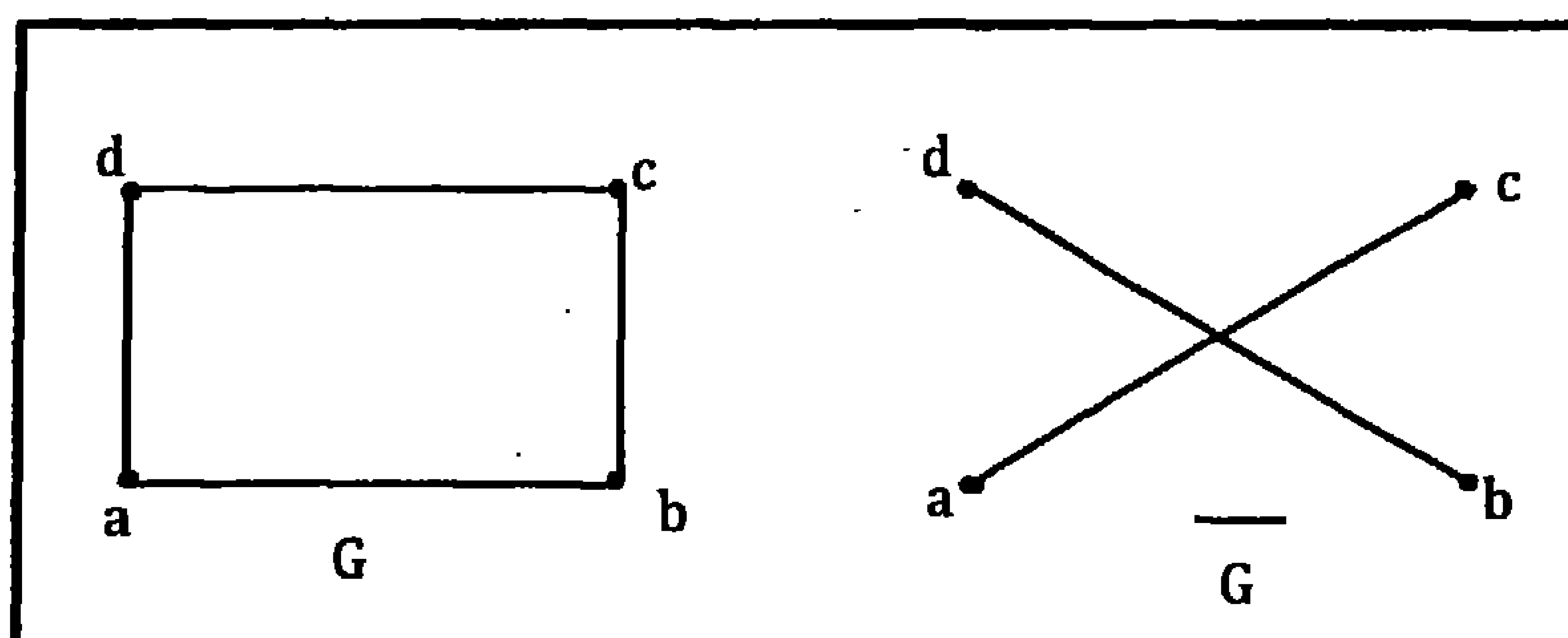
مثال: الرسم التالي يوضح المخطط G والمخطط المتمم $\overline{G}$:



مثال: الرسم التالي يوضح المخطط G والمخطط المتمم $\bar{G}$:



مثال: الرسم التالي يوضح المخطط G والمخطط المتمم $\bar{G}$:



مبرهنة (1): إذا كان $G=(V, E)$ مخطط منتظم من النوع r وكان عدد رؤوس المخطط يساوي n فإن عدد أضلاع المخطط يساوي $\frac{nr}{2}$..

البرهان:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E|$$

$$\sum_{i=1}^{n} r = 2|E|$$

$$nr = 2|E|$$

$$|E| = \frac{nr}{2}$$

مبرهنة (2): إذا كان $K_n=(V, E)$ فإن عدد أضلاع المخطط يساوي $\frac{n(n-1)}{2}$.

البرهان:

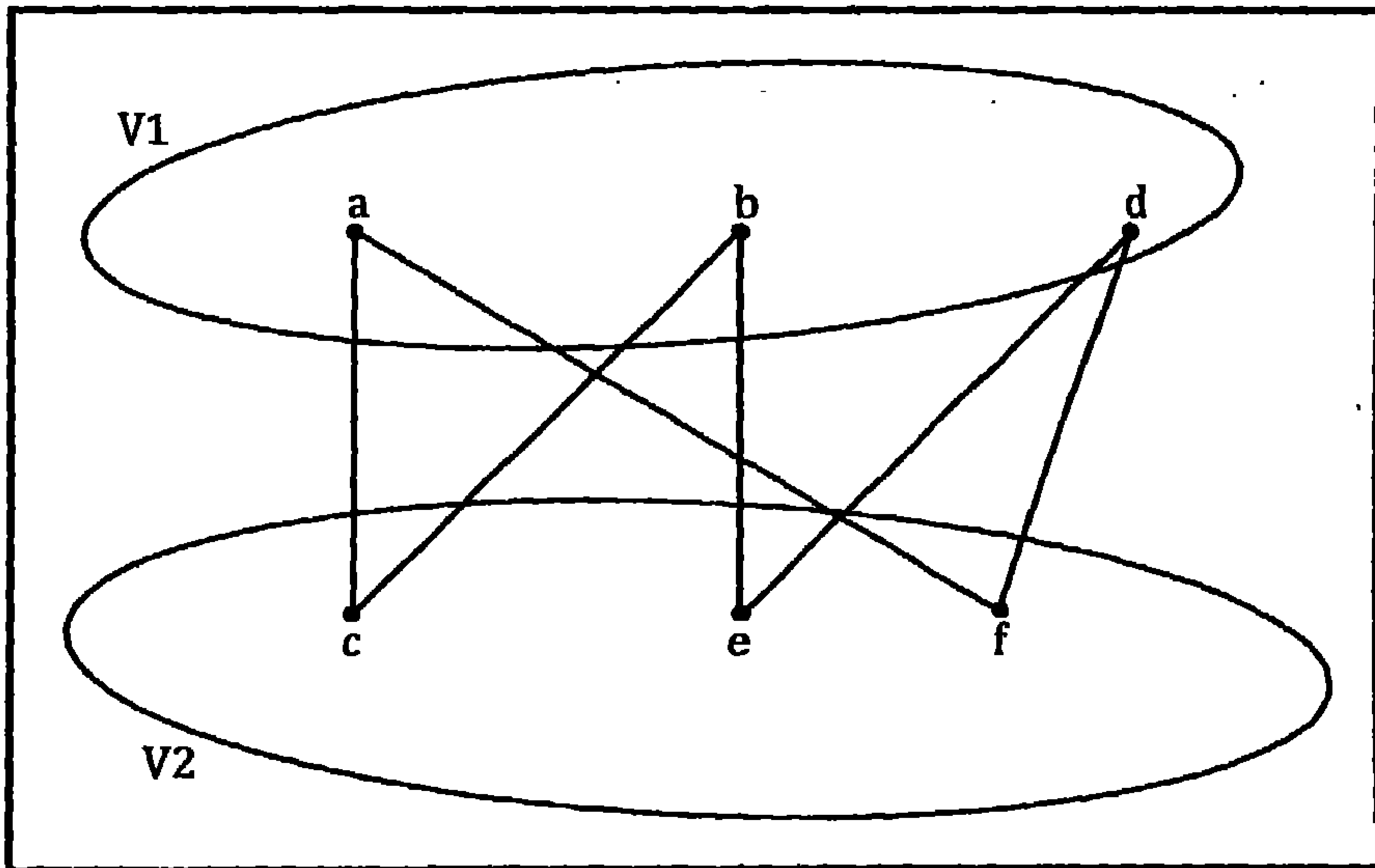
بما أن المخطط $K_n=(V, E)$ هو مخطط منتظم من النوع $r=n-1$ و بإستخدام المبرهنة السابقة (1) فإن عدد أضلاع المخطط يساوي

$$|E| = \frac{nr}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

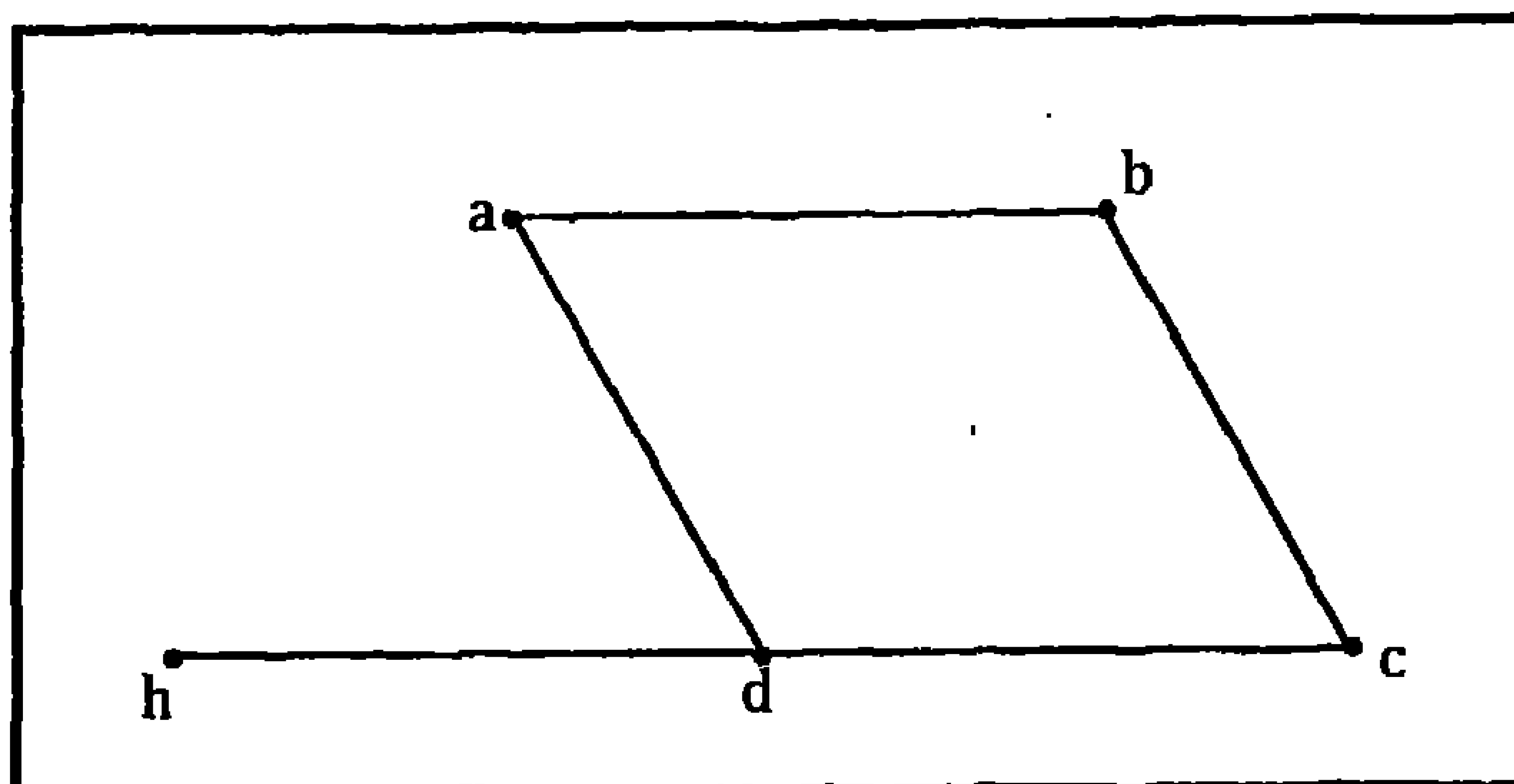
(8.3.5) المخطط ثنائي التجزئة Bipartite Graphs

1. ليكن $G=(V, E)$ مخطط بسيط فإننا نقول أن G مخطط ثنائي التجزئة إذا كانت توجد تجزئة $[V_1, V_2]$ لمجموعة الرؤوس V حيث إذا كان $e \in E$ فإن نهايات الضلع e هما رأسين أحدهما ينتمي إلى V_1 والرأس الأخر ينتمي إلى V_2 علما بأن $V_1 \neq \varphi$ و $V_2 \neq \varphi$ و $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2$ وفي هذه الحالة نكتب $G = (V_1 \cup V_2, E)$.
2. ليكن $G = (V_1 \cup V_2, E)$ مخطط ثنائي التجزئة فإننا نقول أن G مخطط تام ثنائي التجزئة Complete Bipartite Graphs إذا كان كل عنصر في V_1 يكون مجاور لكل عنصر في V_2 وفي هذه الحالة إذا كانت $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ فإننا نرمز للمخطط التام ثنائي التجزئة بالرمز $K_{m,n}$.

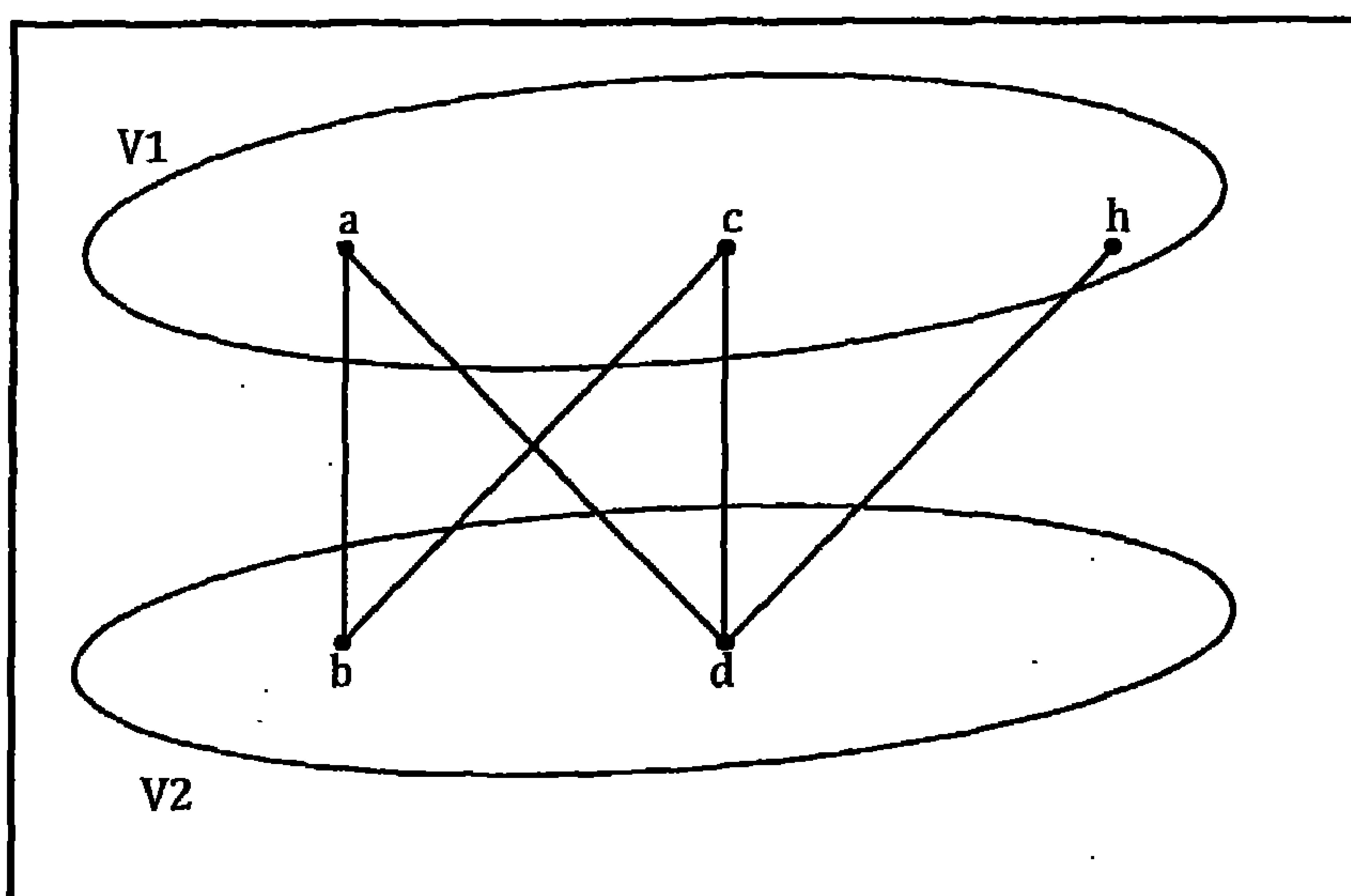
مثال: المخطط التالي هو مخطط ثنائي التجزئة



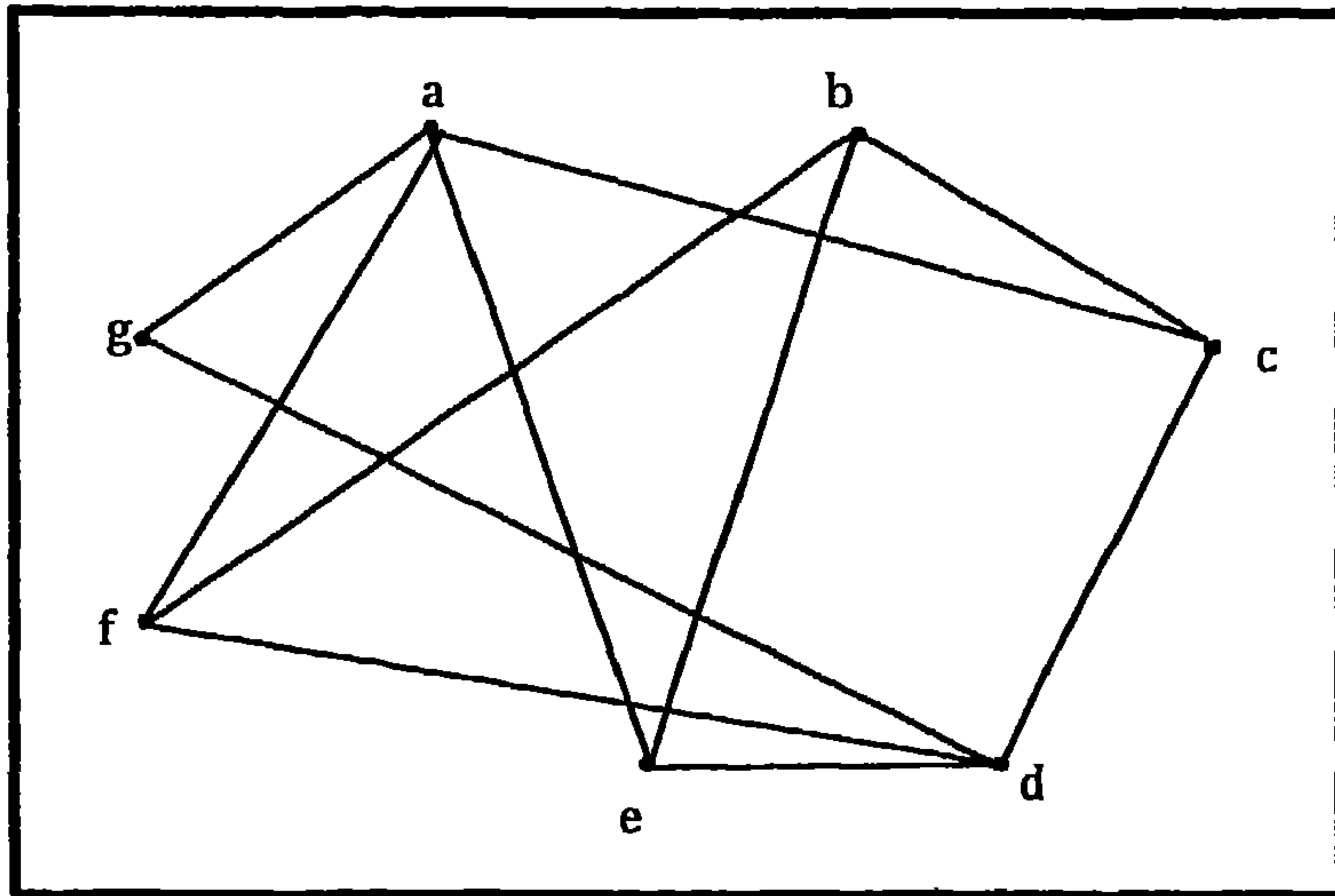
مثال: المخطط التالي هو مخطط ثنائي التجزئة



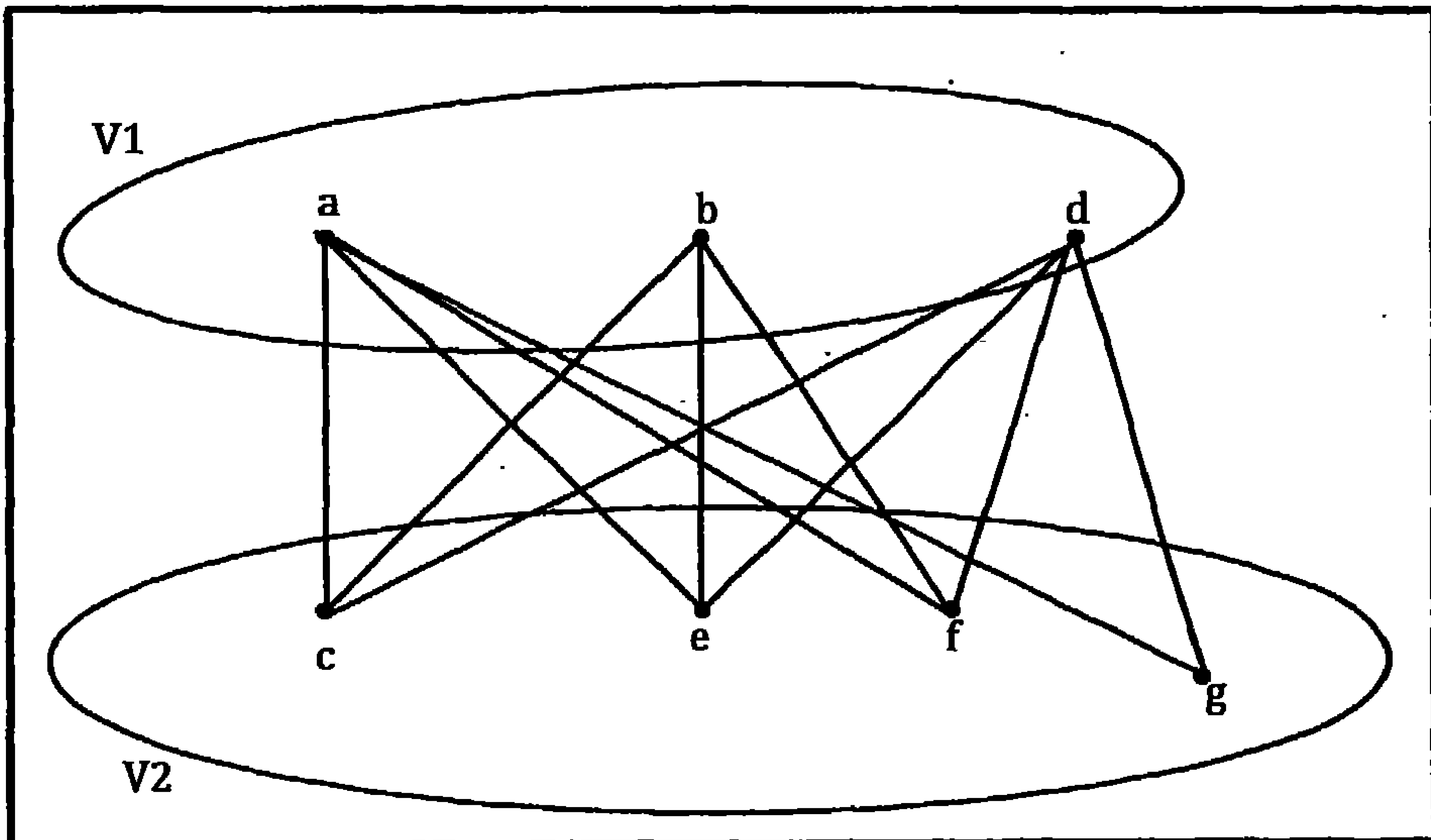
حيث يمكن إعادة رسم المخطط كما يلي:



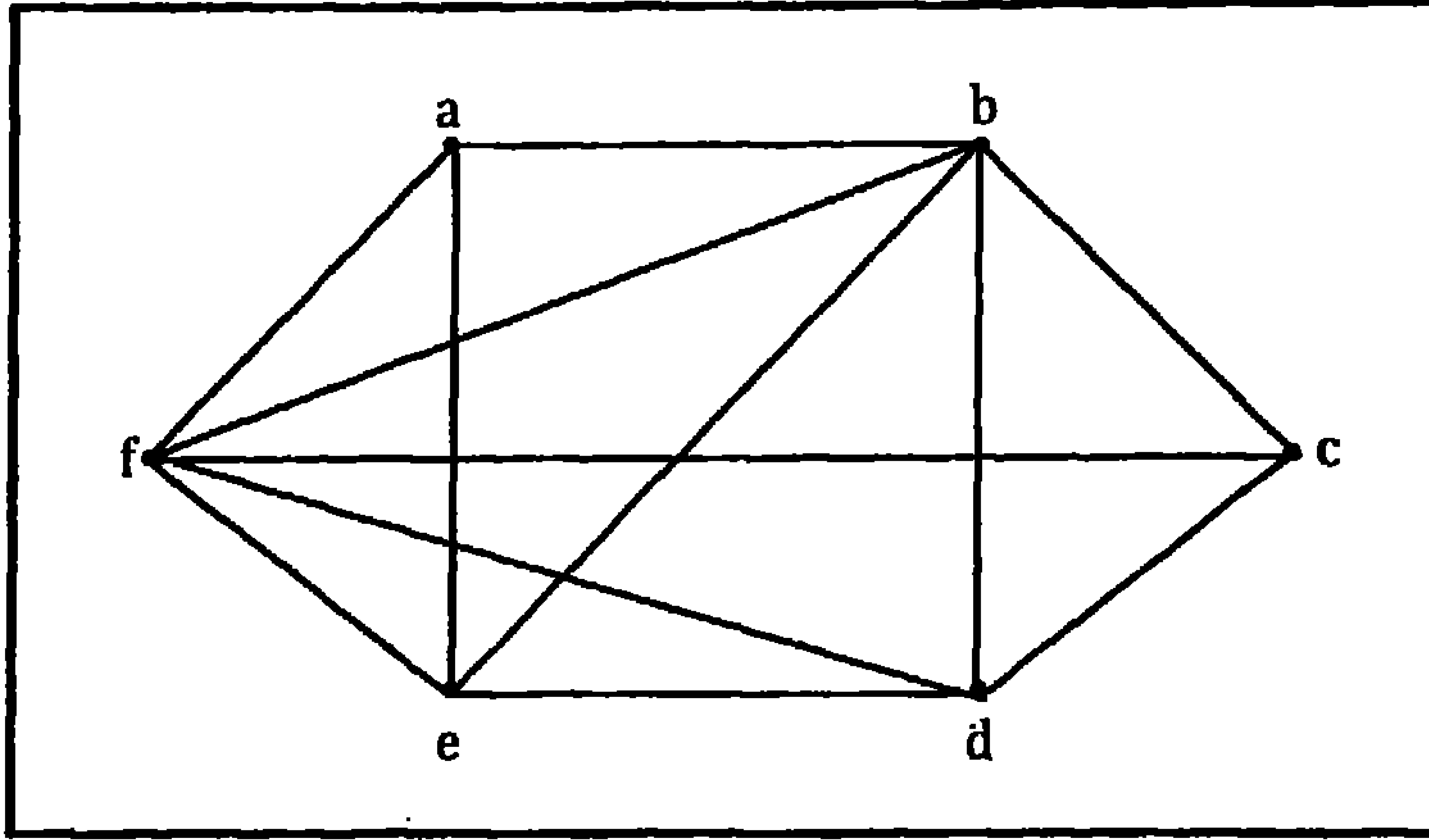
مثال: المخطط التالي هو مخطط ثنائي التجزئة



حيث يمكن إعادة رسم المخطط كما يلي:

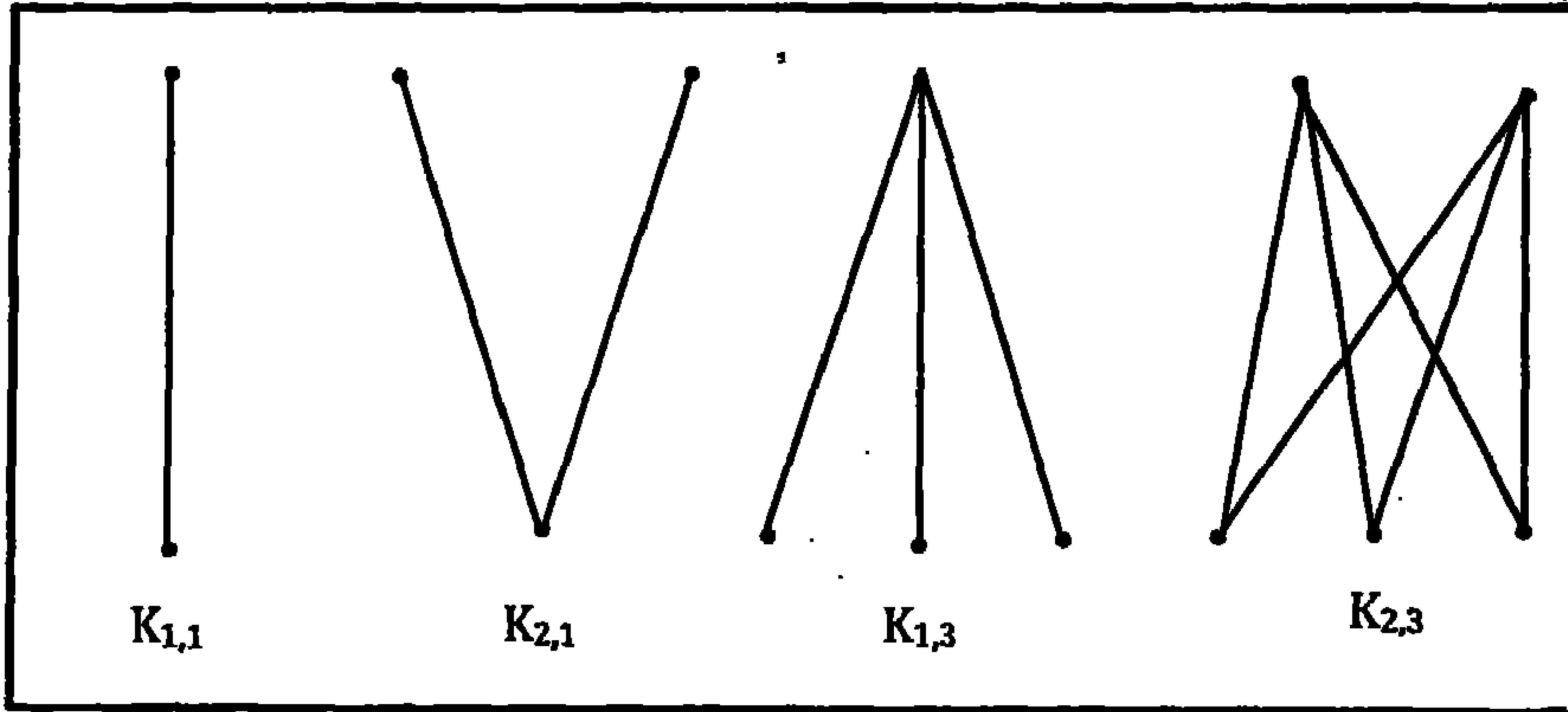


مثال: المخطط التالي هو ليس مخطط ثنائي التجزئة



لإننا لا نستطيع تقسيم رؤوس المخطط إلى مجموعتين منفصلتين.

مثال: المخطط التالي يبين بعض المخططات التامة ثنائية التجزئة:



مبرهنة (3): إذا كان $K_{n,m} = (V_1 \cup V_2, E)$ حيث $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ فإن $|E| = mn$

البرهان:

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E|$$

$$\sum_{v \in V_1} n + \sum_{v \in V_2} m = 2|E|$$

$$mn + mn = 2|E|$$

$$mn = |E|$$

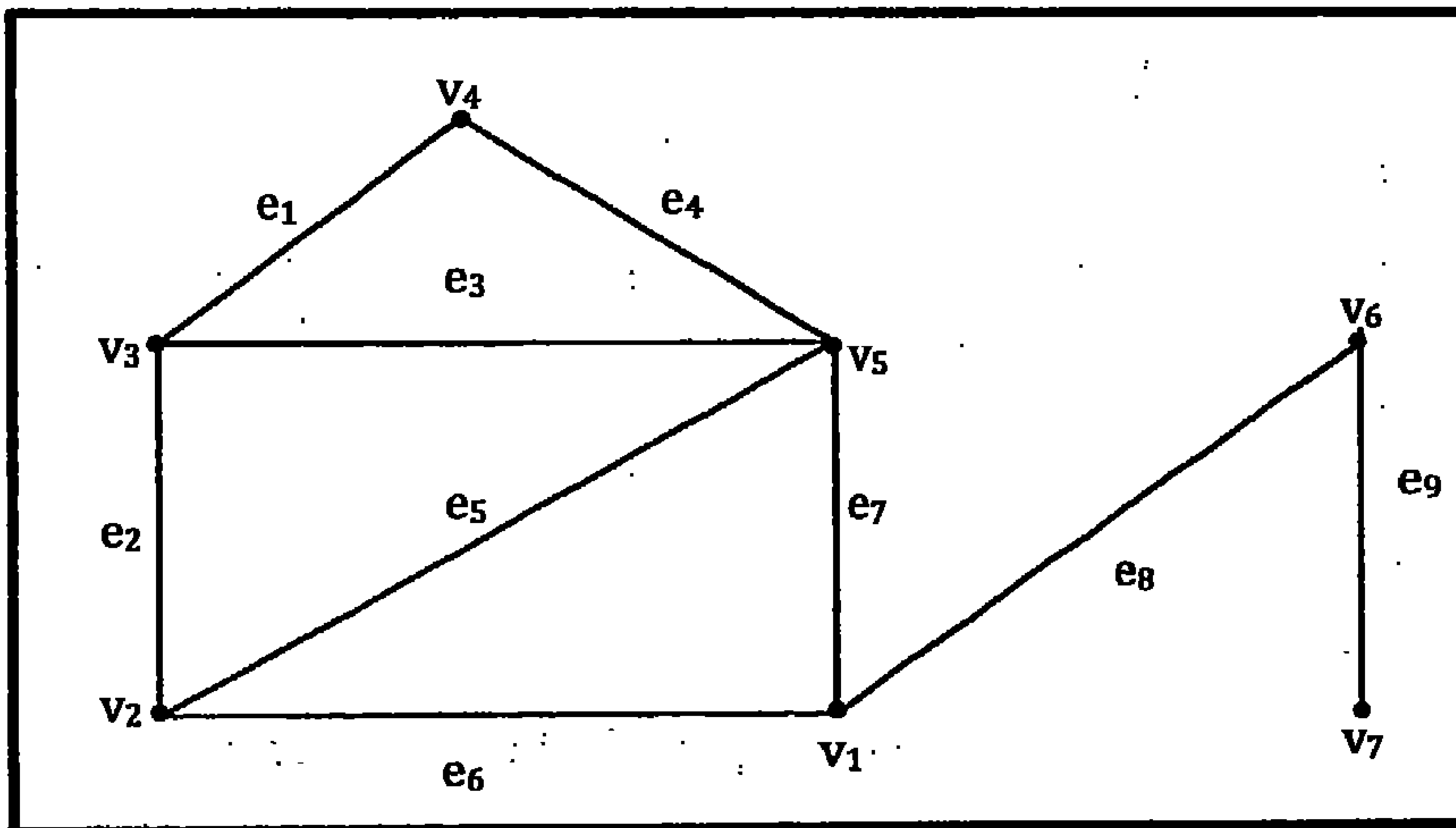
(8-3-6) عملية الحذف Cancellation

يمكن إجراء نوعيتين من أنواع عمليات الحذف على المخطط:

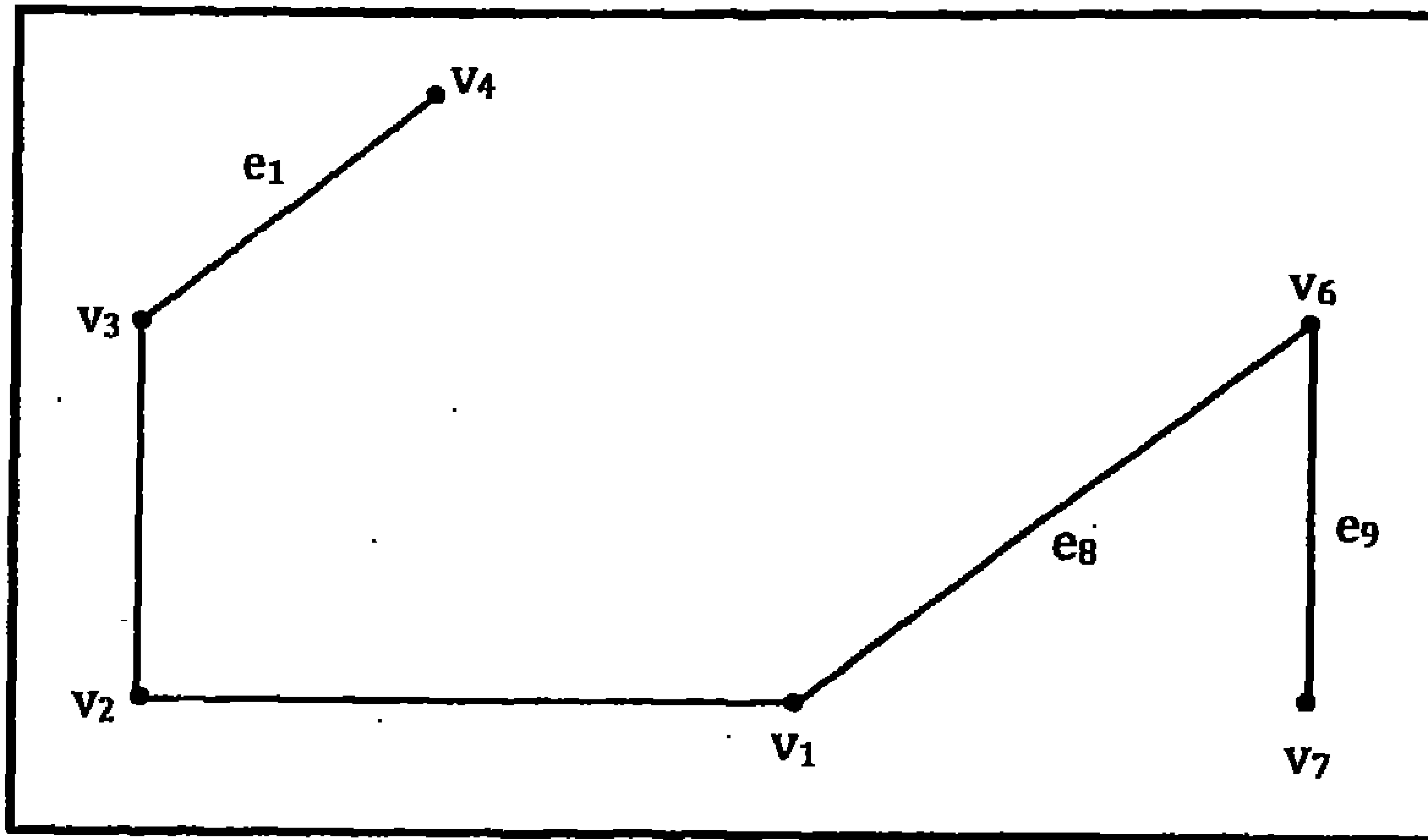
النوع الأول: هي حذف راس v من المخطط G وبالتالي فإننا نحذف أيضاً جميع الأضلاع المرتبطة بالرأس v وبالتالي فالمخطط الناتج هو G-v .

النوع الثاني: هي حذف ضلع e من المخطط G ولكننا لا نحذف أي رأس تكون مرتبطة بالضلع e وبالتالي فالمخطط الناتج هو G-e .

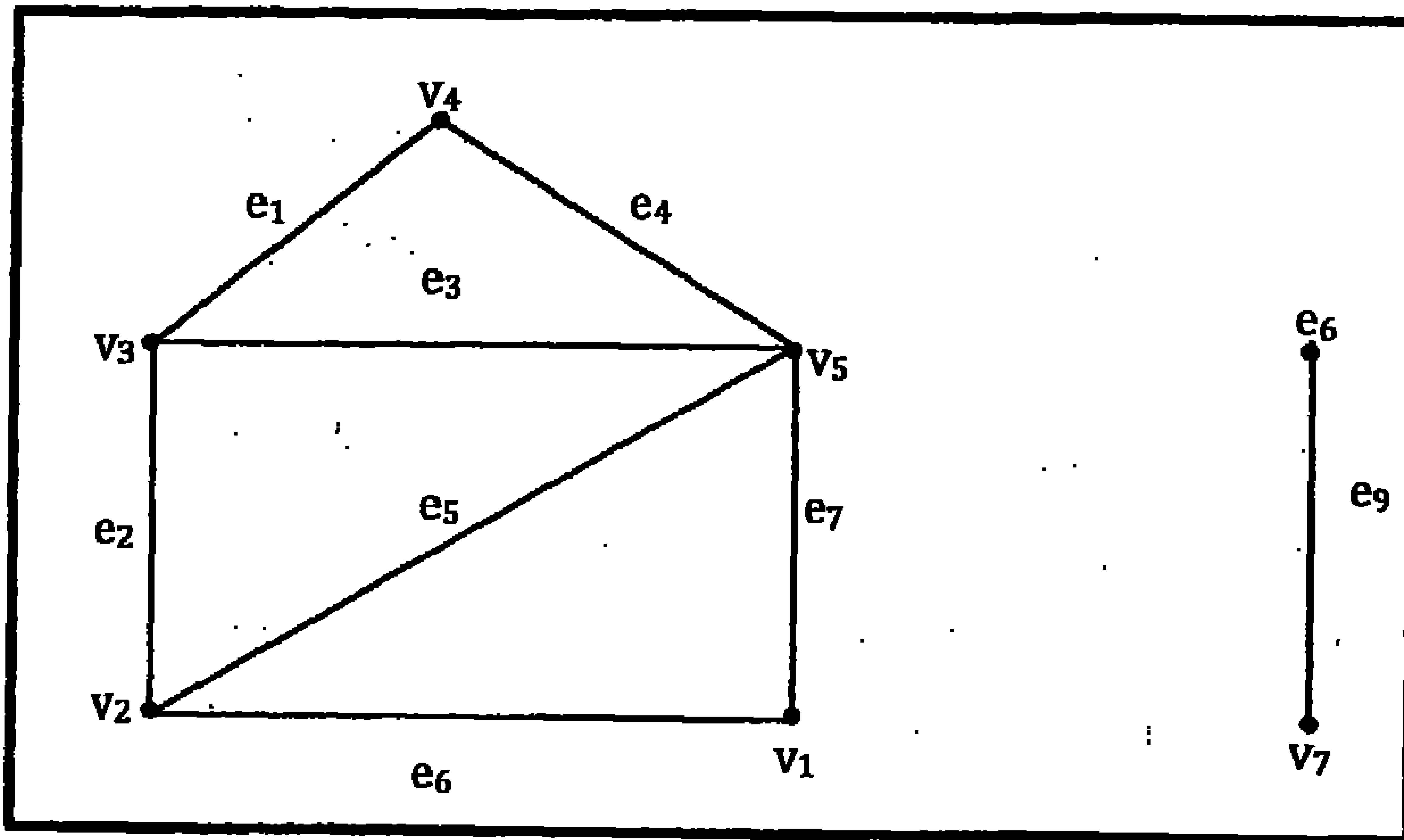
مثال: في المخطط التالي الموضح بالرسم :



فإن حذف الرأس v_5 نحصل على المخطط $G-v_5$ التالي:



فإن حذف الضلع e_8 نحصل على المخطط $G-e_8$ التالي:



(8-4) المسارات والدورات Paths and Cycles

ليكن $G=(V, E)$ مخطط فإن:

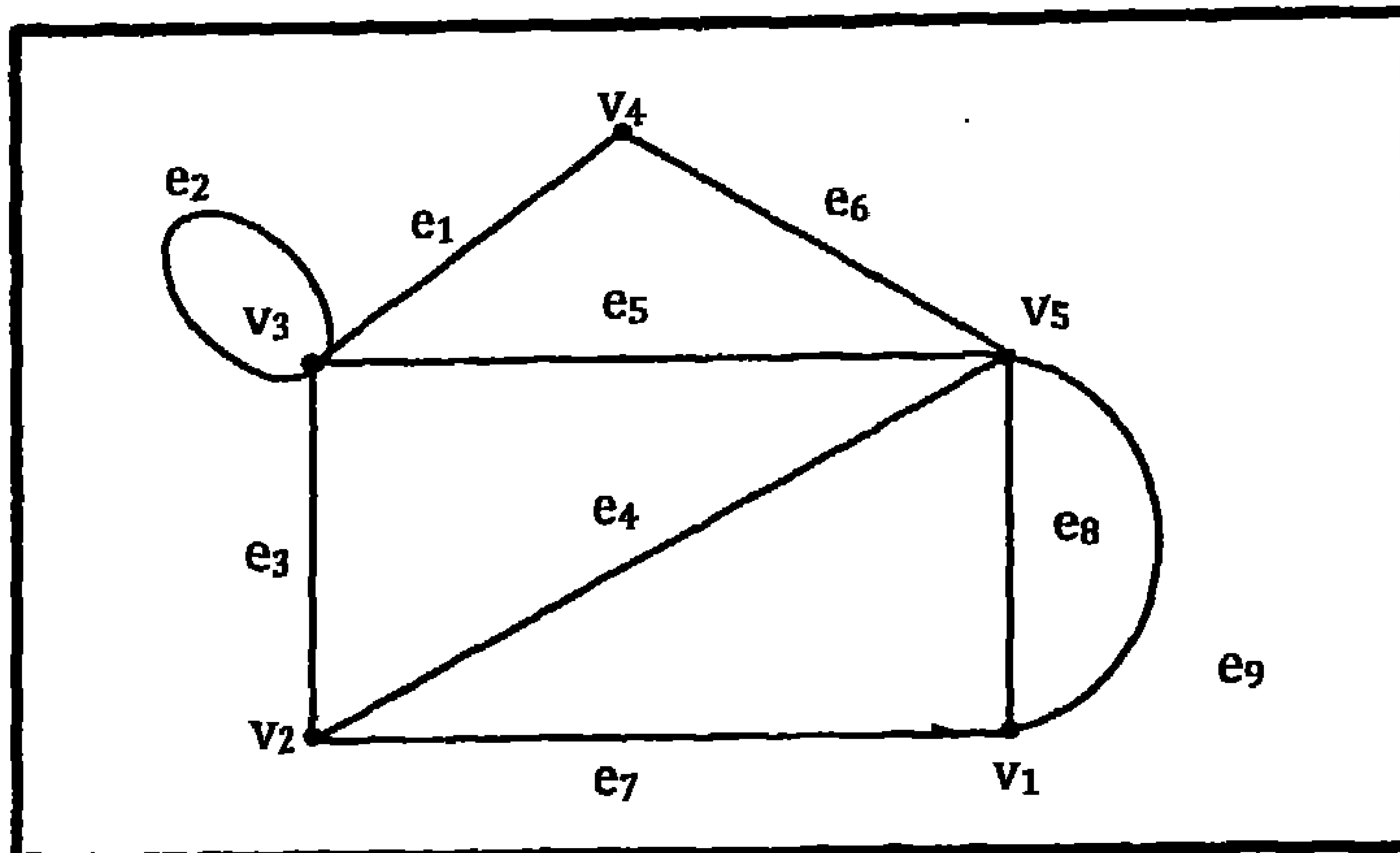
1. المسار (walk) أو path من الرأس v_1 إلى الرأس v_n هو عبارة عن متتالية من الرؤوس والأضلاع $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n)$ بحيث تكون نهاية أي ضلع فيها e_i هي بداية الضلع التالي e_{i+1} وذلك لكل $1 \le i \le n-1$ والرأس v_1 يسمى بداية المسار initial vertex بينما الرأس v_n يسمى نهاية المسار terminal vertex وإذا كانت

$v_1 = v_n$ فإننا نسمي المسار مغلق بينما إذا كانت $v_1 \neq v_n$ فإننا نسمي المسار مفتوح كما يقال لعدد أضلاع المسار بأنه طول المسار ومن الواضح أيضاً أن كل ضلعين في المسار يكونان متجاوران و لأجل سهولة الكتابة فإننا أحيانا نكتب المسار $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{n-1}, v_n)$ إختصارا ب $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ كمتتالية من الأضلاع فقط .

2. المسار الذي تكون جميع رؤوسه مختلفة يسمى مسار أولي Elementary path .
3. المسار الذي تكون جميع أضلاعه مختلفة فإن هذا المسار يسمى مسار بسيط (درب- طريق) simple path أو chain .
4. إذا كانت كل رؤوس الطريق جميعها مختلفة فإننا نسمي هذا الطريق بأنه طريق بسيط simple chain
5. المسار الذي يوجد فيه تكرار لبعض الأضلاع المكونة له يسمى مسار مركب Compound path .
6. الدارة Cycle هي مسار مغلق بحيث تكون أي رأس فيه تظهر مره واحدة فقط في المسار ما عدا نقطة البداية والنهاية فهي تكون نفس النقطة .
7. كل رأس في الدارة تكون زوجية ودرجتها تساوي 2 وكل عقدة في المخطط تشكل دارة كذلك أي ضلعين متكررين (متوازيين) يشكلان معا دارة.
8. يقال أن الدارة إنها دارة بسيطة simple cycle إذا كانت جميع رؤوس الدارة مختلفة.
9. إذا كان $w = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{n-1}, v_n)$ مسار من الرأس v_1 إلى الرأس v_n فإننا نعرف طول w بأنه عدد أضلاع المسار w ونرمز له بالرمز L(w) فإذا كان طول المسار w عدد فردي فإننا نقول أن المسار w مسار فردي وأما إذا كان طول المسار w عدد زوجي فإننا نقول أن المسار w مسار زوجي.

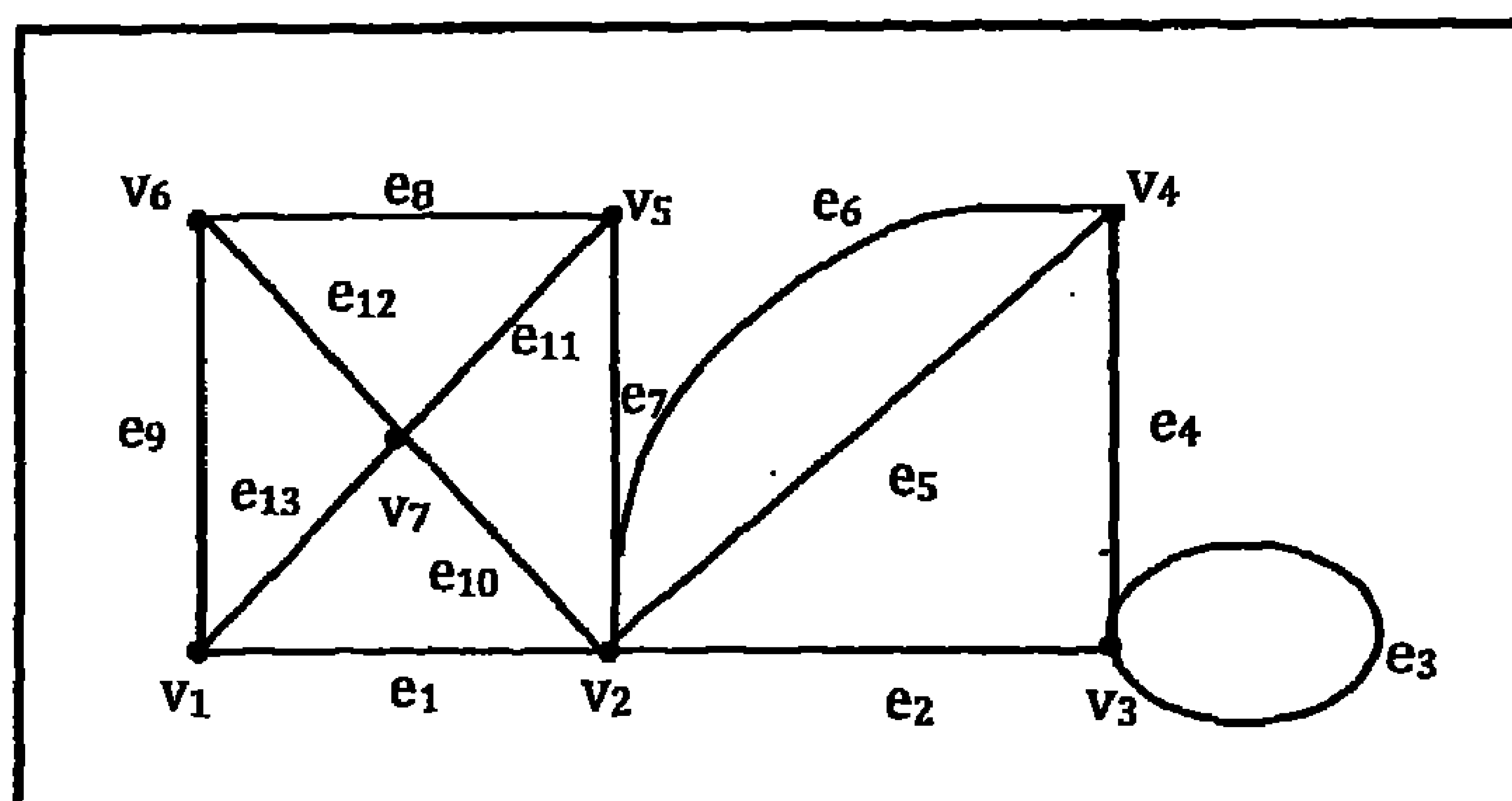
نقول أن المخطط G مخطط مترابط connected graph إذا وجد مسار بين أي رأسين من المخطط G أما إذا لم يتحقق ذلك فإننا نقول أن المخطط G مخطط غير مترابط Disconnected وفي هذه الحالة فإن مجموعة كل الرؤوس المتصلة مع بعضها تكون مع الأضلاع الواقعة عليها مخطط جزئي متصل يسمى مركبة ل G .

مثال: في المخطط التالي:



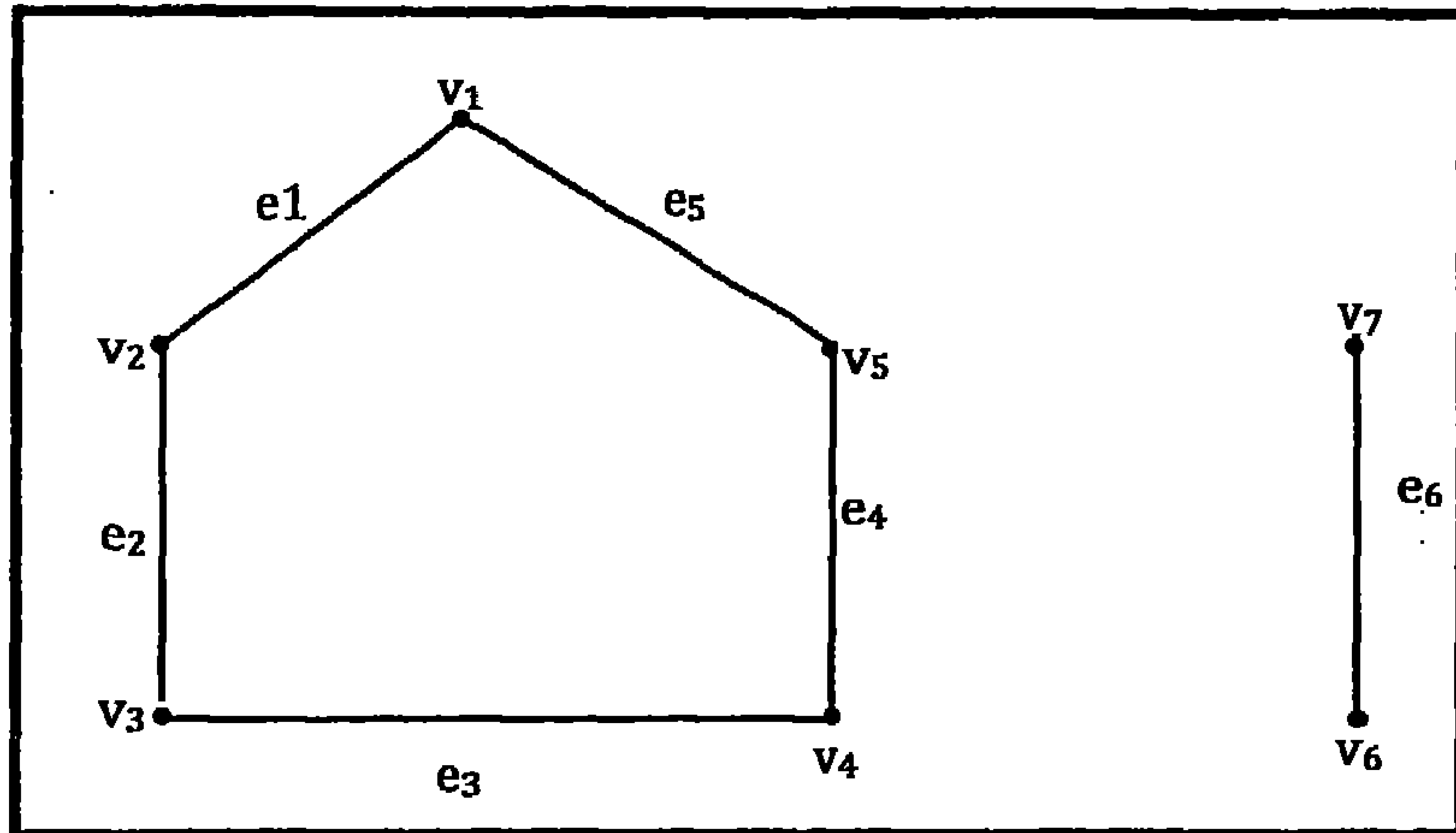
1. المسار e_1, e_2, e_3, e_4, e_6 مسار مغلق يبدأ وينتهي عند الرأس v_4 وطول المسار يساوي 5 وهو مسار فردي.
2. المسار e_1, e_2, e_3, e_4 مسار مفتوح يبدأ من الرأس v_4 وينتهي عند الرأس v_5 وطول المسار يساوي 4 وهو مسار زوجي.
3. المسار e_1, e_3, e_4, e_6 مسار مغلق يبدأ وينتهي عند الرأس v_4 ويشكل دارة وطول المسار يساوي 4 وبالتالي فهي دارة زوجية.
4. العقدة e_2 تشكل دارة.
5. الضلعان المتكرران e_8 و e_9 يشكلان معاً مسار مغلق يشكل دارة.
6. المخطط G مترابط.

مثال: في المخطط التالي:



1. المسار $(e_1, e_5, e_6, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7)$ مسار مفتوح من الرأس v_1 إلى الرأس v_5 وطول المسار يساوي 8 وبالتالي فهذا المسار زوجي.
2. المسار $(e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_5, e_{10}, e_{13})$ مسار مغلق من الرأس v_1 إلى الرأس v_1 وطول المسار يساوي 8 وبالتالي فهذا المسار زوجي.
3. المسار $(e_1, e_2, e_4, e_5, e_7)$ طريق غير بسيط من الرأس v_1 إلى الرأس v_5 وطول المسار 5 وبالتالي فهو مسار فردي.
4. المسار $(e_1, e_{10}, e_{12}, e_8)$ طريق بسيط من الرأس v_1 إلى الرأس v_5 وطول الطريق 4 وبالتالي فهو طريق زوجي.
5. المسار (e_1, e_7, e_8, e_9) دارة بسيطة من الرأس v_1 إلى الرأس v_1 وطول الدارة 4 وبالتالي فهي دارة زوجية.
6. المسار (e_2, e_4, e_6) دارة بسيطة من الرأس v_2 إلى الرأس v_2 وطول الدارة يساوي 3 وبالتالي فهي دارة فردية.
7. المسار $(e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9)$ دارة غير بسيطة من الرأس v_1 إلى الرأس v_1 وطولها 7 وبالتالي فهي دارة فردية.

مثال: المخطط التالي مخطط غير مترابط:



نظرية (8.4.1): ليكن G يحتوي على n من الرؤوس فإذا وجد مسار من الرأس v_1 إلى الرأس v_2 فإنه يوجد مسار من الرأس v_1 إلى الرأس v_2 يحتوي على الأكثر n-1 من الأضلاع.

البرهان:

نفرض أن لدينا المسار $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ من الرأس v_1 إلى الرأس v_2 فإذا كانت $k > n - 1$ فمعنى ذلك إنه يوجد أحد الرؤوس v في المسار ظهرت أكثر من مرة خلال المسار وبحذف المسار المغلق الذي يبدأ وينتهي بالرأس v نحصل على مسار عدد أضلاعة p يكون اقل تماما من المسار $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ وبالتالي إما يكون لدينا $p \leq n-1$ وبالتالي فهذا هو المسار المطلوب وإما أن يكون $p > n-1$ وفي هذه الحالة نكرر نفس العملية السابقة إلى أن نجد مسار من الرأس v_1 إلى الرأس v_2 يكون عدد أضلاعة لا يزيد عن n-1 .

نظرية (8.4.2): إذا كان المخطط G يحتوي بالضبط على رأسين فرديتين v_1 و v_2 فإنه يوجد مسار يصل بين الرأسين v_1 و v_2 .

البرهان:

أولاً: إذا كان المخطط G مخطط مترابط فمن الواضح أن النظرية متحققة.

ثانياً: نفرض أن المخطط G مخطط غير مترابط بحيث تكون كل رؤوس المخطط G رؤوس فردية ما عدا الرأسين v_1 و v_2 ولكن من نظرية (8.1.3) فإنه لأي مخطط G يجب أن تكون مجموع درجات رؤوسه عدد زوجي وبالتالي لا يوجد مخطط تكون مجموع درجات رؤوسه عدد فردي وهذا أيضا يكون صحيح على كل مخطط جزئي G1 يكون جزء من المخطط الأصلي G فإذا كانت الرأسين v_1 و v_2 تكون كل رأس منهم موجودة على حدة في أحد المخططين الجزئيين G1 و G2 فمعنى ذلك أن المخطط الجزئي G1 سوف يحتوي على رأس واحدة فردية وهذا يعارض نظرية (8.1.4) وبالتالي يجب أن تكون كلا الرأسين موجودة في نفس المخطط الجزئي G1 أو G2 وبالتالي يوجد مسار يصل بين الرأسين v_1 و v_2 .

ملاحظة: النظرية التالية تعتبر تعميم للنظرية (8.1.2):

نظرية (8.4.3) : إذا كان G مخطط بسيط ويحتوي على عدد n من الرؤوس ويتكون من k جزء من المخططات الجزئية المترابطة فإن الحد الأعلى لعدد أضلاع المخطط G هو $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$.

البرهان:

نفرض أن المخطط G يحتوي على المخططات الجزئية المتصلة التالية $G_1, G_2, \dots, G_k$ بحيث تكون عدد الرؤوس $n_1, n_2, \dots, n_k$ على التوالي للمخططات $G_1, G_2, \dots, G_k$ وبالتالي:

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ .... (1)

ولكن المخطط الجزئي G_i يعتبر مخطط بسيط متصل وبالتالي بتطبيق النظرية (8.1.2) نحصل على أن الحد الأعلى لعدد أضلاع المخطط G_i هو $\frac{n_i(n_i-1)}{2}$ وبالتعويض في (1) نحصل على أن الحد الأعلى لعدد أضلاع المخطط G هو:

$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - \frac{n}{2}$..................... (2)

ولإثبات أن :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq n^2 - (k-1)(2n-k)$$

بما أن:

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^2 = n^2 - 2nk + k^2$$

ولكن:

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i^2 - 2n_i) + k + t = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 - 2n + k + t$$

حيث $t \geq 0$ وبالتالي:

$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq n^2 + k^2 - 2nk - k + 2n = n^2 - (k-1)(2n-k)$......... (3)

وبالتالي من (2) و (3) نحصل على:

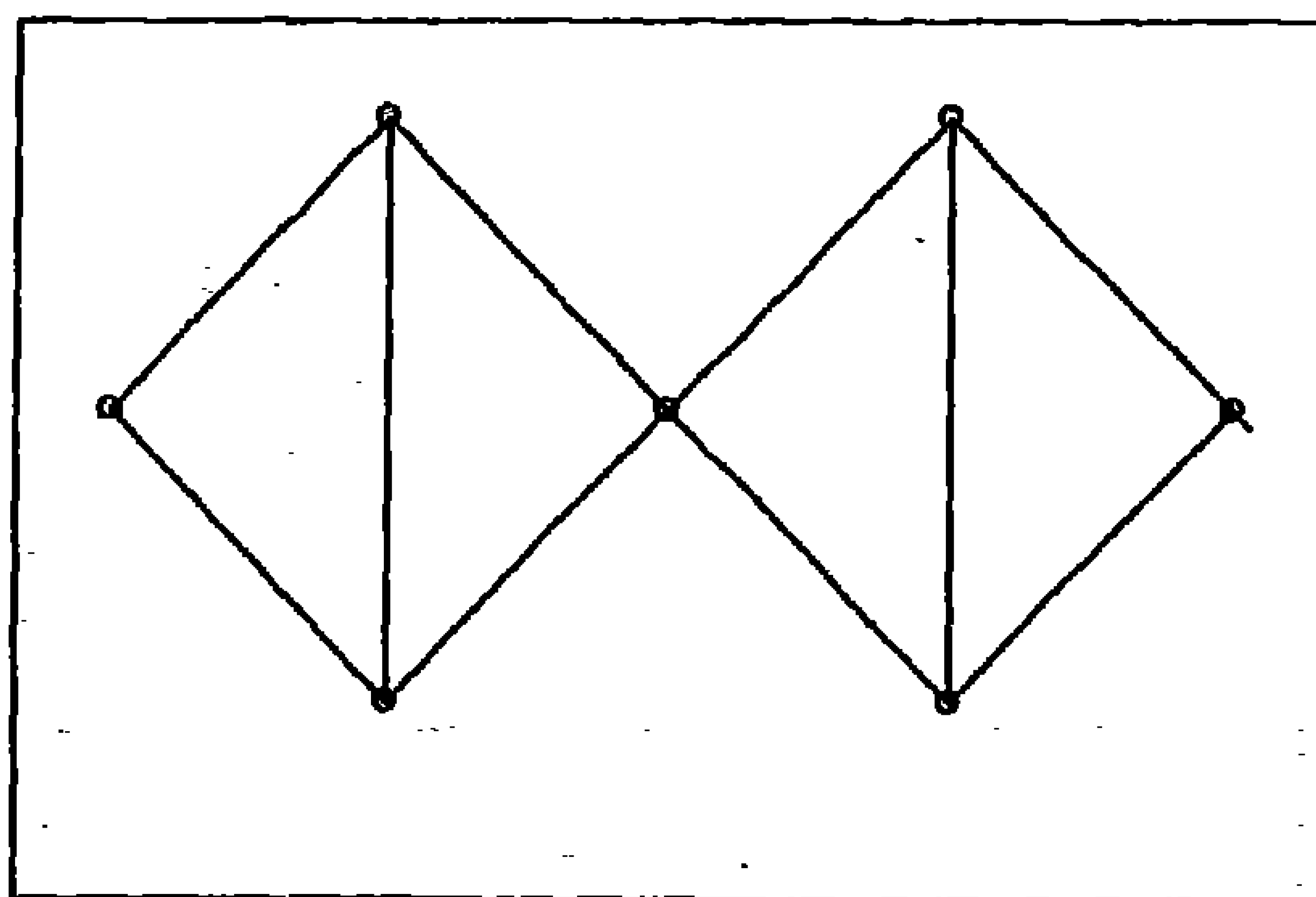
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} \leq \frac{[n^2 - (k-1)(2n-k)]}{2} - \frac{n}{2} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

ملاحظة: بوضع k=1 في نظرية (8.4.3) نحصل على نظرية (8.1.2) التي درسناها سابقا.

تعريف (8.4.4): إذا كان المخطط G مخطط مترابط فإن:

1. معامل إرتباط رؤوس المخطط G هو أقل عدد من رؤوس المخطط G يجب حذفه بحيث يصبح المخطط G مخطط غير مترابط .
2. معامل إرتباط أضلاع المخطط G هو أقل عدد من أضلاع المخطط G يجب حذفه بحيث يصبح المخطط G مخطط غير مترابط .

مثال: إحسب معامل إرتباط الرؤوس والأضلاع في المخطط التالي:

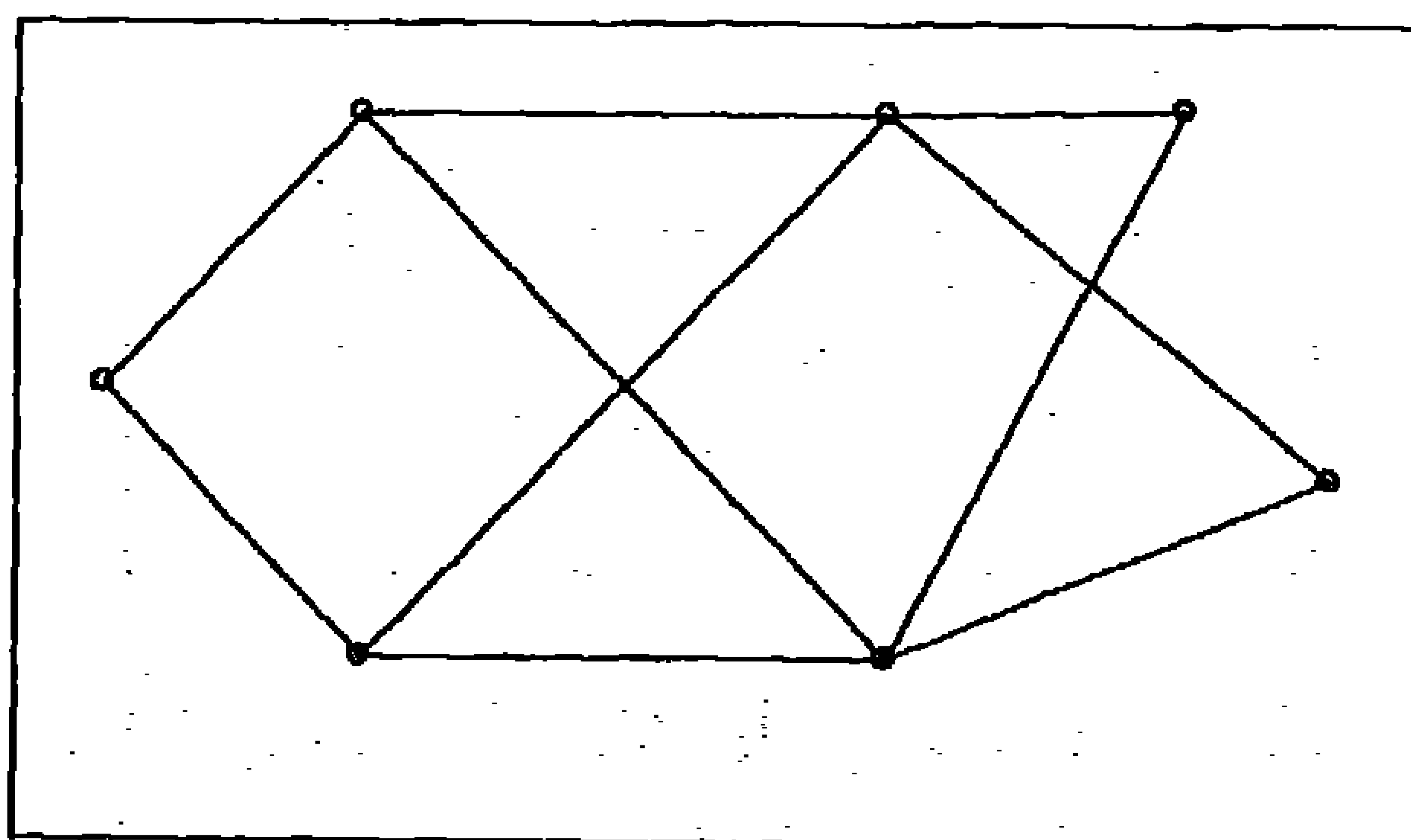


الحل:

معامل إرتباط الرؤوس يساوي 1

معامل إرتباط الأضلاع يساوي 2

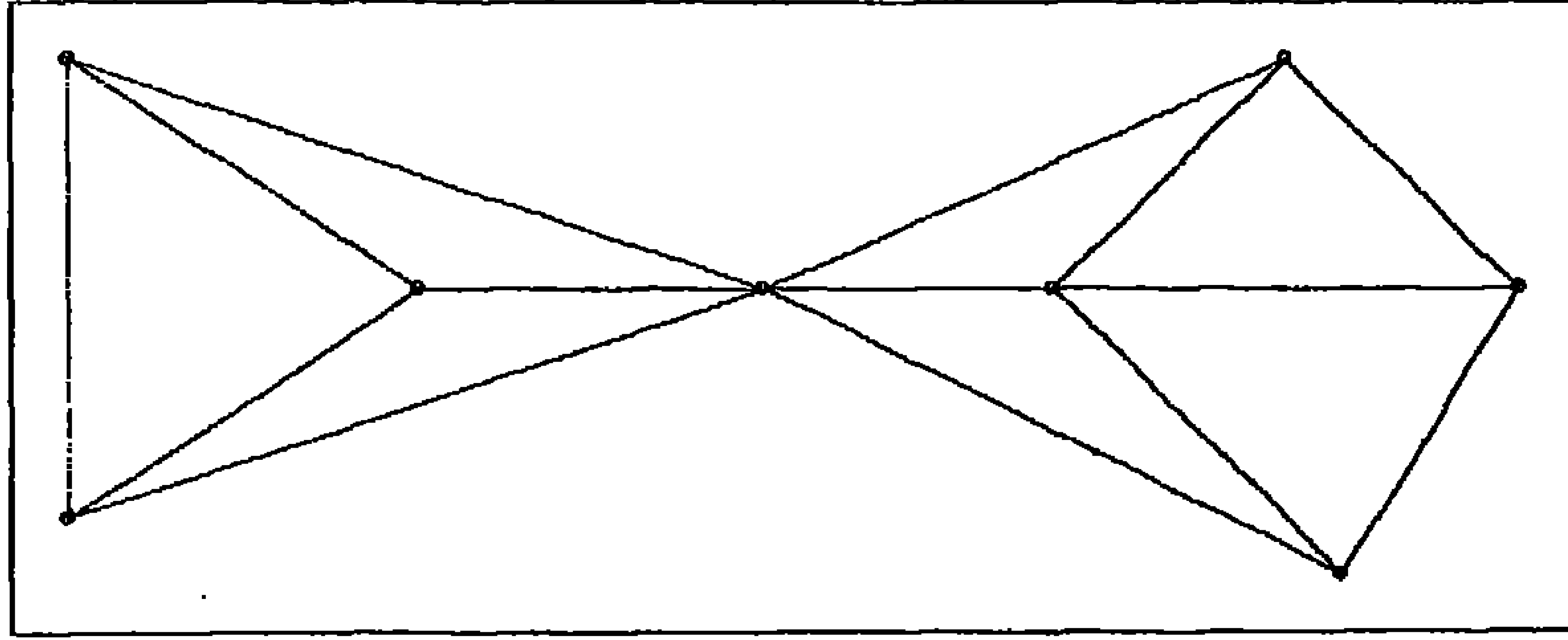
مثال: في المخطط التالي:



معامل إرتباط الرؤوس يساوي 2

معامل إرتباط الأضلاع يساوي 2

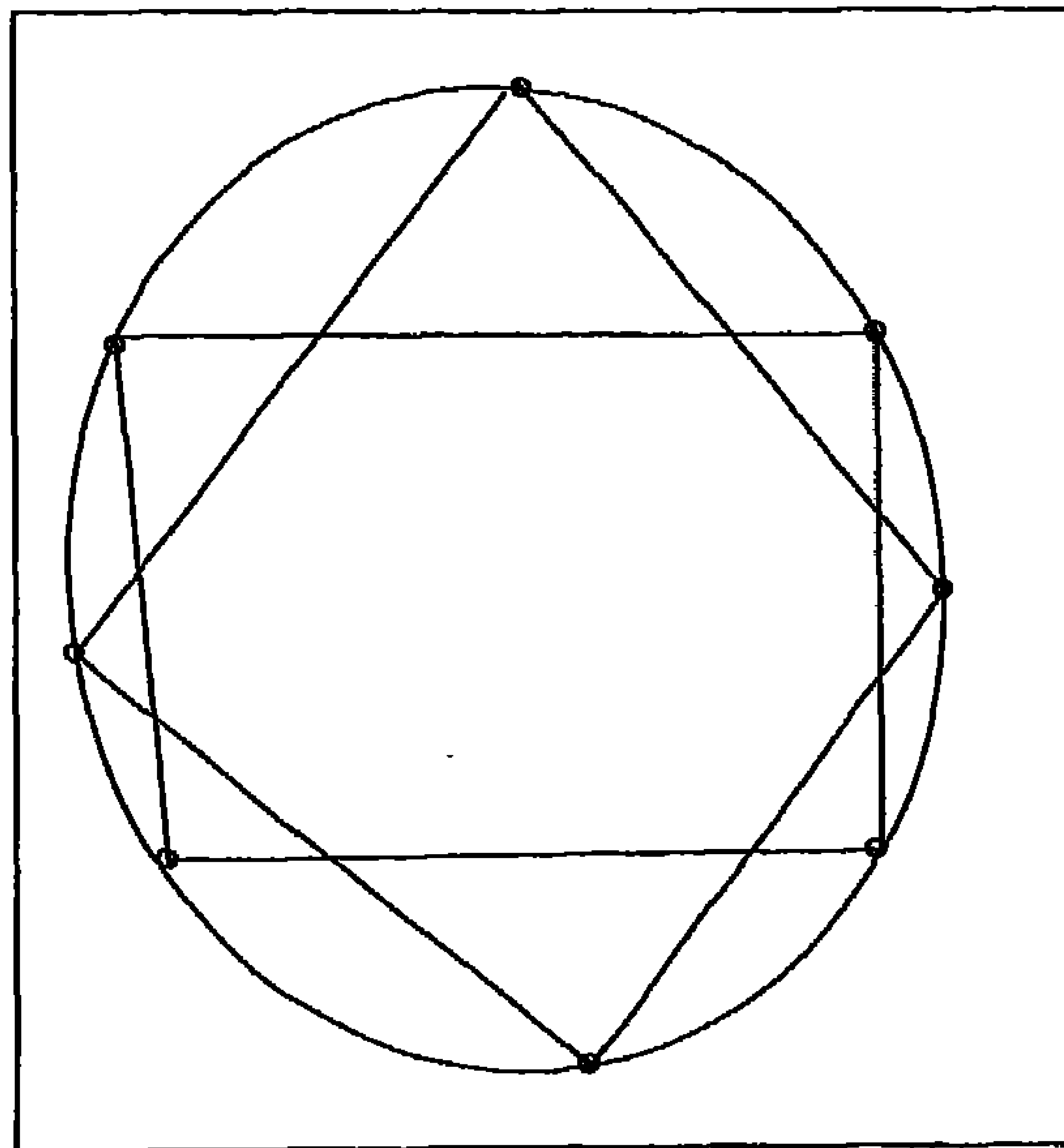
مثال: في المخطط التالي:



معامل إرتباط الرؤوس يساوي 1

ومعامل إرتباط الأضلاع يساوي 3

مثال: في المخطط التالي:



إذا كان المخطط G يوصف شبكة الكهرباء في مدينة ما بحيث تكـون رؤوس المخطـط G هي مجموعة من محططـات الكهربـاء بينمـا أضـلاع المخطـط G هـي كـابلات التوصـيل

الكهربائية فما هو أكبر عدد من المحططات المعطوبة والخطوط التالفة المسموح بها بحيث تكون الشبكة متصلة؟

الحل:

بما أن معامل ارتباط الرؤوس يساوي 4

ومعامل ارتباط الأضلاع يساوي 4

وبالتالي إذا تعطلت أربع محططات كهربائية أو انقطعت أربع خطوط فإن الشبكة سوف تتعطل ومعنى ذلك أن أكبر عدد من المحططات المعطوبة والخطوط التالفة المسموحة لهذه الشبكة بحيث تكون الشبكة متصلة هي إذا تعطلت ثلاث محططات أو انقطعت ثلاث خطوط كهربائية في الشبكة فإن الشبكة سوف تبقى متصلة .

تعريف (8.4.5): إذا كان المخطط G مخطط مترابط فإن:

1. عدد أضلاع أقرب (أصغر- أقصر) مسار من الرأس v_i إلى الرأس v_j يسمى المسافة distance بين الرأسين v_i و v_j ونرمز له بالرمز $d(v_i, v_j)$.
2. إذا كانت v أحد رؤوس المخطط G فإن أكبر مسافة من v إلى v_i لكل $v_i \in V$ تسمى الإختلاف المركزي Eccentricity للرأس v وتعطى ب

$$E(v) = Max_{v_i \in V}\, d(v, v_i)$$

3. مركز المخطط G هي الرأس التي لها أصغر إختلاف مركزي من G. ومن الممكن أن يحتوي المخطط على أكثر من مركز.
4. قطر Diameter المخطط G هي أكبر مسافة بين رأسين من رؤوس المخطط ونرمز لها بالرمز D(G) وتعرف ب

$$D(G) = Max\{d(v_i, v_j): v_i, v_j \in V\}$$

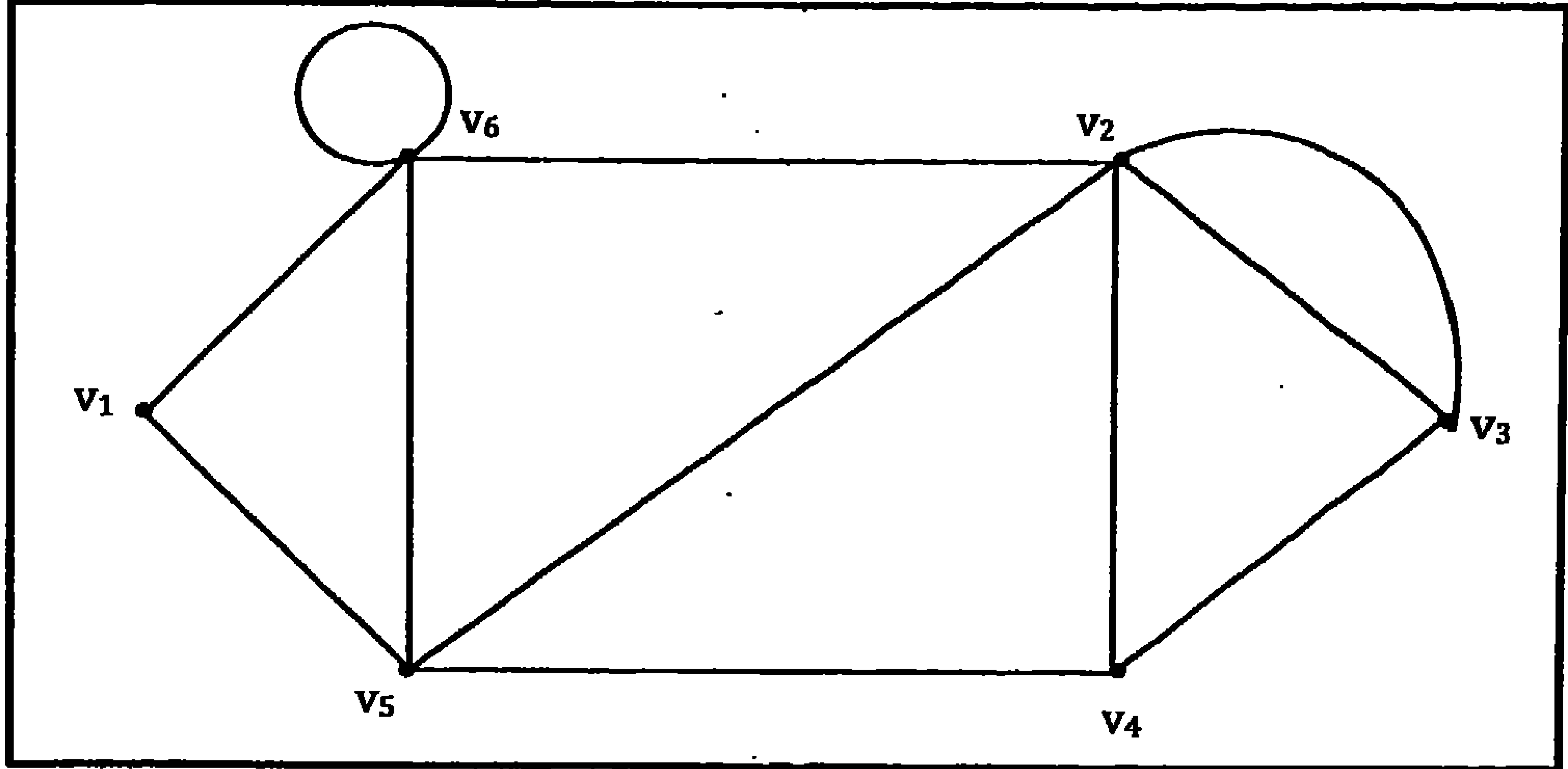
5. إذا كان v_0 مركز المخطط G فإن الإختلاف المركزي للرأس v_0 تسمى نصف قطر Radius المخطط G ونرمز له بالرمز r.

ملاحظات: إذا كانت u, v, w ثلاث رؤوس في المخطط G فإن:

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = d(v, u)$
3. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

4. $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$

مثال: إحسب الإختلاف المركزي للرأس v_1 في المخطط التالي:



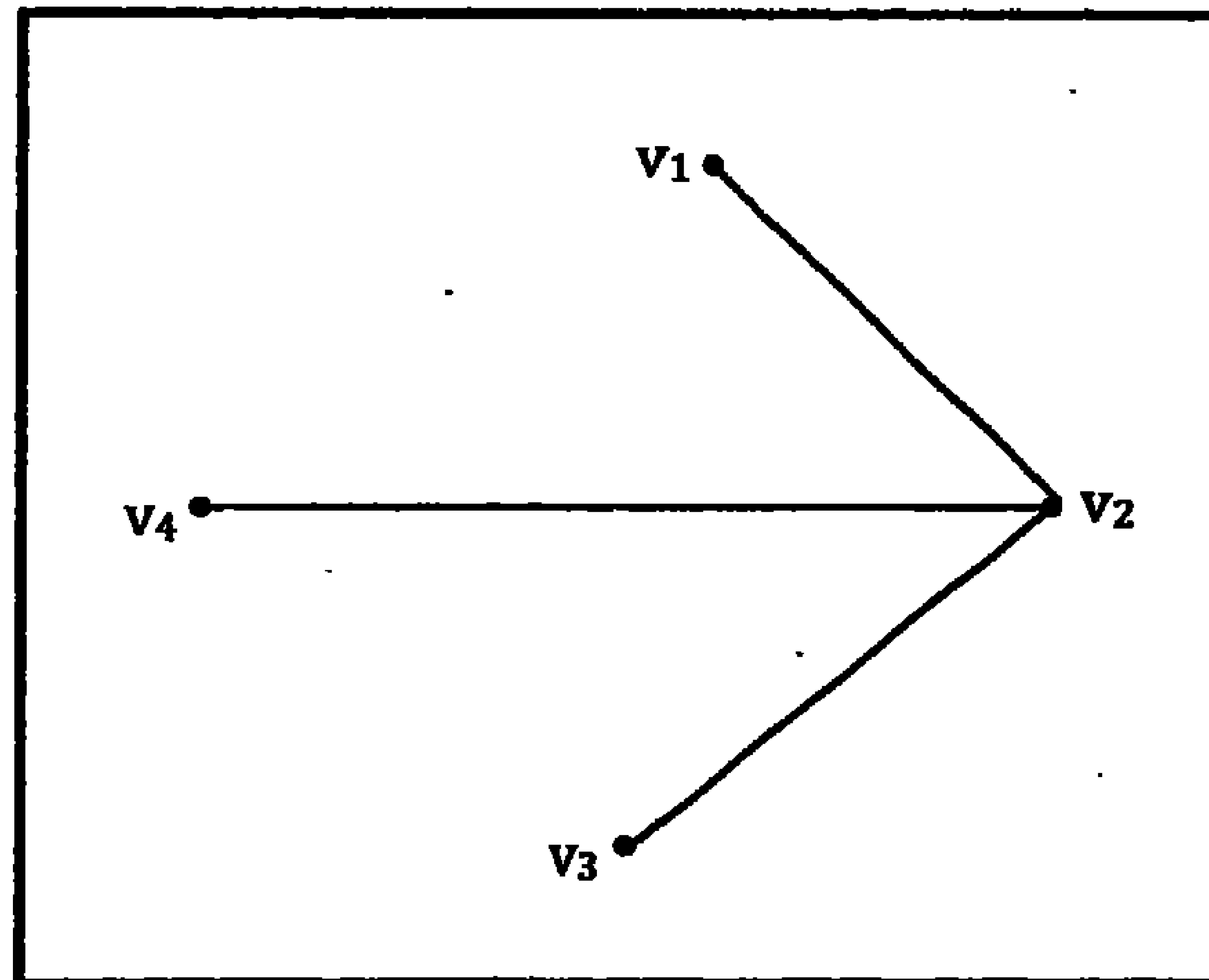
الحل:

$d(v_1,v_2) = 2,\quad d(v_1,v_3) = 3,\quad d(v_1,v_4) = 2,$

$d(v_1,v_5) = 1,\quad d(v_1,v_6) = 1$

إذن الإختلاف المركزي للرأس v_1 يكون $E(v_1)=3$

مثال: إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



الحل:

الجدول التالي يوضح قيم المسافة بين رؤوس المخطط G:

	v_1	v_2	v_3	v_4	$E(v_i)$
v_1	0	1	2	2	2
v_2	1	0	1	1	1
v_3	2	1	0	2	2
v_4	2	1	2	0	2

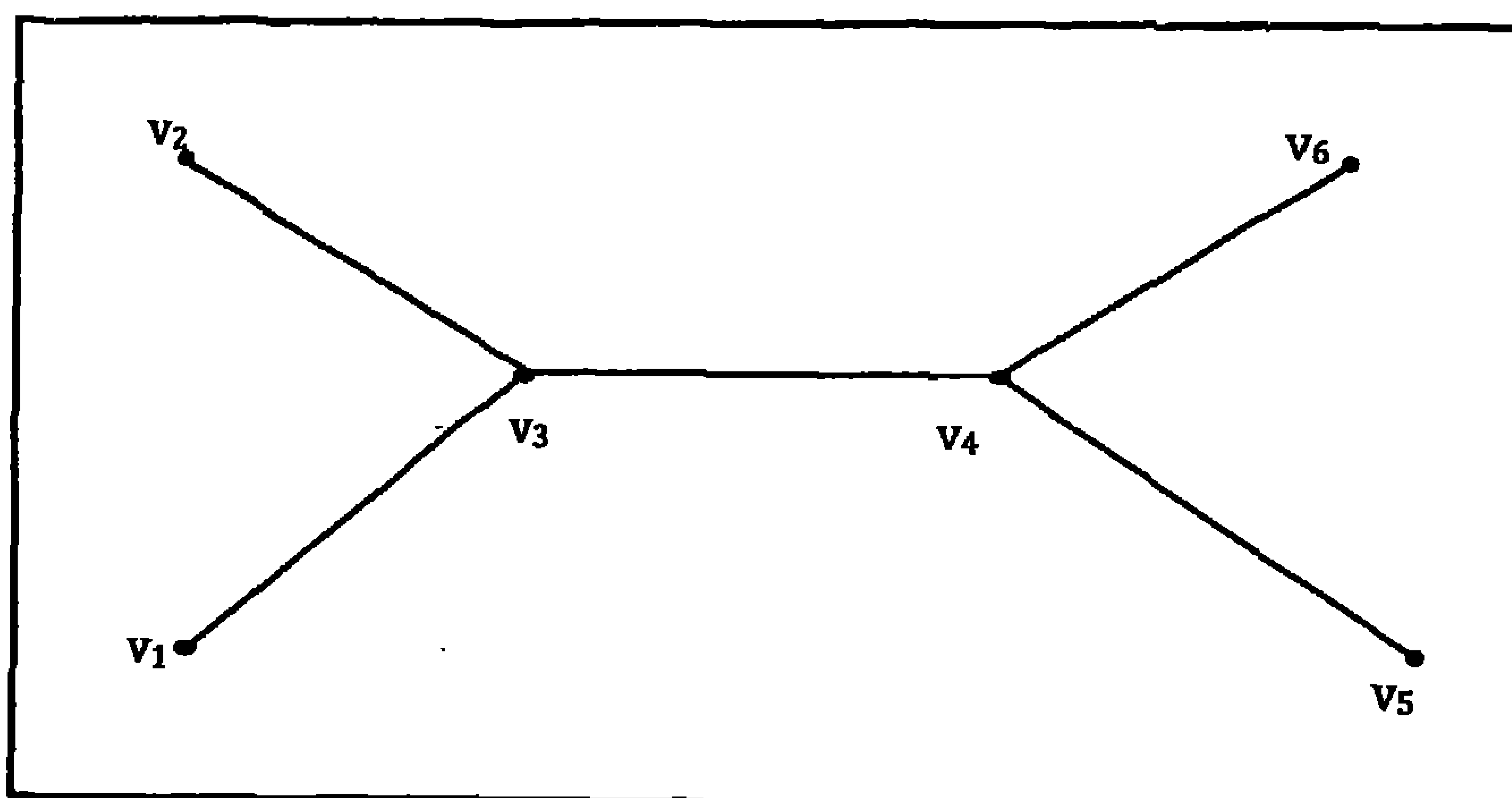
إذن:

$E(v_1) = 2, \quad E(v_2) = 1, \quad E(v_3) = 2, \quad E(v_4) = 2$

إذن مركز المخطط G هو v_2 وقطر المخطط G هو $D(G)=2$.

ونصف قطر المخطط G هي $r = E(v_2) = 1$

مثال: إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



الحل:

الجدول التالي يوضح قيم المسافة بين رؤوس المخطط G:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$E(v_i)$
v_1	0	2	1	2	3	3	3
v_2	2	0	1	2	3	3	3
v_3	1	1	0	1	2	2	2
v_4	2	2	1	0	1	1	2
v_5	3	3	2	1	0	2	3
v_6	3	3	2	1	2	0	3

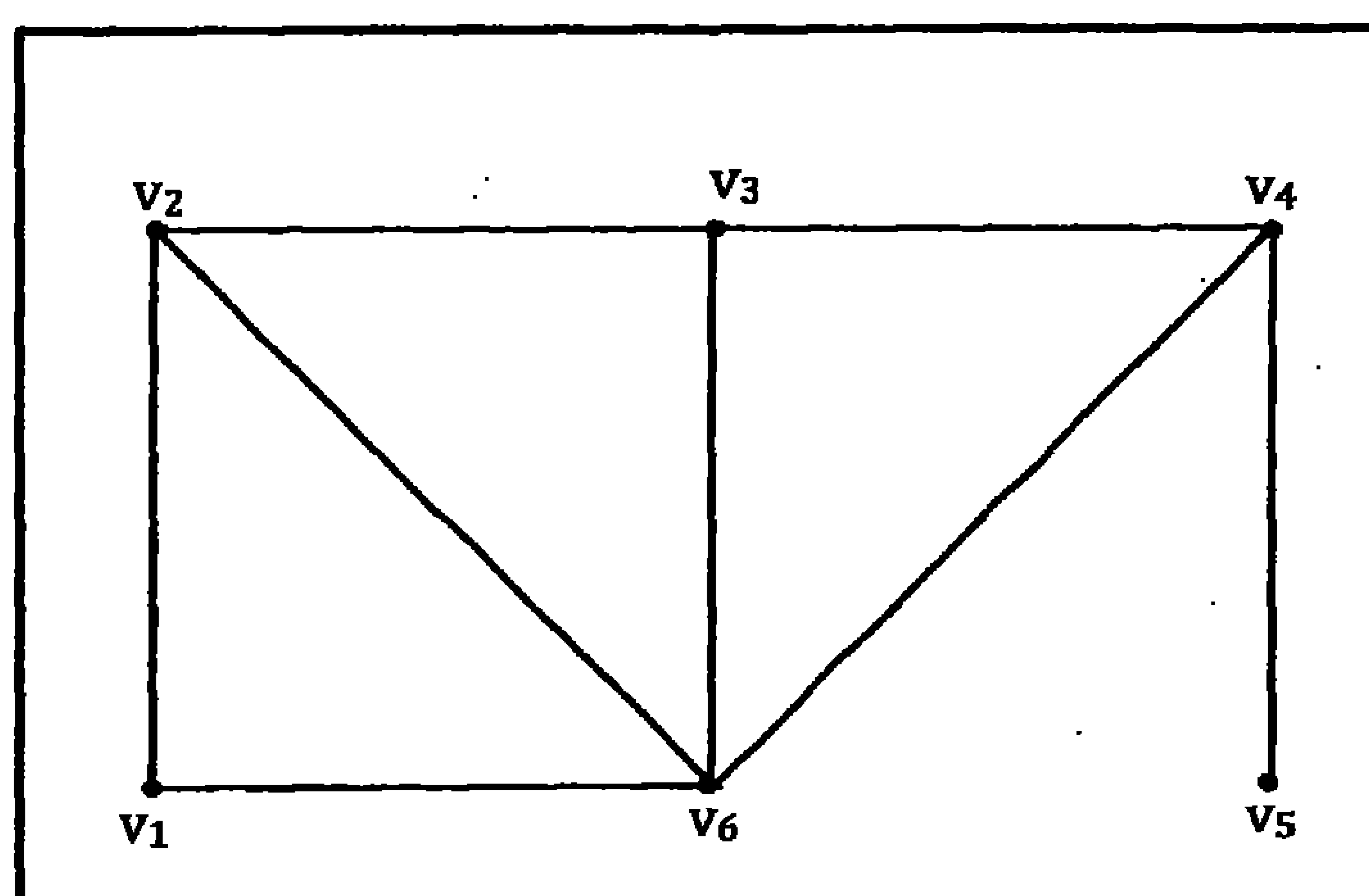
إذن:

$$E(v_1) = 3, E(v_2) = 3, E(v_3) = 2, E(v_4) = 2, E(v_5) = 3, E(v_6) = 3$$

إذن يوجد مركزين للمخطط G هما v_3 و v_4 وقطر المخطط G هو $D(G)=3$.

ونصف قطر المخطط G هي $r = E(v_3) = E(v_4) = 2$

مثال: إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



الحل:

الجدول التالي يوضح قيم المسافة بين رؤوس المخطط G:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$E(v_i)$
v_1	0	1	2	2	3	1	3
v_2	1	0	1	2	3	1	3
v_3	2	1	0	1	2	1	2
v_4	2	2	1	0	1	1	2
v_5	3	3	2	1	0	2	3
v_6	1	1	1	1	2	0	2

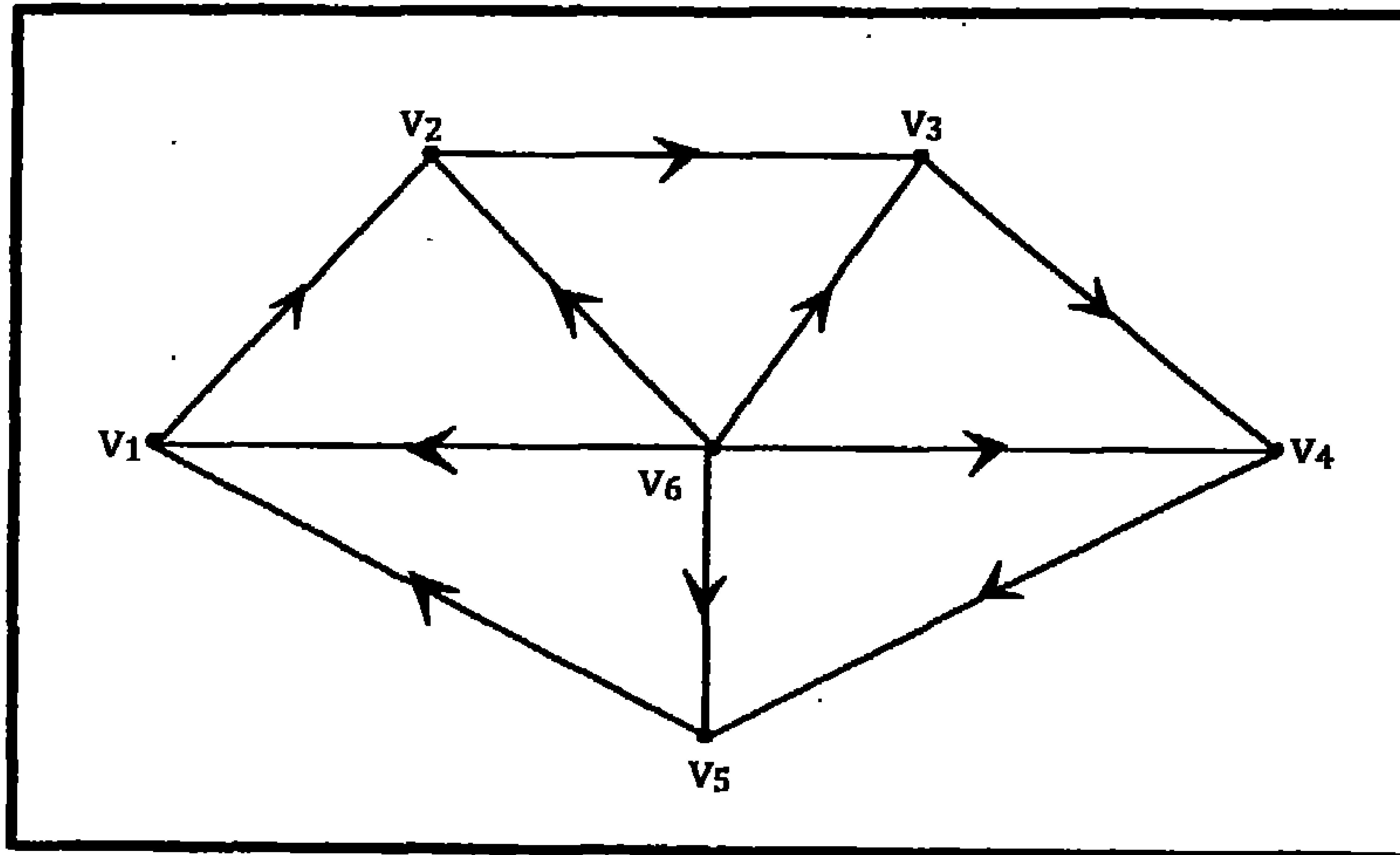
إذن:

$$E(v_1) = 3, E(v_2) = 3, E(v_3) = 2, E(v_4) = 2, E(v_5) = 3, E(v_6) = 2$$

إذن يوجد ثلاث مراكز للمخطط G هما v_3 و v_4 و v_6 وقطر المخطط G هو $D(G)=3$.

ونصف قطر المخطط G هي $r = E(v_3) = E(v_4) = E(v_6) = 2$

مثال: إحسب المسافة بين رؤوس المخطط الاتجاهي ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



الحل:

الجدول التالي يوضح قيم المسافة بين رؤوس المخطط G:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$E(v_i)$
v_1	0	1	2	3	4	5	5
v_2	1	0	1	2	2	2	2
v_3	1	2	0	1	1	1	2
v_4	4	3	4	0	1	2	4
v_5	3	2	3	4	0	1	4
v_6	2	1	2	3	3	0	3

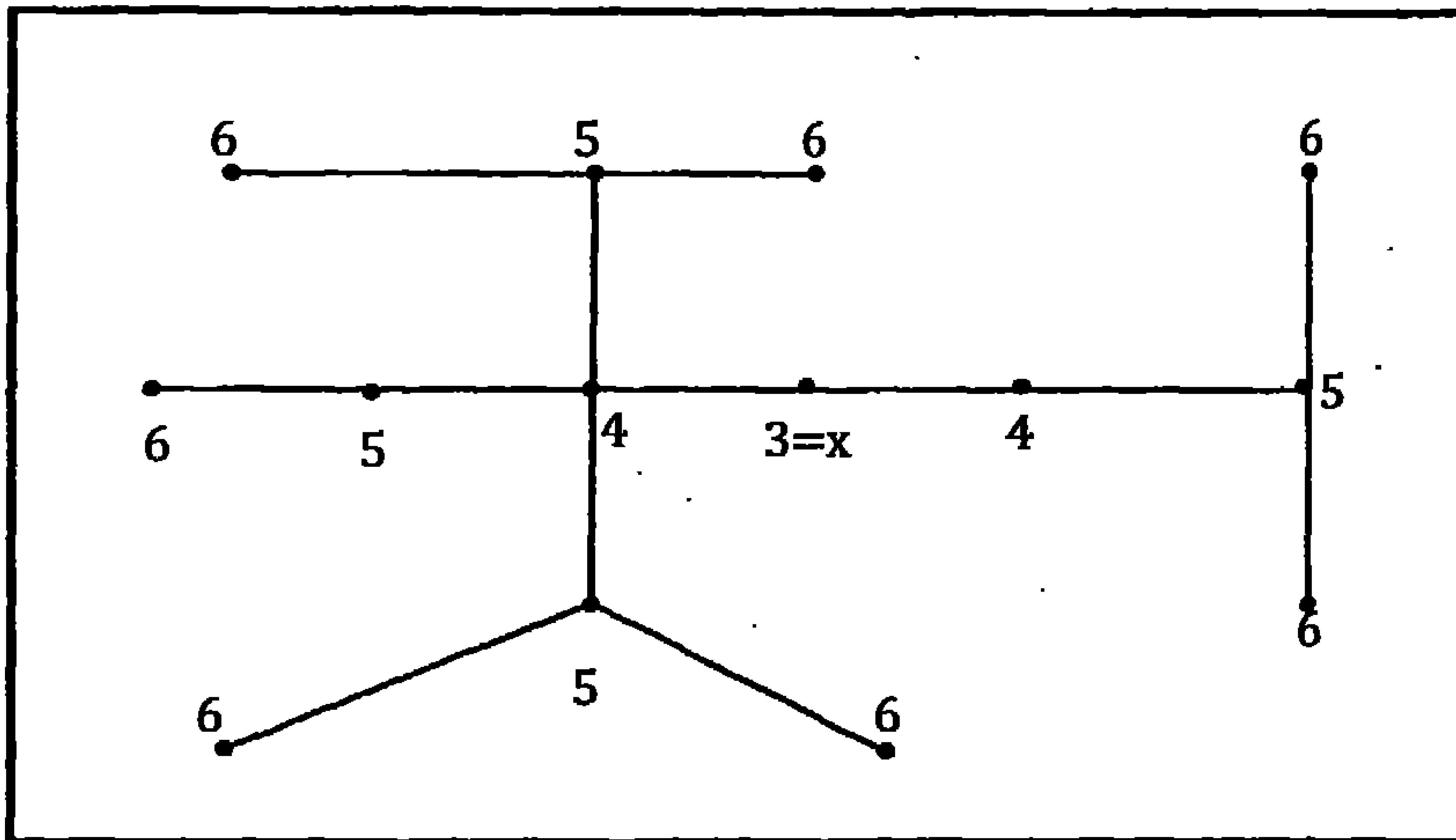
إذن:

$$E(v_1) = 5, E(v_2) = 2, E(v_3) = 2, E(v_4) = 4, E(v_5) = 4, E(v_6) = 3$$

إذن يوجد مركزين للمخطط G هما v_2 و v_3 وقطر المخطط G هو D(G)=5 .

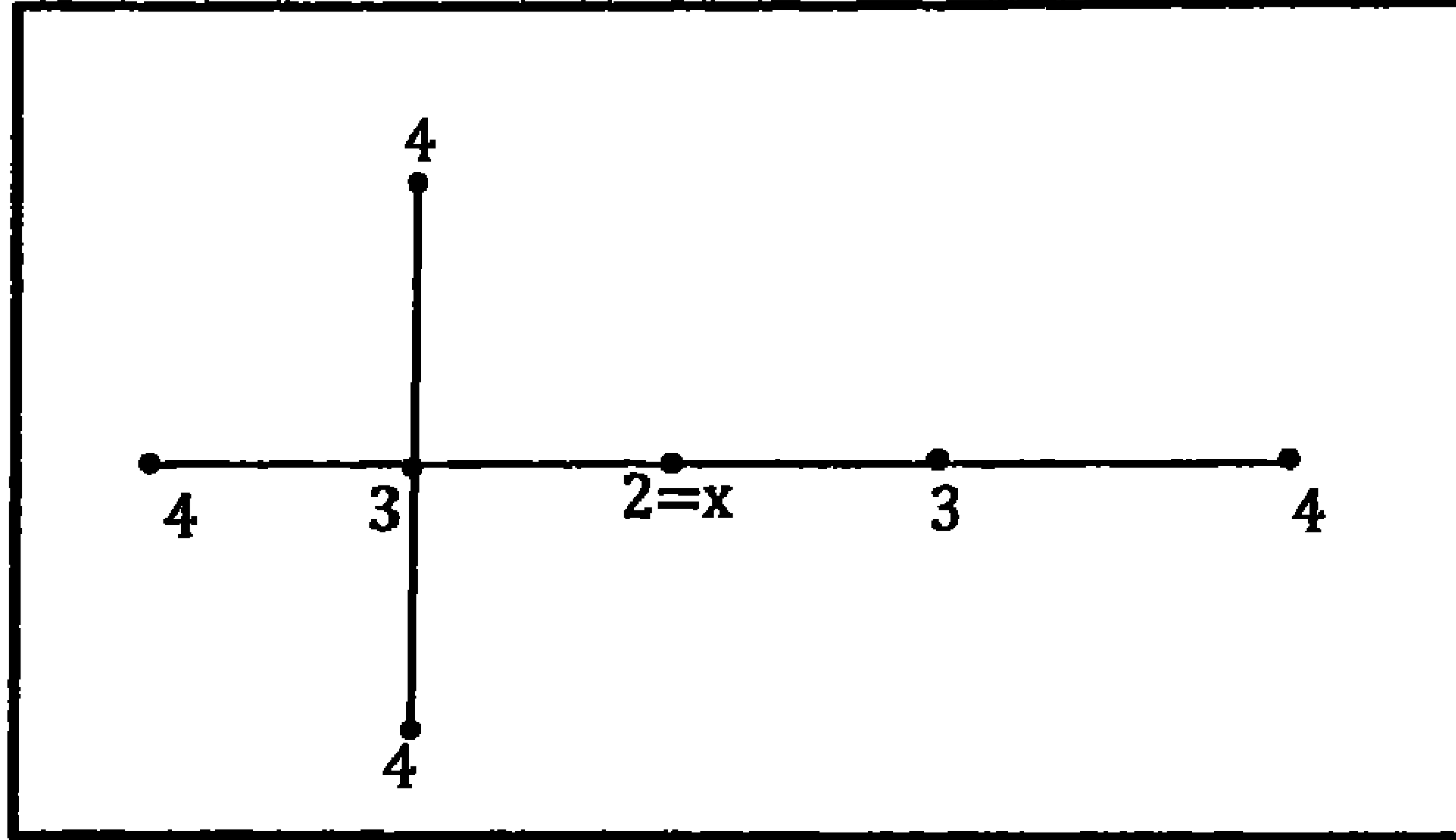
ونصف قطر المخطط G هي $r = E(v_2) = E(v_3) = 2$

مثال: في المخطط التالي و بجانب كلاً من رؤوسه الإختلاف المركزي:



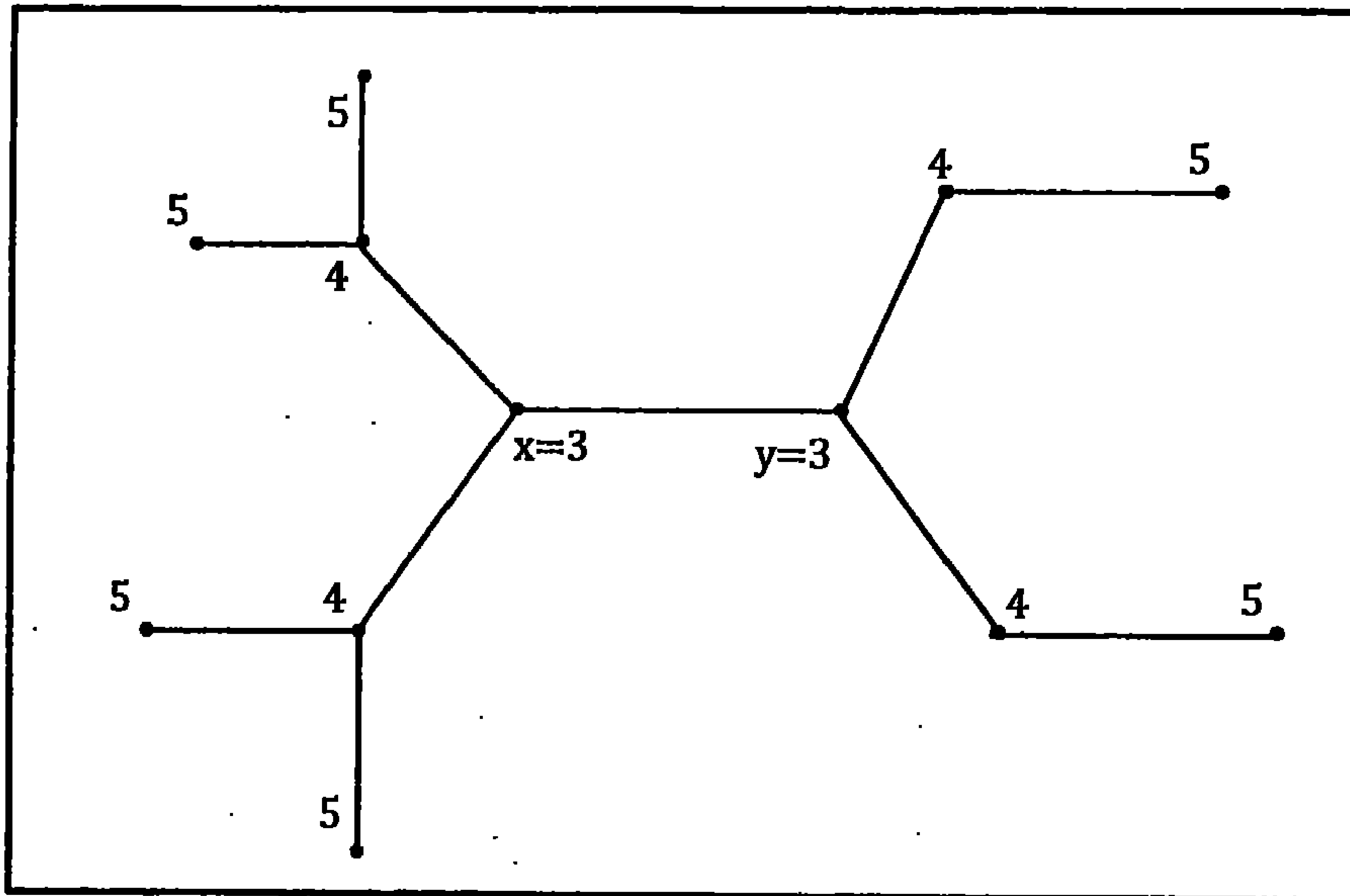
وبالتالي فالمركز هو الرأس x.

مثال: في المخطط التالي و بجانب كلاً من رؤوسه الإختلاف المركزي:



وبالتالي الرأس x تملك أصغر إختلاف مركزي =2 وبالتالي فهي تمثل مركز المخطط.

مثال: في المخطط التالي وبجانب كلاً من رؤوسه الإختلاف المركزي:

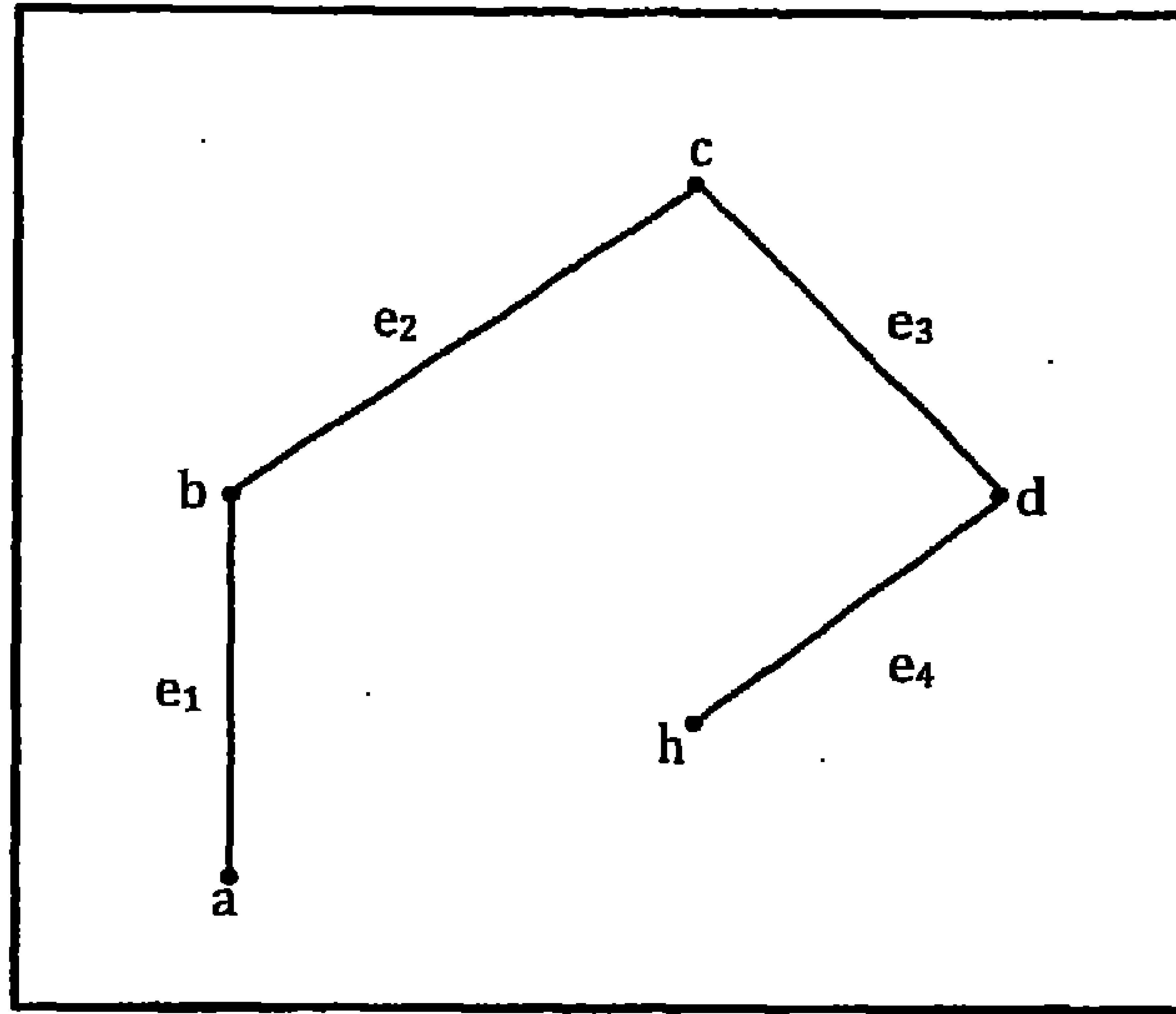


إذن يوجد رأسان x, y يملكان أصغر إختلاف مركزي = 3 وبالتالي فهما يمثلان مركزان للمخطط .

(8-5) مسارات ودارات أويلر Euler Paths and Circuits

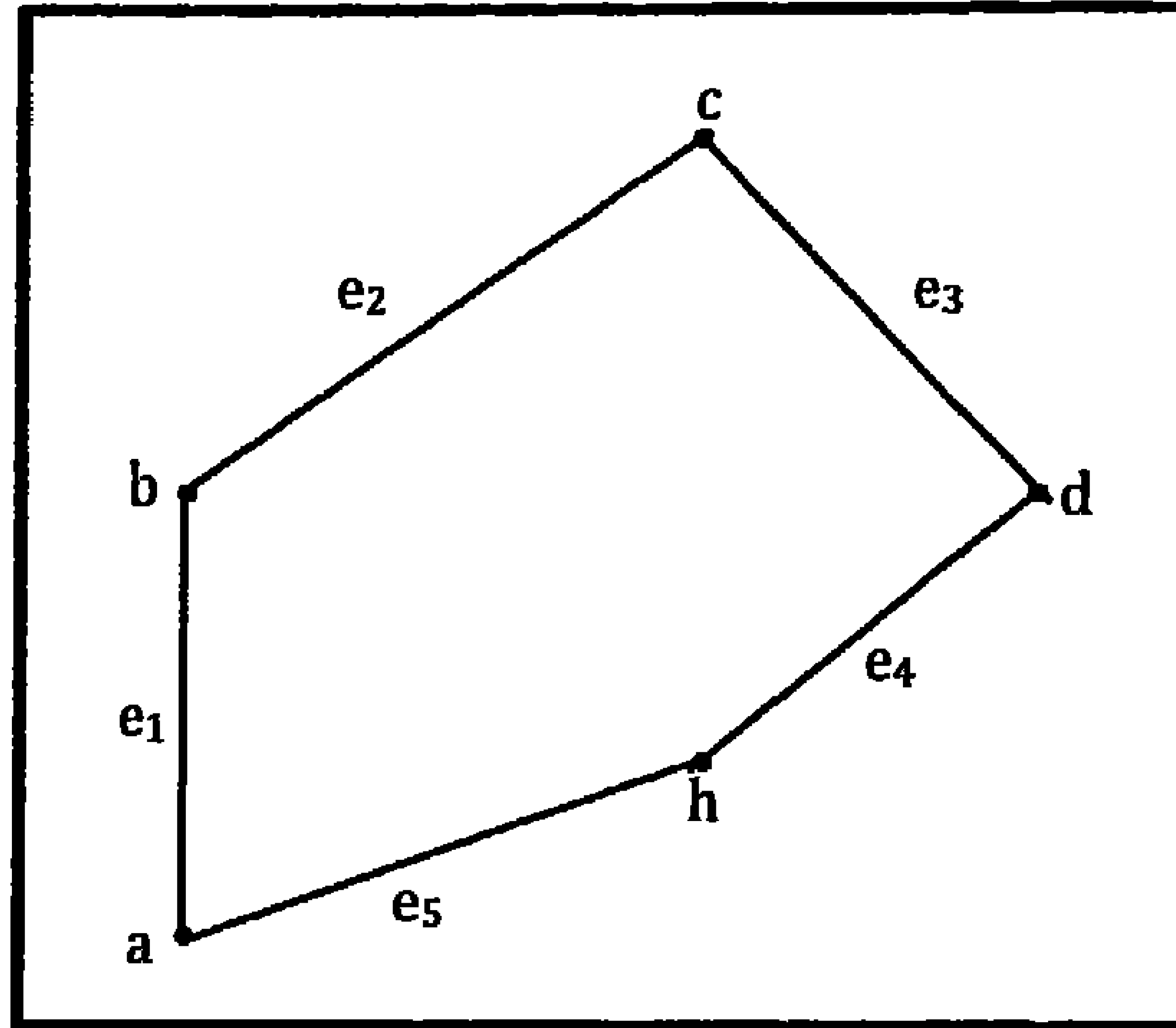
1. المسار الذي يمر بجميع أضلاع المخطط G بدون إستثناء يسمى مسار أويلر و الدارة الـتي تمر بجميع أضلاع المخطط G بدون إستثناء تسمى دارة أويلر.
2. كل مخطط يحتوي على مسار أويلر أو دارة أويلر يكون مخطط مترابط.
3. عدد الأضلاع في مسار أويلر أو دارة أويلر يساوي نفس عدد أضلاع المخطط G .
4. بما أن كل دارة هي بالفعل تشكل مسار فإن دارة أويلر سوف تكون مسـار أويلـر بينمـا العكس ليس ضروري أن يكون صحيح.

مثال: في المخطط التالي:



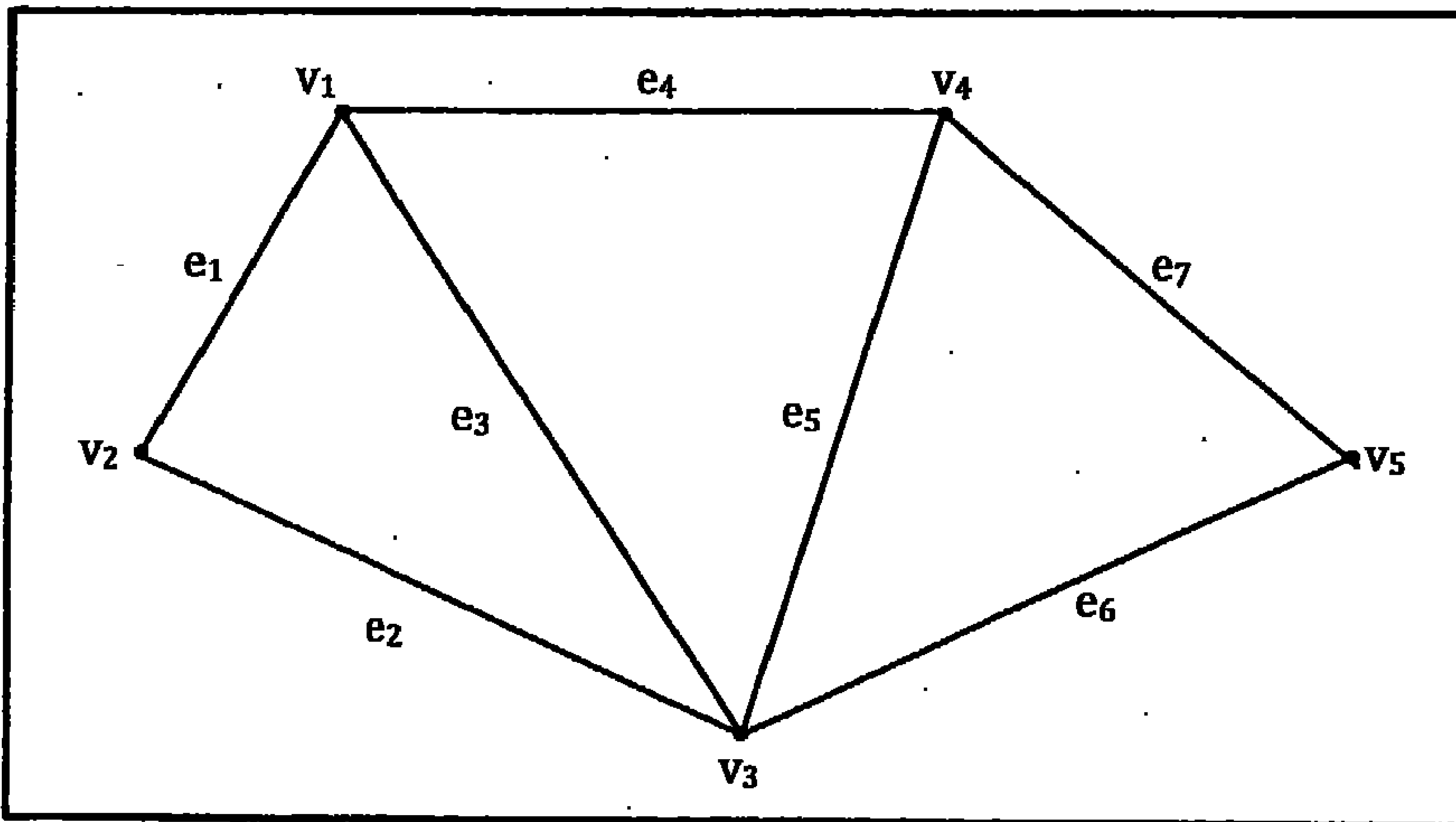
المسار (e_1, e_2, e_3, e_4) هو مسار أويلر يبدأ من الراس a وينتهي بالرأس h .

مثال: في المخطط التالي:



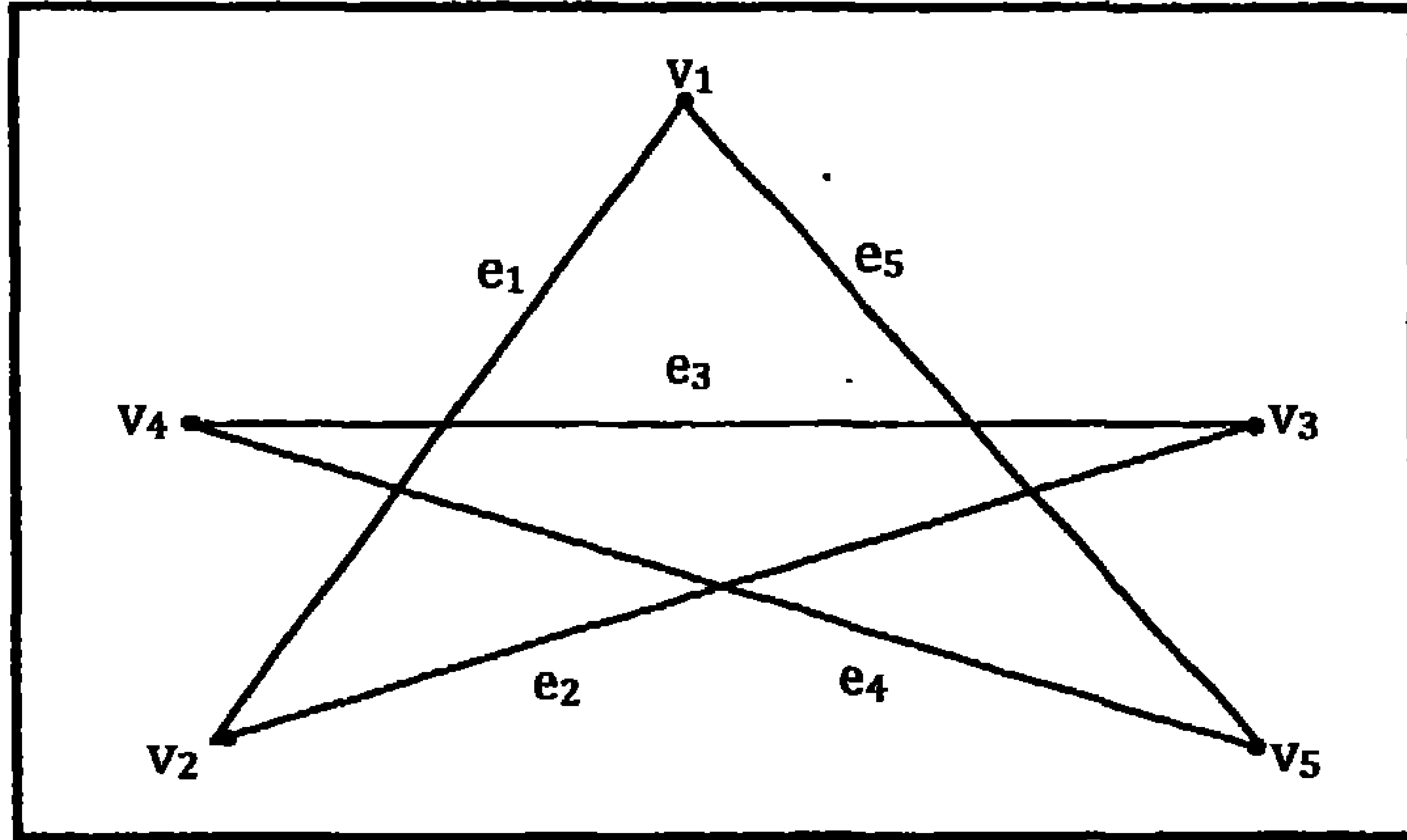
المسار $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ هو دارة أويلر يبدأ وينتهي بالرأس a.

مثال: في المخطط التالي:



المسار $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ هو مسار أويلر يبدأ من الرأس v_1 وينتهي بالرأس v_4 .

مثال: في المخطط التالي:



المسار $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ هو دارة أويلر يبدأ وينتهي بالرأس v_1.

نظرية (8.5.1) : في المخطط المترابط G يوجد مسار أويلر إذا وفقط إذا كانت جميع رؤوس المخطط G زوجية أو تكون زوجية ما عدا رأسين إثنين.

البرهان:

1. إذا كان المخطط G يحتوي على مسار أويلر فإن جميع رؤوس المخطط G تكون موجودة في هذا المسار وبالتالي فنحن أما حالتان :

- الحالة الأولى: كل رأس في المخطط G تكون بداية ضلع ونهاية ضلع سابق في المخطط G وبالتالي فجميع رؤوس المخطط G تكون زوجية
- الحالة الثانية: كل رأس في المخطط G تكون بداية ضلع ونهاية ضلع سابق في المخطط G ما عدا نقطة البداية ونقطة النهاية فمن الممكن أن يمر بهما ضلع واحد فقط وبالتالي فجميع رؤوس المخطط G تكون زوجية ما عدا رأسين إثنين.

2. نفرض أن جميع رؤوس المخطط G زوجية ما عدا رأس بداية المسار v_1 ورأس نهاية المسار v_n ونريد إيجاد مسار أويلر في المخطط G ؟

بما أن جميع رؤوس المخطط G زوجية أو تكون زوجية ما عدا رأسين إثنين فمن الممكن أن نرسم مسار w_1 يبدأ من الرأس v_1 إلى الرأس v_2 ثم من الرأس v_2 إلى الرأس v_3 وهكذا حتى الوصول إلى نقطة النهاية v_n بشرط عدم تكرار أي ضلع أكثر من مرة خلال المسار وبالتالي فنحن أمام حالتان:

الحالة الأولى: أن جميع أضلاع المخطط G تكون موجودة في المسار w_1 وبالتالي فهذا هو مسار أويلر.

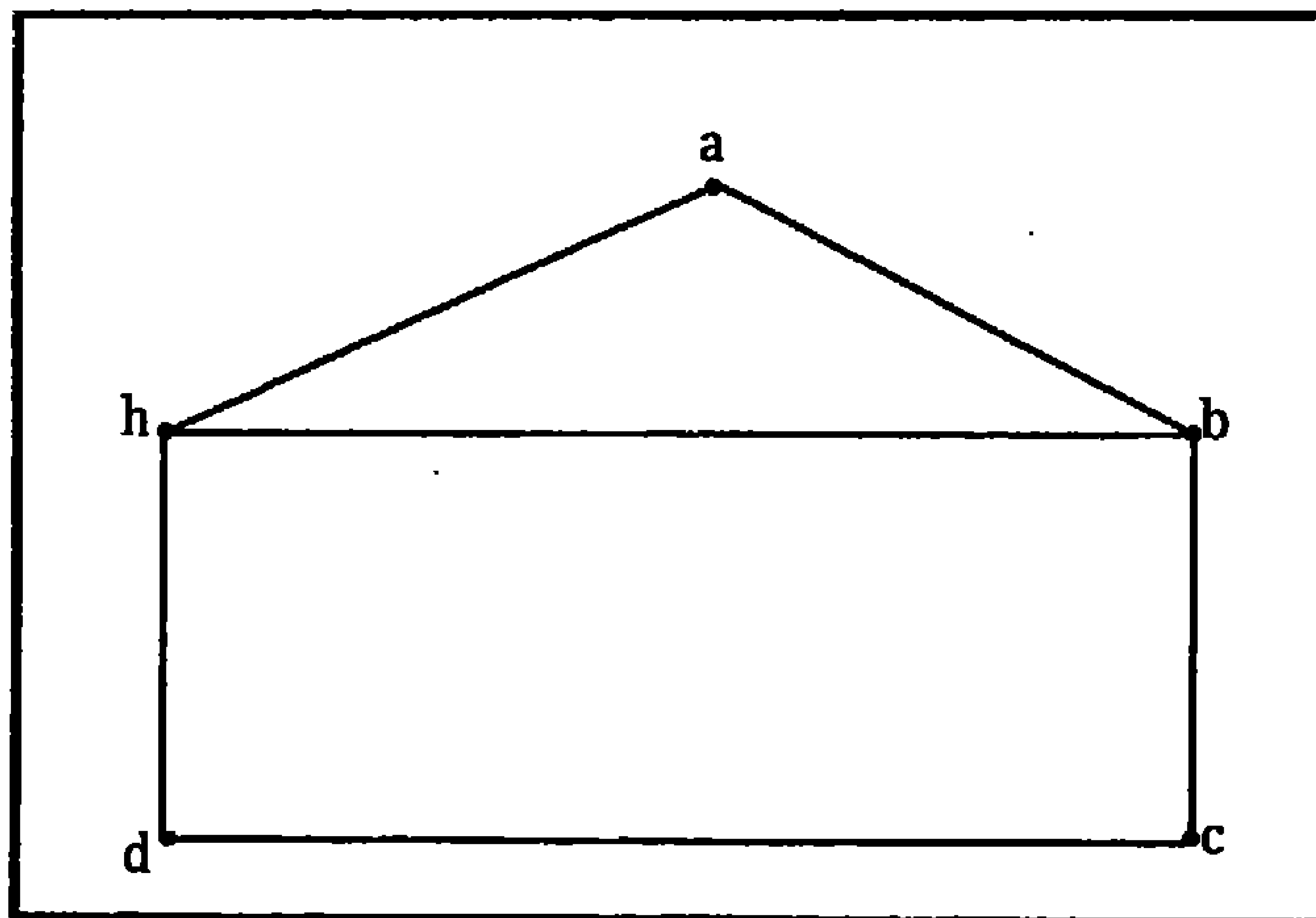
الحالة الثانية: توجد بعض أضلاع المخطط G لا توجد خلال المسار w_1 ففي هذه الحالة نحذف من المخطط G جميع أضلاع المسار w_1 لنحصل على مخطط جزئي G_1 تكون جميع رؤوسة زوجية وبما أن المخطط G مترابط فإنه في المخطط G_1 توجد على الأقل رأس واحدة h بحيث G_1 يلمس المسار w_1 وبما أن جميع رؤوس المخطط G_1 زوجية فمن الممكن أن نرسم مسار جديد w_2 يبدأ وينتهي بالرأس h وبدمج المسارين w_1 و w_2 نحصل على مسار w يبدأ من الرأس v_1 وينتهي عند الرأس v_n وهذا المسار هو مسار أويلر.

نتيجة (8.5.2) : في المخطط المترابط G يوجد دارة أويلر إذا وفقط إذا كانت جميع رؤوس المخطط G زوجية.

البرهان:

من النظرية السابقة (8.5.1) فإنه في المخطط المترابط G يوجد مسار أويلر إذا وفقط إذا كانت جميع رؤوس المخطط G زوجية أو تكون زوجية ما عدا رأسين إثنين. وحيث أن جميع الرؤوس في الدارة تكون زوجية فإن في المخطط المترابط G يوجد دارة أويلر إذا وفقط إذا كانت جميع رؤوس المخطط G زوجية.

مثال : هل المخطط التالي يحتوي مسار أويلر وهل يحتوي على دارة أويلر؟

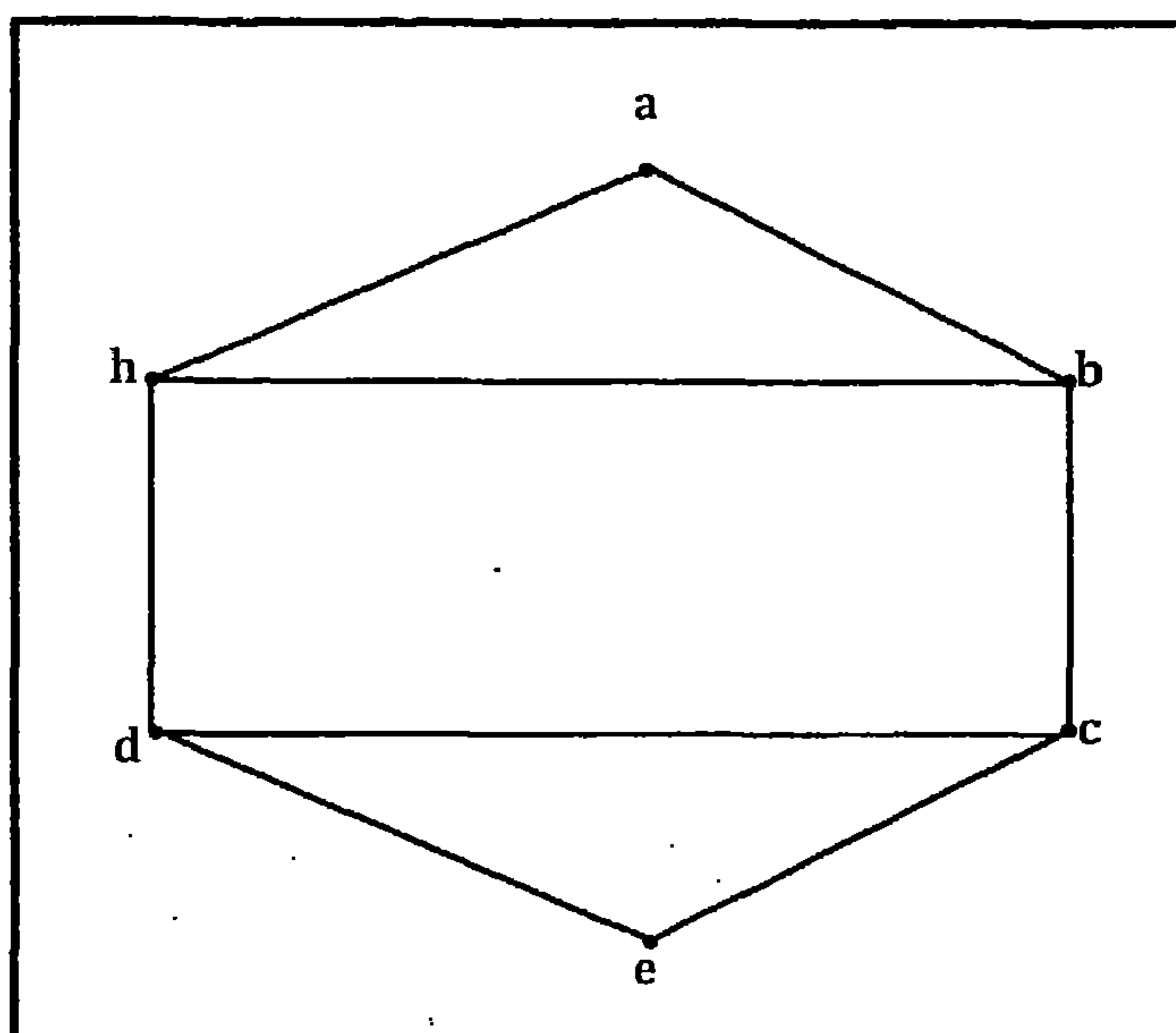


الحل:

أولاً: بما أن كل رؤوس المخطط G زوجية ما عدا رأسين b, h فإن هذا المخطط يحتوي على مسار أويلر.

ثانياً: بما أن المخطط G يحتوي على رؤوس فردية b, h فإن هذا المخطط لا يمثل دارة أويلر.

مثال : هل المخطط التالي يحتوي مسار أويلر وهل يحتوي على دارة أويلر؟

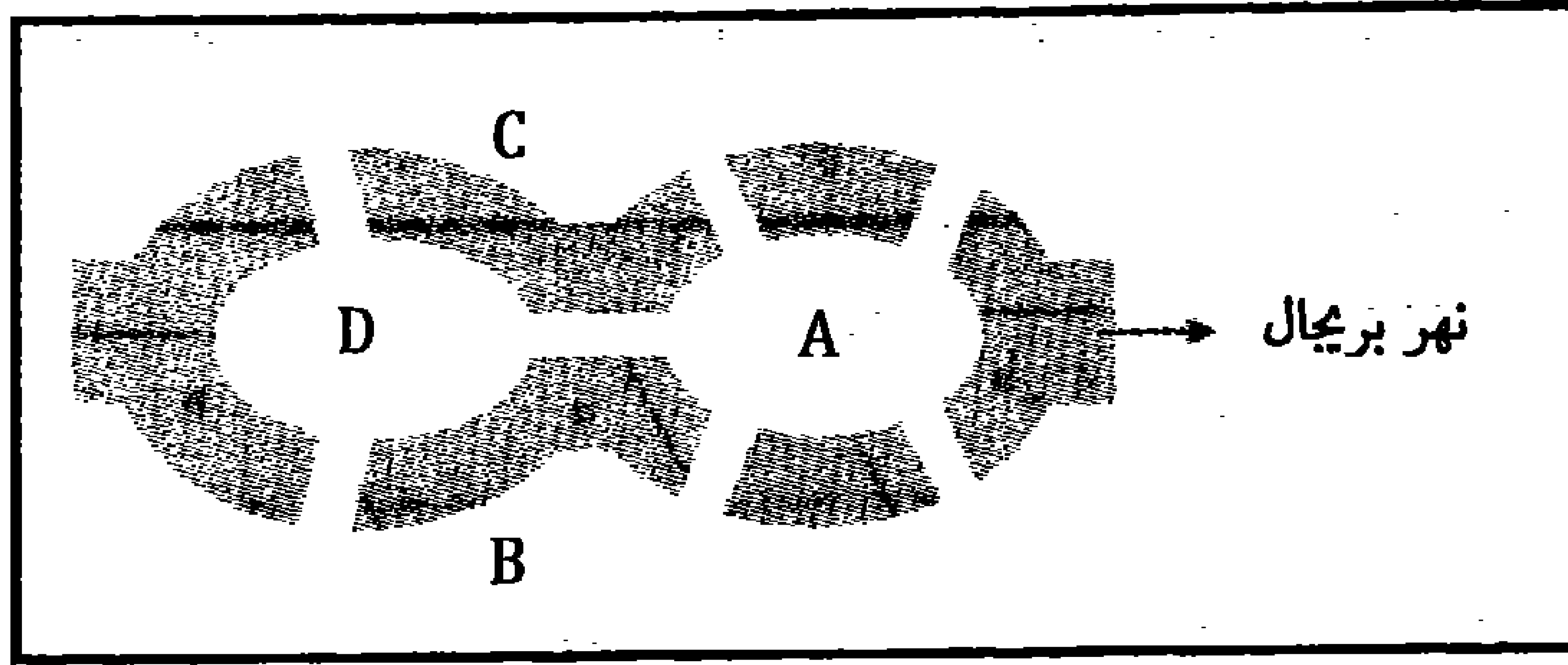


الحل:

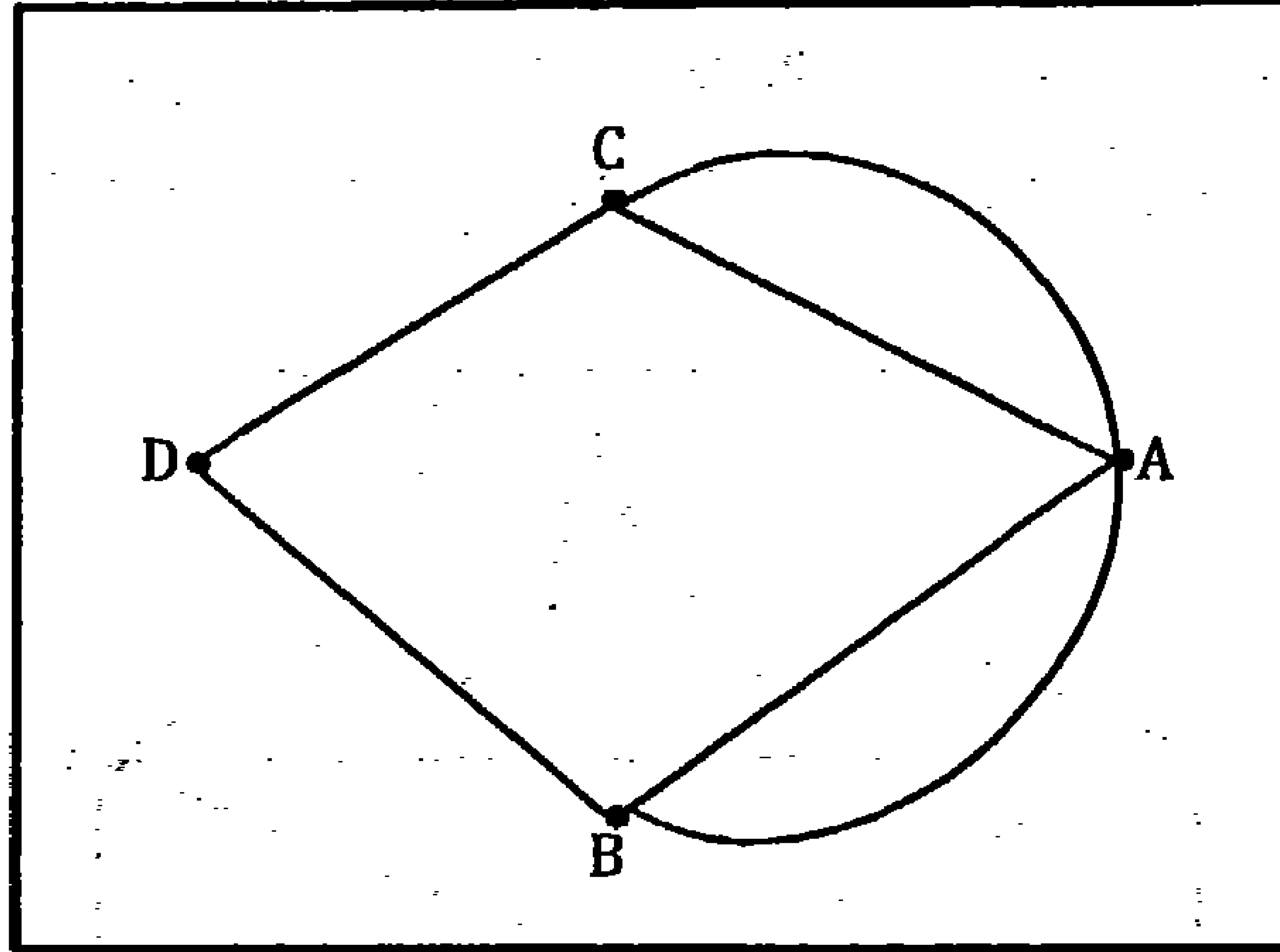
بما أن المخطط G يحتوي على أربع رؤوس فردية b, h, d, c فإن هذا المخطط لا يحتوي على مسار أويلر وبالتالي فإنه أيضاً لا يحتوي على دارة أويلر.

مثال (مسألة الجسور السبعة لمدينة كونكسبرج):

لحل مسألة الجسور السبعة لمدينة كونكسبرج Konigsberg وهي مدينة روسية ويمر بها نهر بريجال Pregel وهذا النهر يقسم المدينه إلى أربعة أجزاء من الأراضي اليابسة وتربطها سبعة جسور والمطلوب هو الإنطلاق من أي جزء من الأجزاء اليابسة الأربعة للمدينة وعبور جميع الجسور السبعة مرة واحدة فقط ثم الرجوع إلى نفس نقطة البداية. وسوف نعرض حل هذا السؤال الأن.



لقد حل أويلر هذا السؤال بإستخدام مفهوم مسار أويلر حيث إنه مثل اليابسة بالرؤوس A, B, C, D ومثل الجسور السبعة بالأضلاع الواصلة بينهم كما بالشكل التالي:



وبالتالي بإستخدام مفهوم مسار أويلر سيكون السؤال هل المخطط G يمثل دارة أويلر ؟

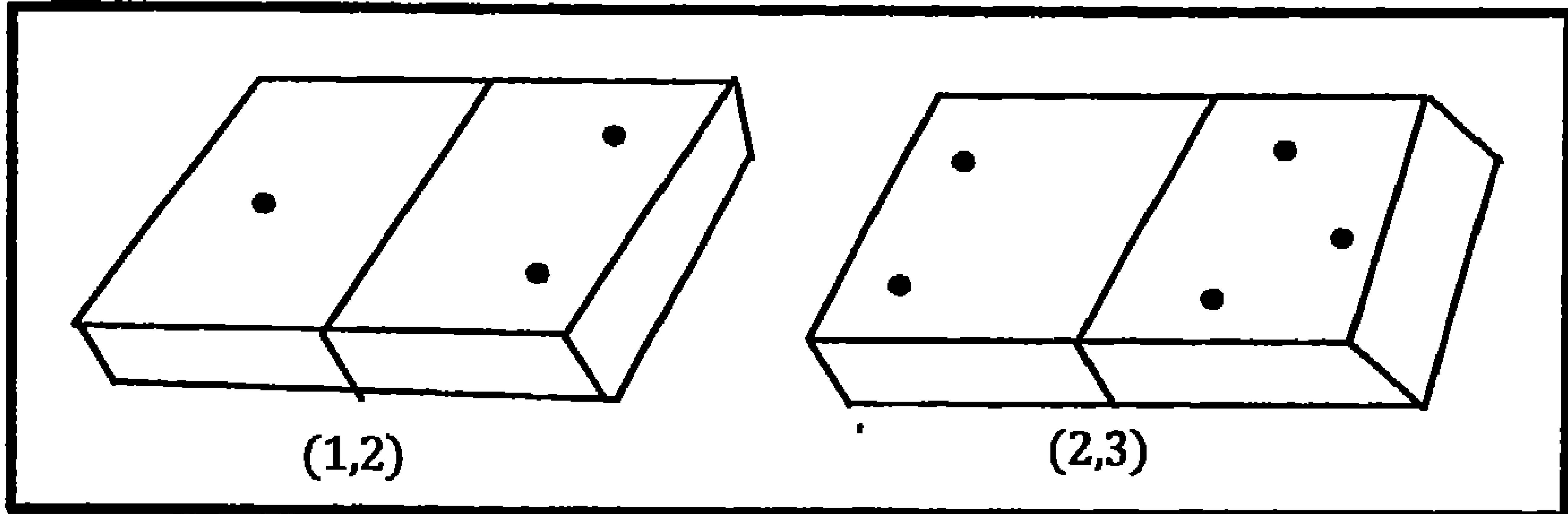
والجواب لا لأن الرأس C والرأس B كلاهما له الدرجة 3 وبالتالي فهما رؤوس فردية وبالتالي فرؤوس المخطط G ليست كلها زوجية إذن المخطط G لا يمثل دارة أويلر وهذا يعني إنه لا يمكن لشخص ما أن يبدأ رحلة من إحدى اليابسات A, B, C, D مرورا بالجسور السبعة ثم يعود في النهاية إلى نفس اليابسة التي إنطلق منها.

مثال (مسألة ترتيب أحجار لعبة الدمينو):

هل يمكن ترتيب قطع الدمينو التالية:

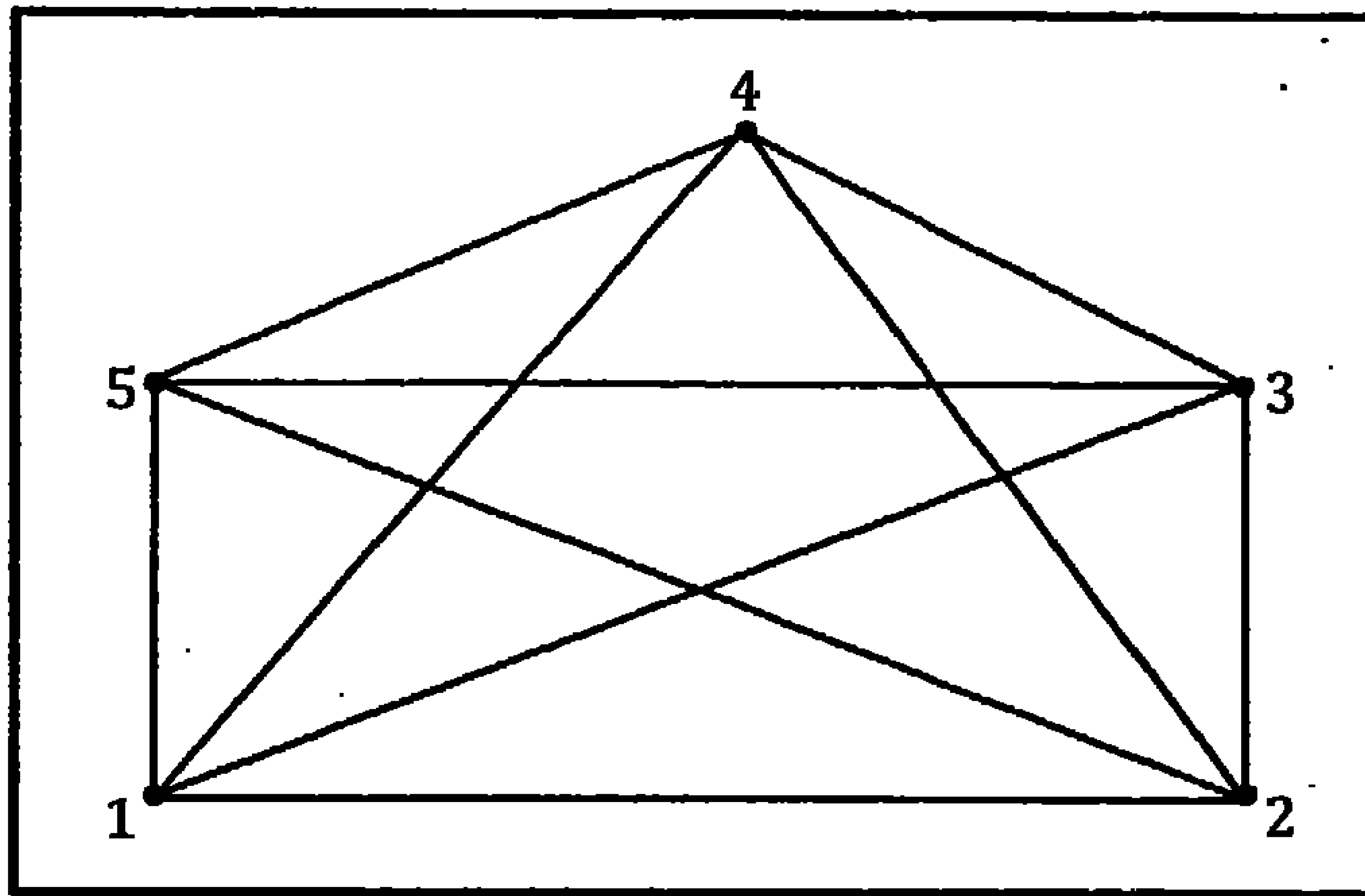
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)

على شكل دائرة بحيث يكون نهاية القطعة الأولى يساوي بداية القطعة الثانية التي تلية في الترتيب؟



الحل:

لحل هذا السؤال بإستخدام المخططات فإذا كانت (a, b) قطعة دمينو فإننا نرسم رأسين a, b ونمثل القطعة (a, b) بضلع يصل بين الرأسين وبالتالي يكون لدينا المخطط التالي:



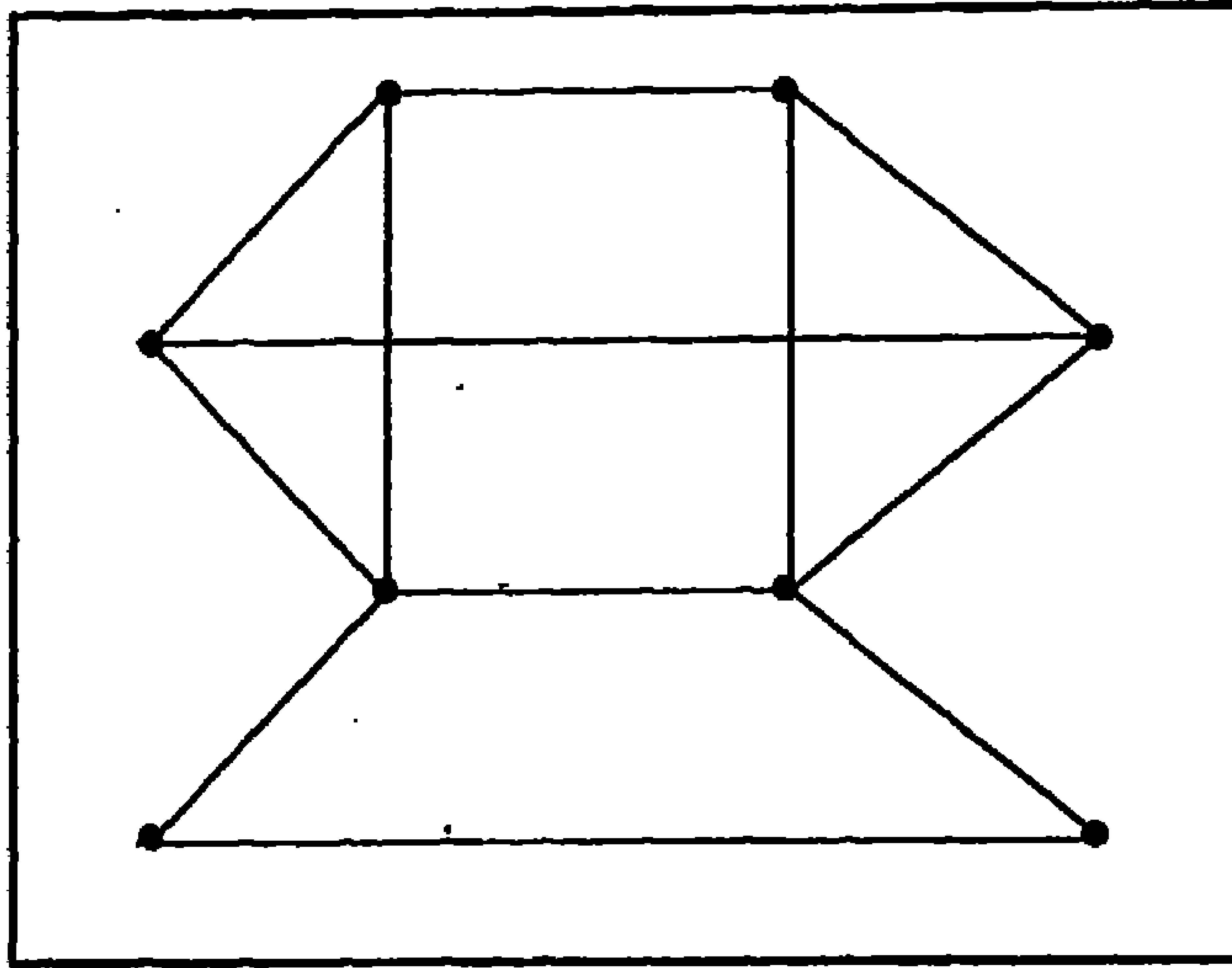
وبما أن جميع رؤوس المخطط هي رؤوس زوجية فإن المخطط يحتوي على دارة أويلر وبالتالي يمكن ترتيب قطع الدمينو المعطاة في السؤال بشكل دائري بحيث تكون نهاية القطعة الأولى هي نفسها بداية القطعة الثانية.

(8-6) مسارات ودارات هاملتون Hamilton Paths and Circuits

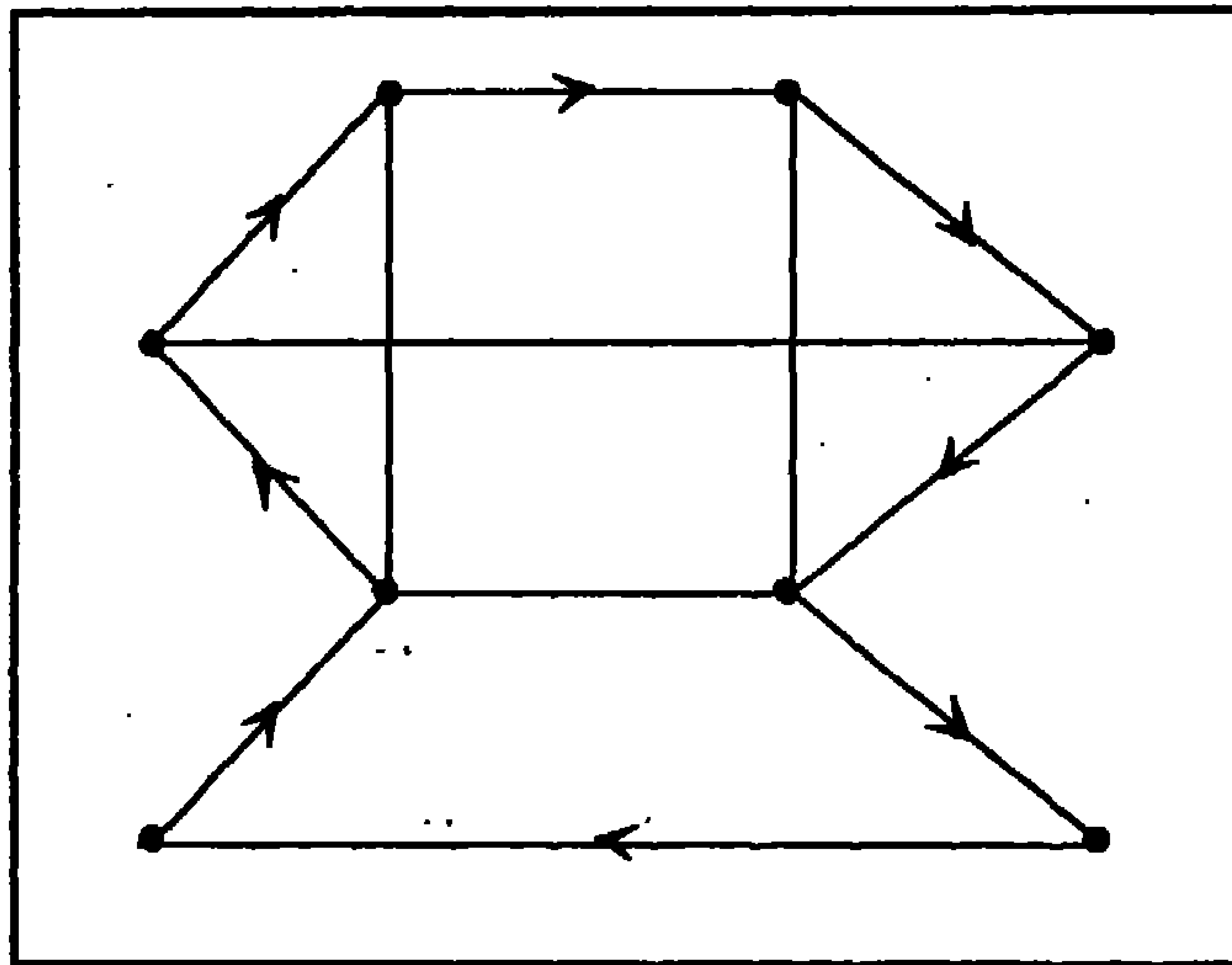
1. المسار الذي يمر بجميع رؤوس المخطط G مرة واحدة فقط وبدون إستثناء يسمى مسار هاملتون و الدارة التي تمر بجميع رؤوس المخطط G مرة واحدة فقط وبدون إستثناء تسمى دارة هاملتون (طبعا ماعدا نقطة البداية والتي هي تكون نفسها نقطة النهاية).

2. كل مخطط يحتوي على مسار هاملتون أو دارة هاملتون يكون مخطط مترابط.
3. كل دارة هي بالفعل تشكل مسار وبالتالي فكل دارة هاملتون هي أيضاً تكون مسار هاملتون بينما العكس ليس ضروري أن يكون صحيح.

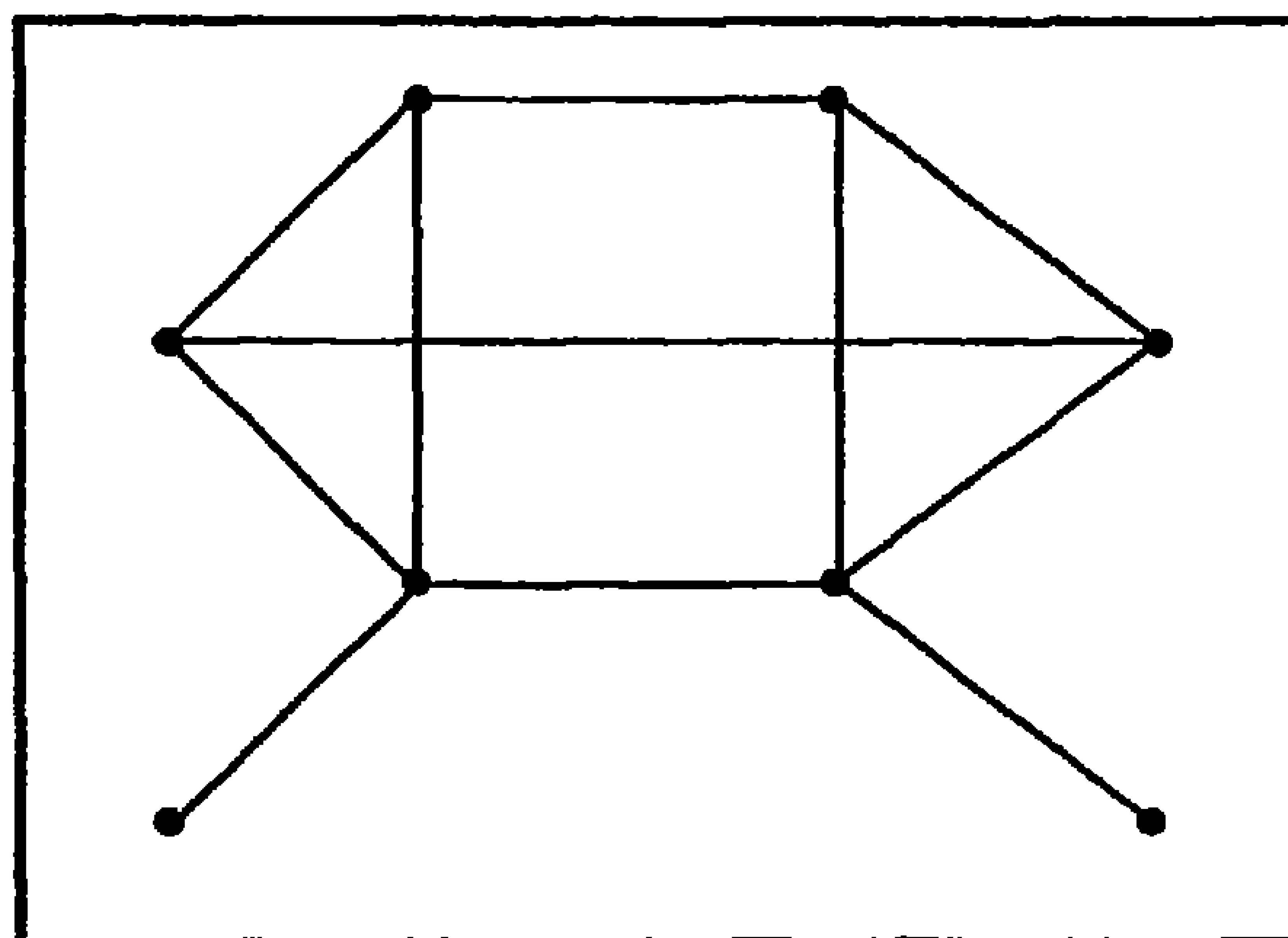
مثال: المخطط التالي يحتوي على دارة هاملتون :



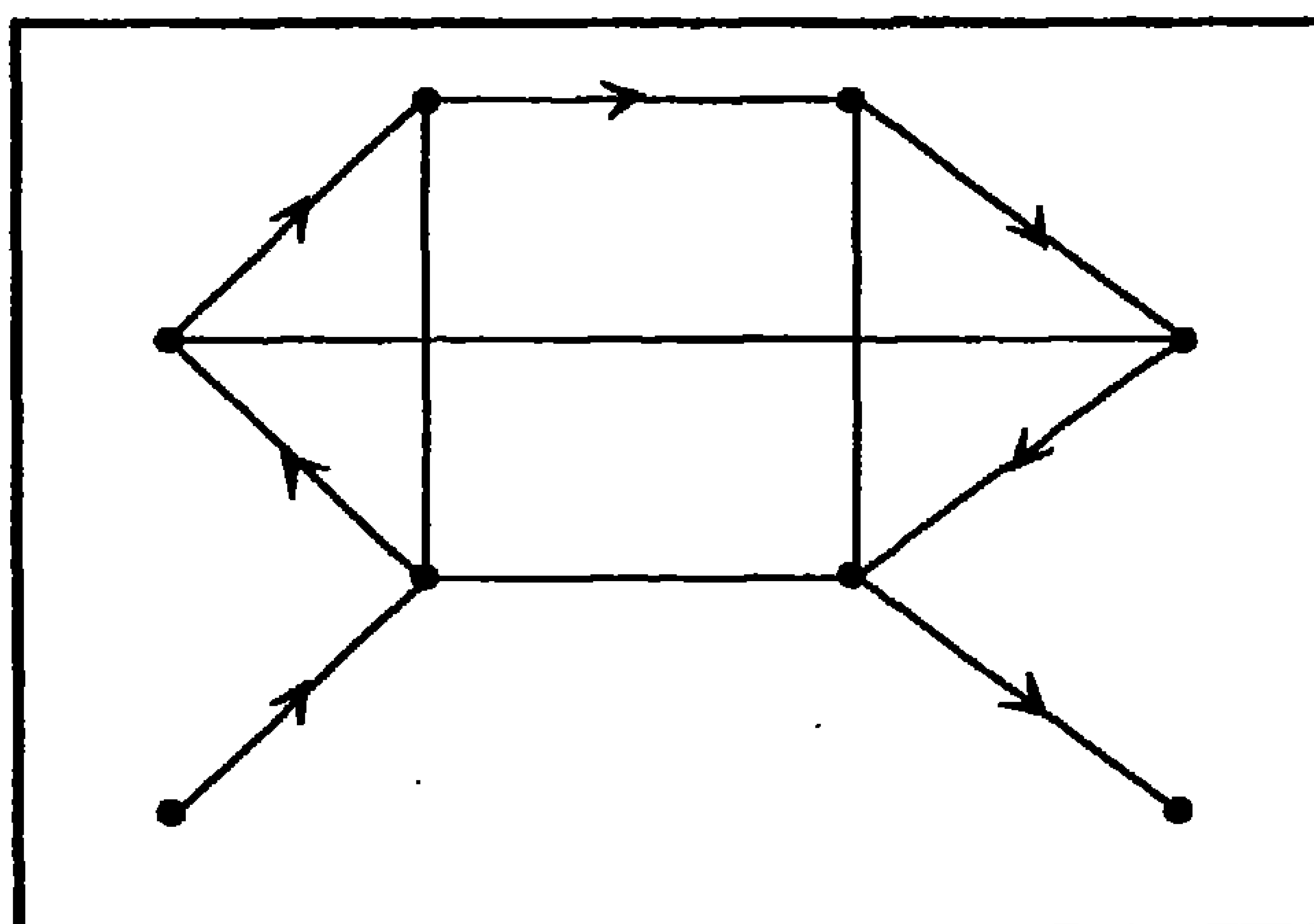
ويمكن توضيح دارة هاملتون في المخطط G بالأسهم كما يلي:



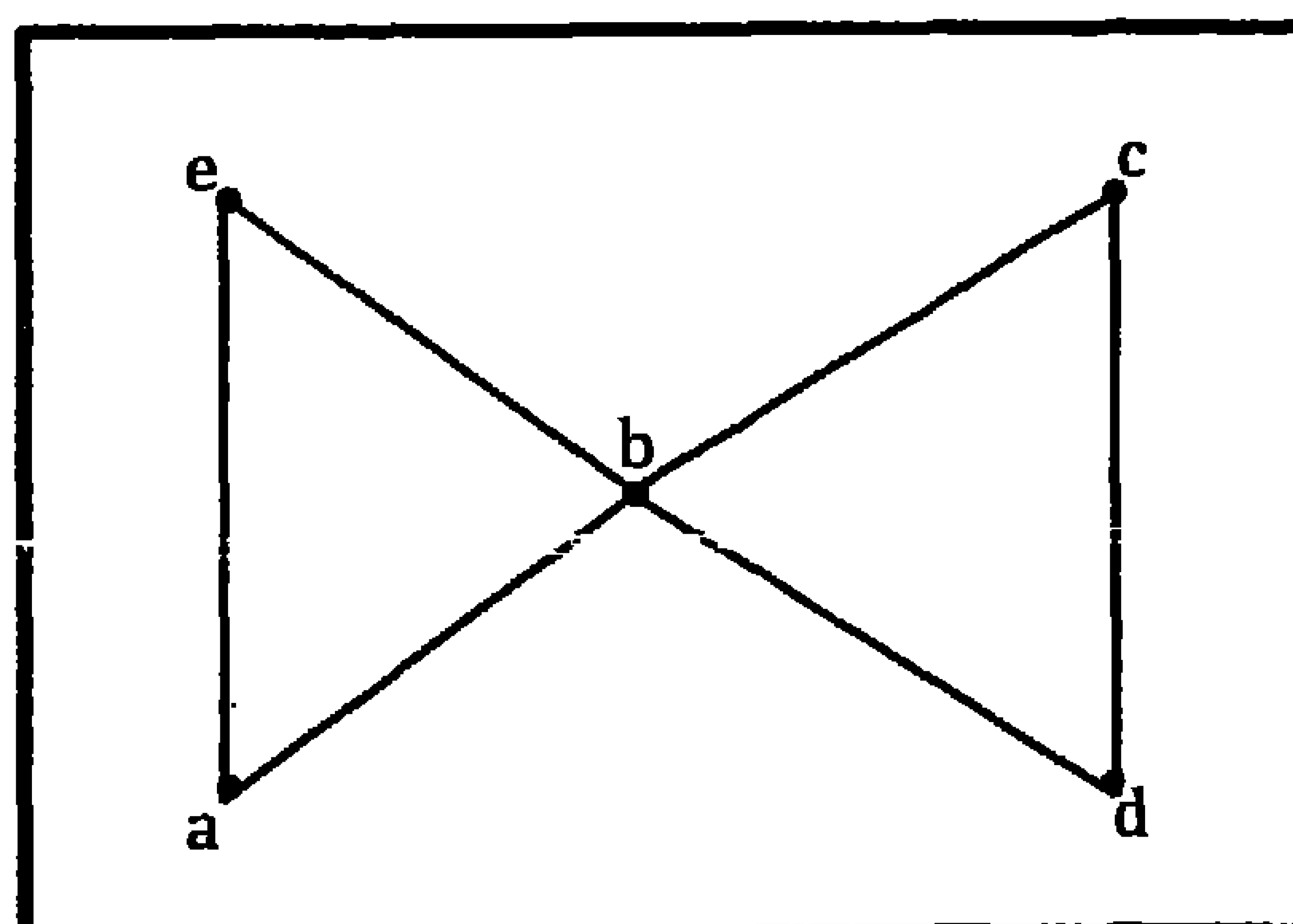
مثال: المخطط التالي يحتوي على مسار هاملتون ولا يحتوي على دارة هاملتون :



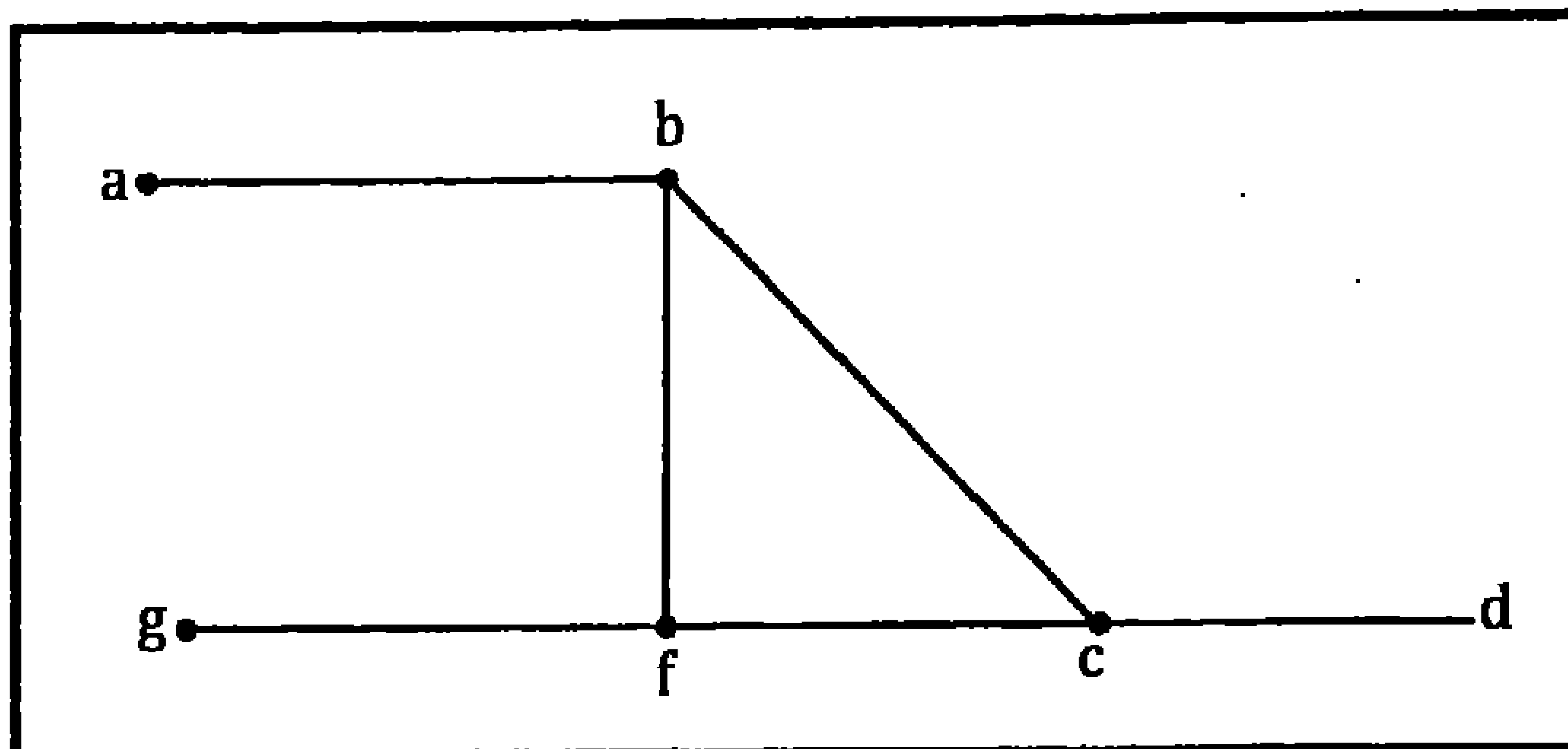
ويمكن توضيح مسار هاملتون في المخطط G بالأسهم كما يلي:



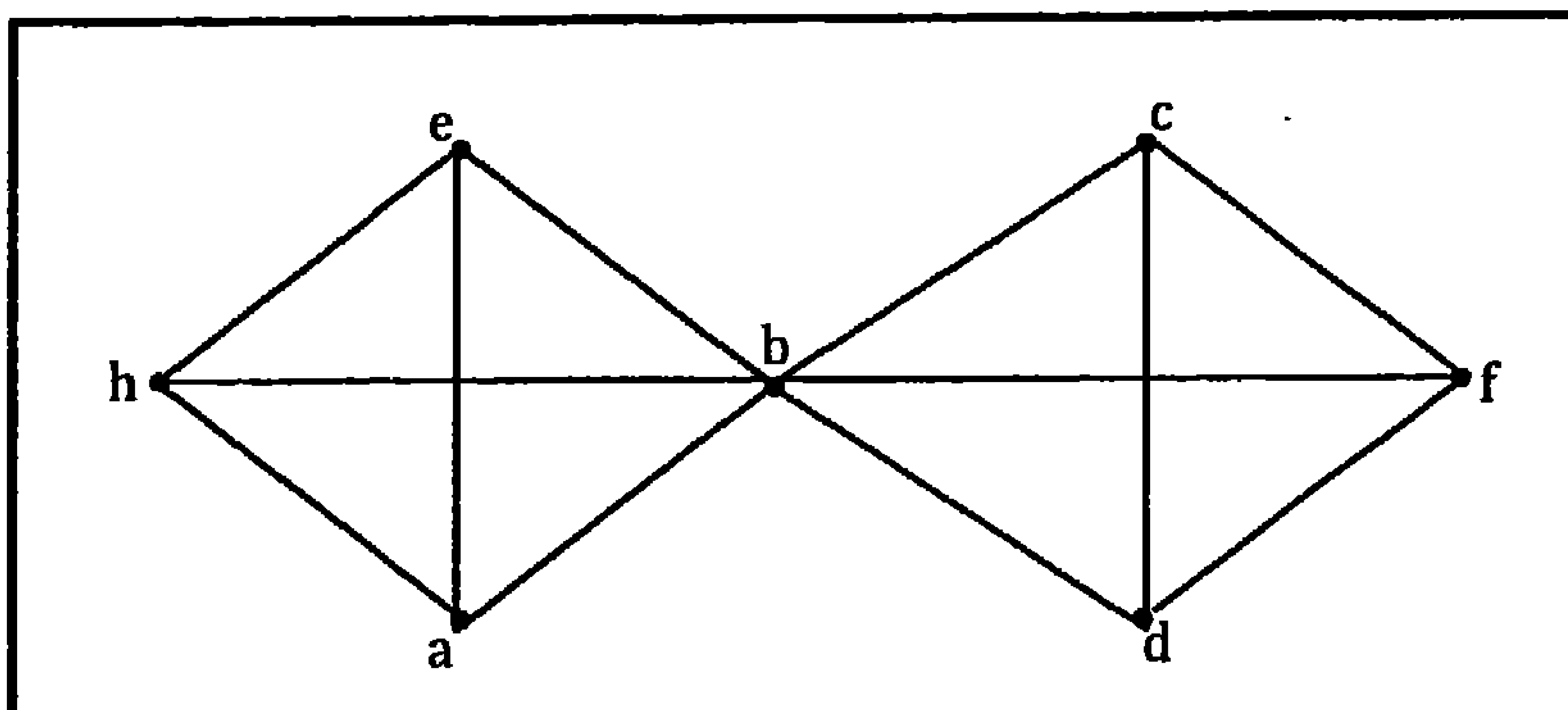
مثال: المخطط التالي لا يحتوي على مسار هاملتون ولا يحتوي على دارة هاملتون :



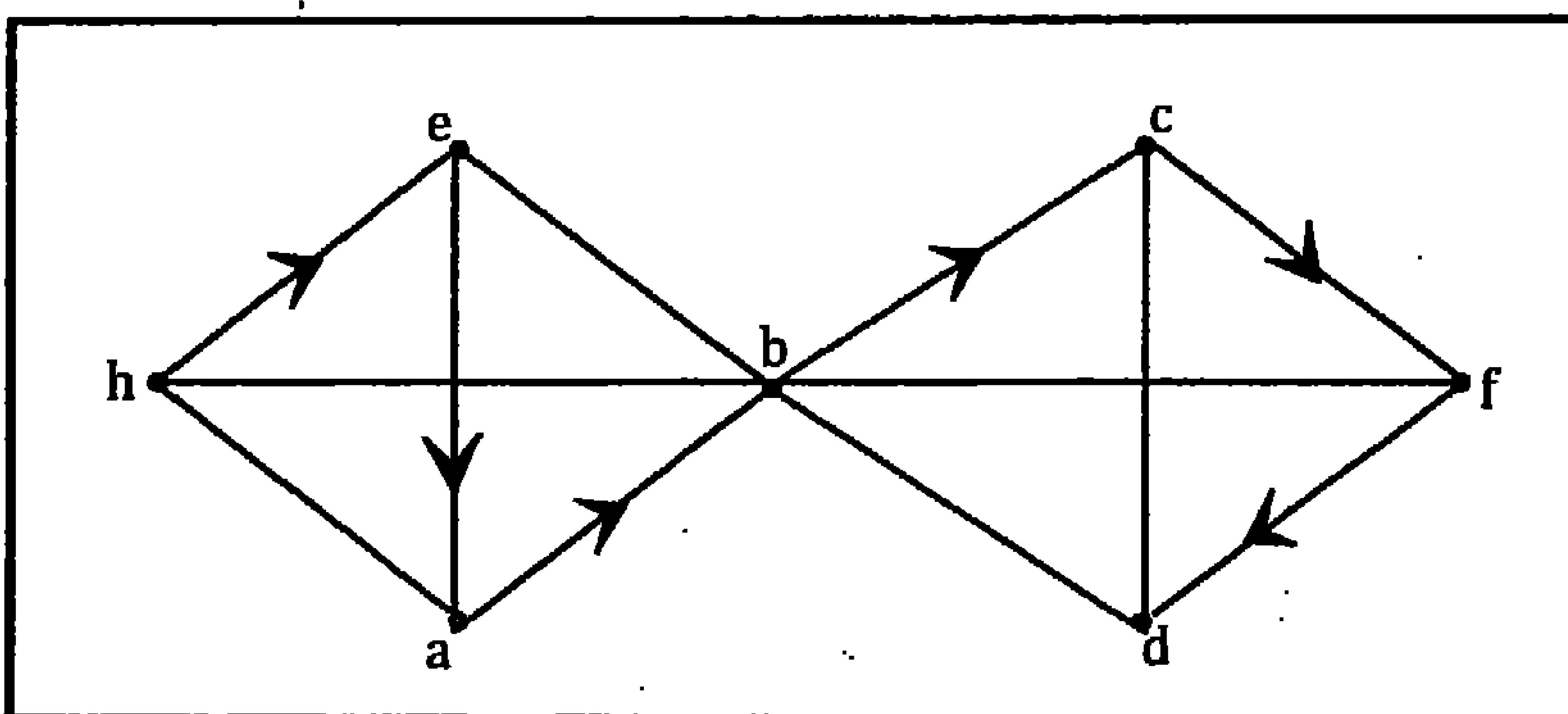
مثال: المخطط التالي لا يحتوي على مسار هاملتون ولا يحتوي على دارة هاملتون :



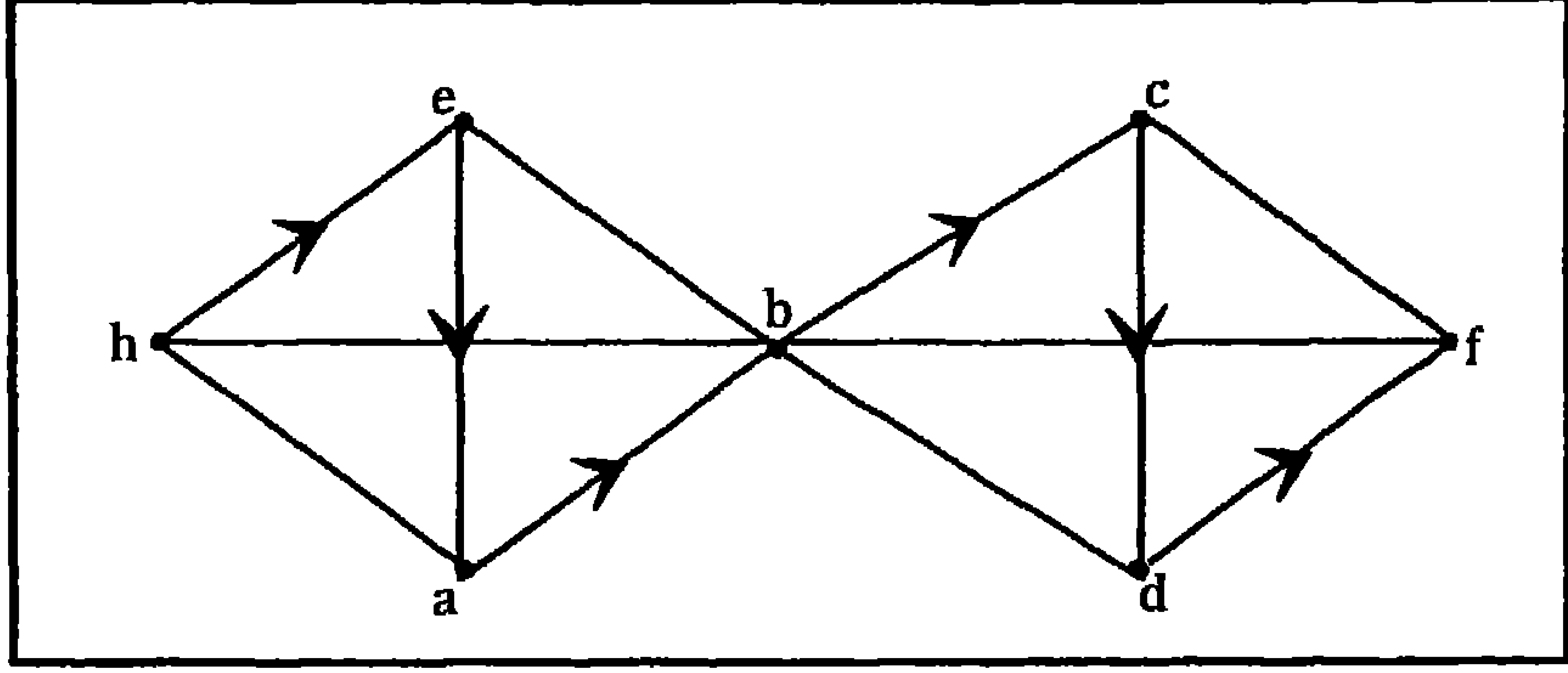
مثال: المخطط التالي يحتوي على مسار هاملتون ولا يحتوي على دارة هاملتون :



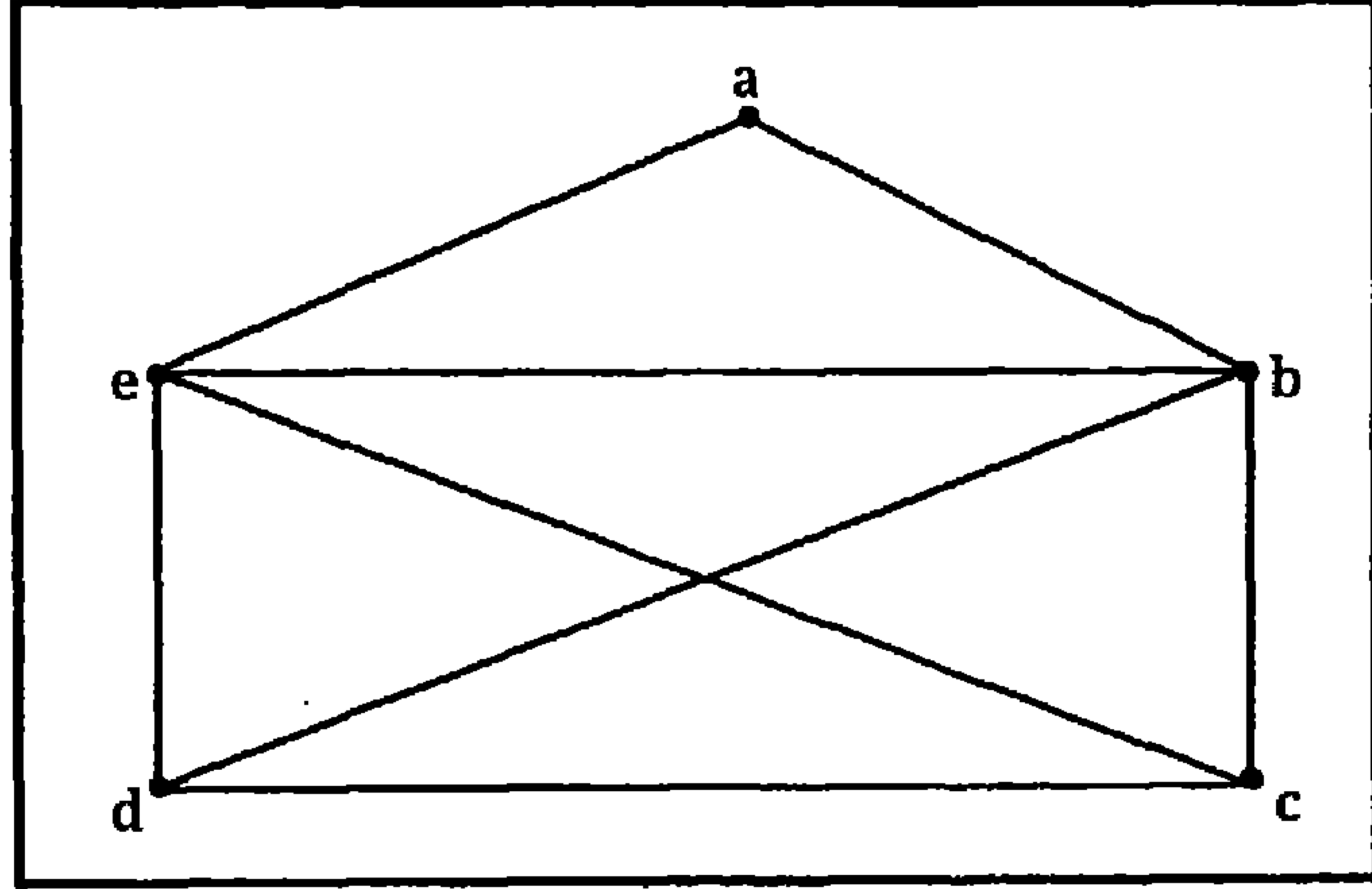
ويمكن توضيح مسار هاملتون في المخطط G بالأسهم كما يلي:



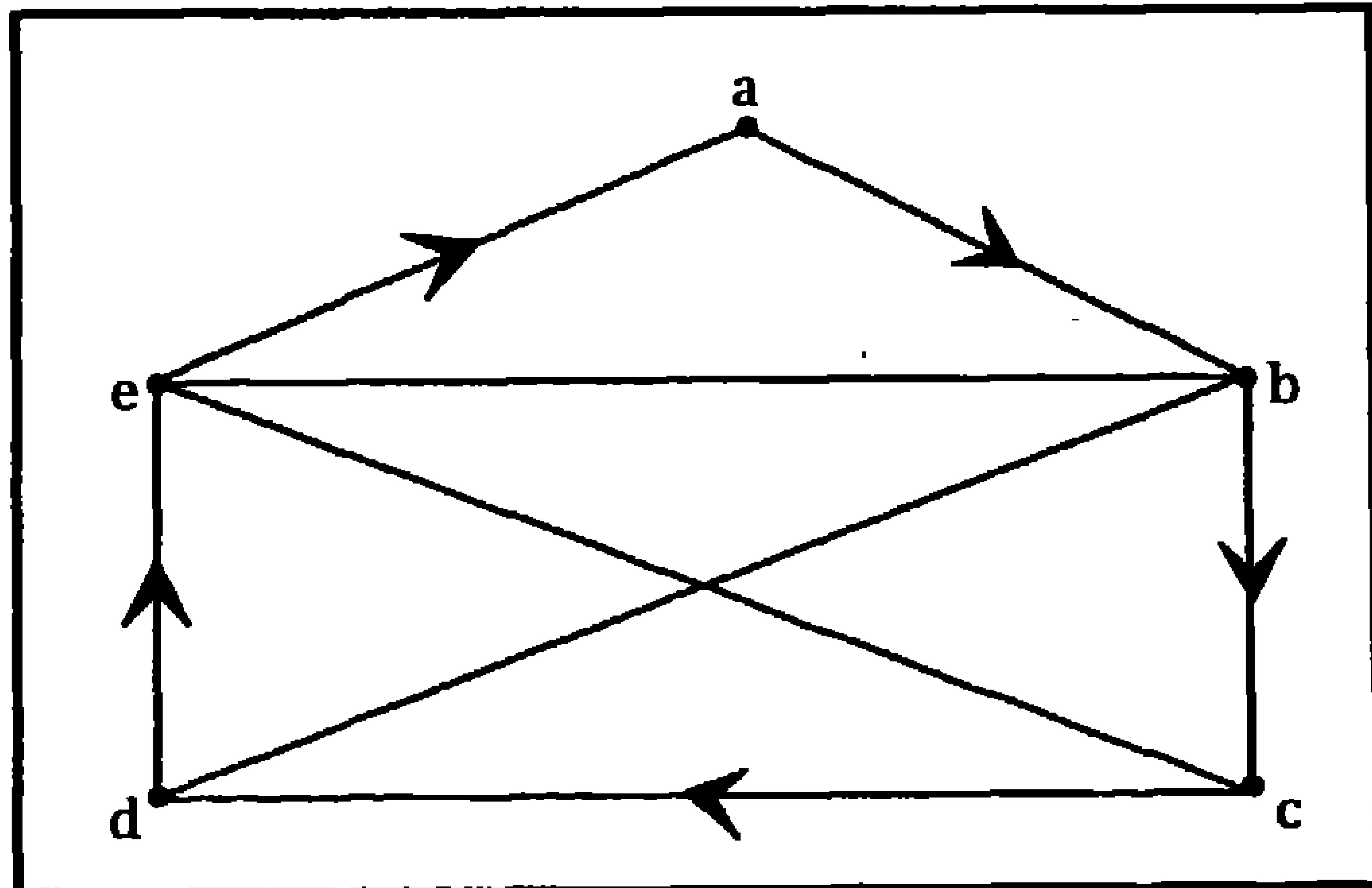
كما يوجد مسار هاملتون آخر في المخطط G يمكن توضيحه بالأسهم كما يلي:



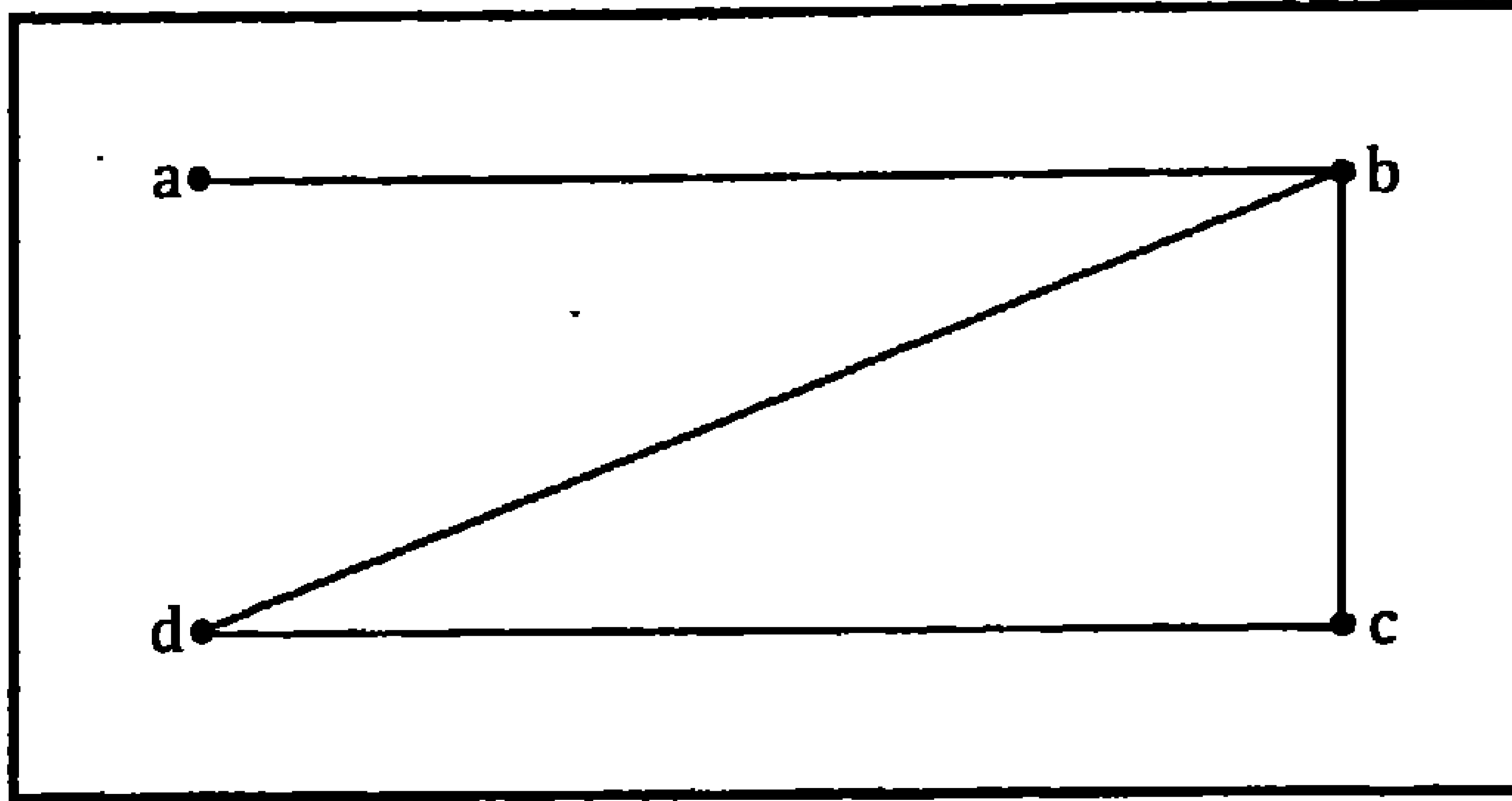
مثال: المخطط التالي يحتوي على دارة هاملتون :



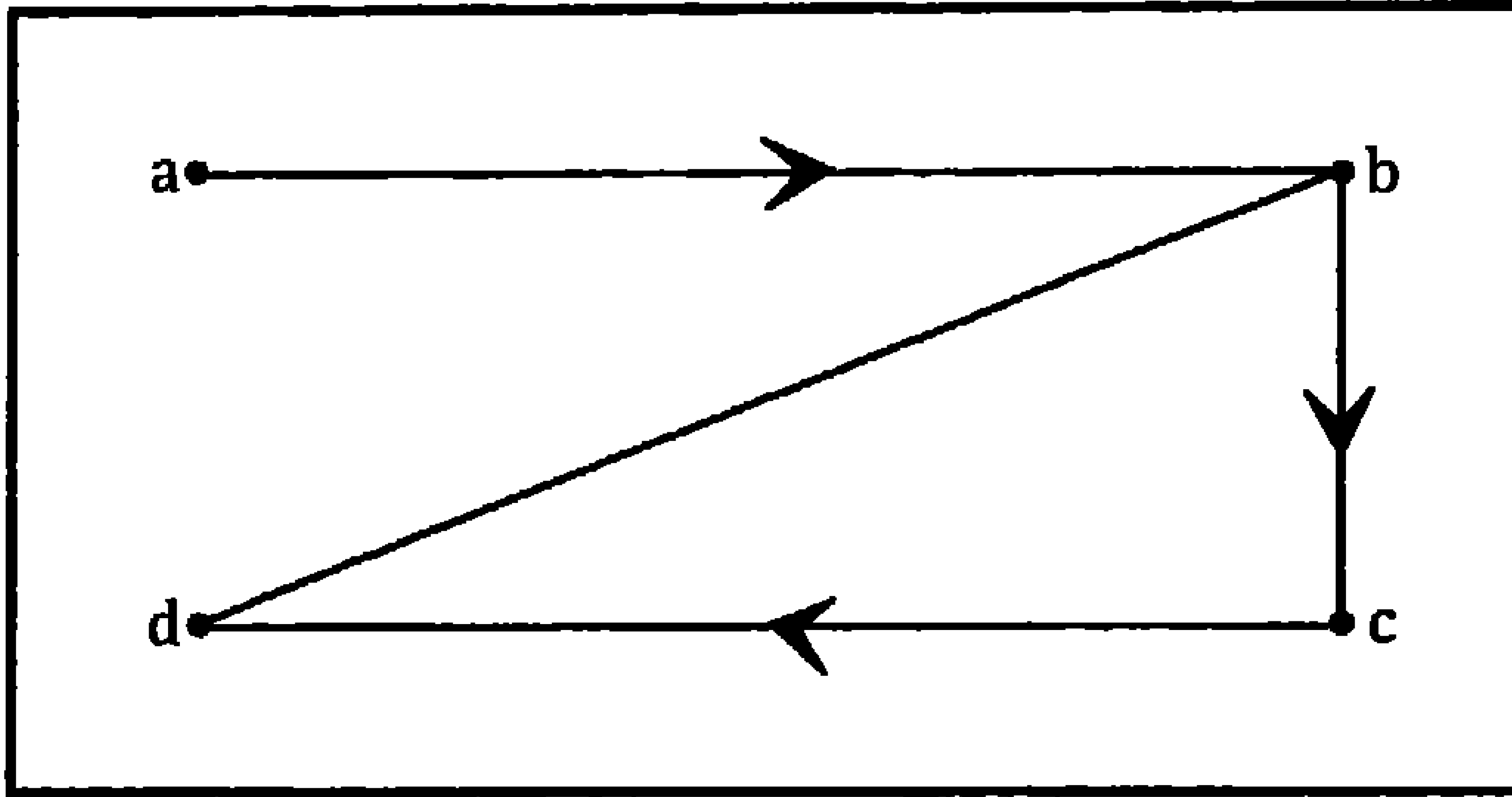
ويمكن توضيح دارة هاملتون في المخطط G بالأسهم كما يلي:



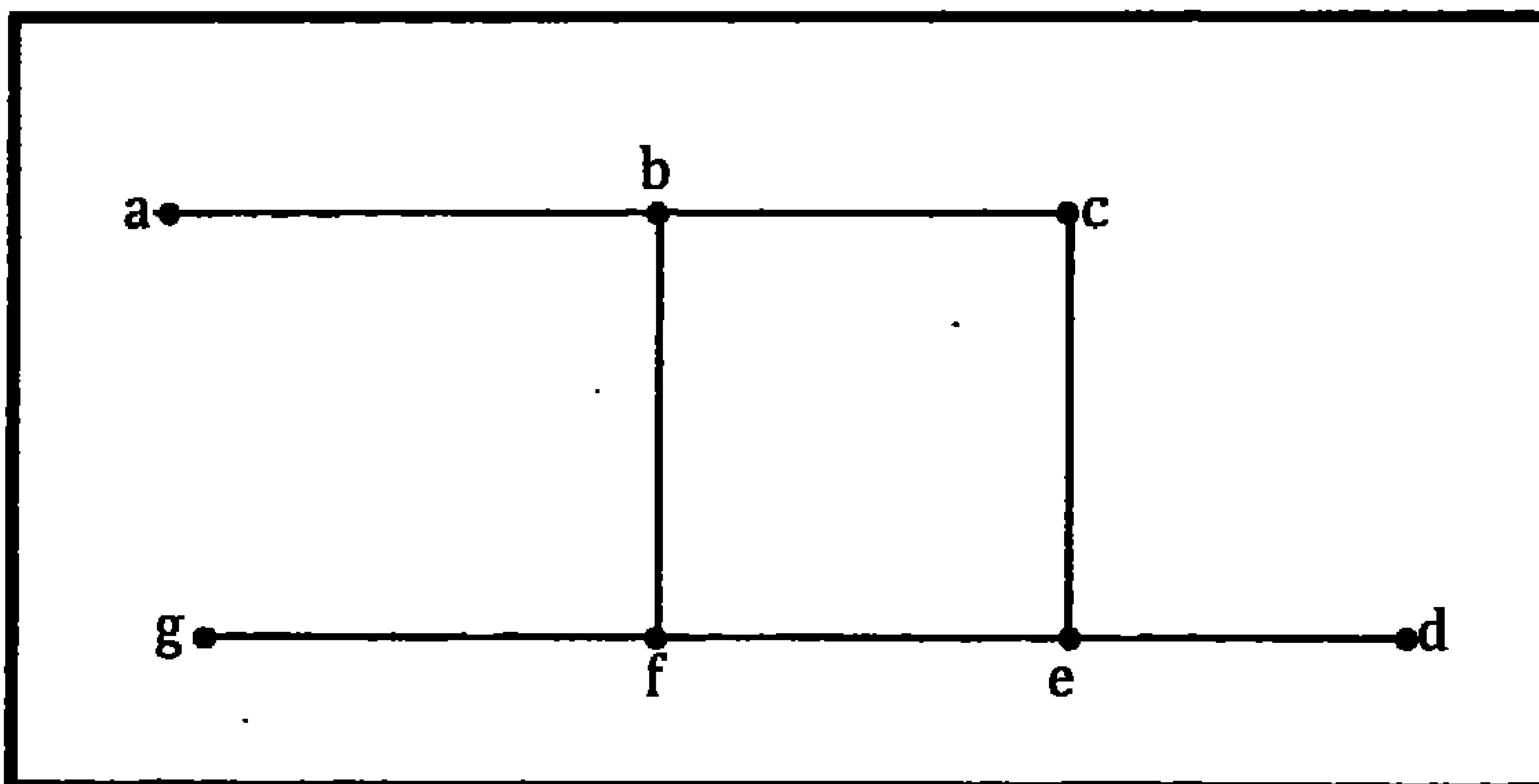
مثال: المخطط التالي يحتوي على مسار هاملتون ولا يحتوي على دارة هاملتون :



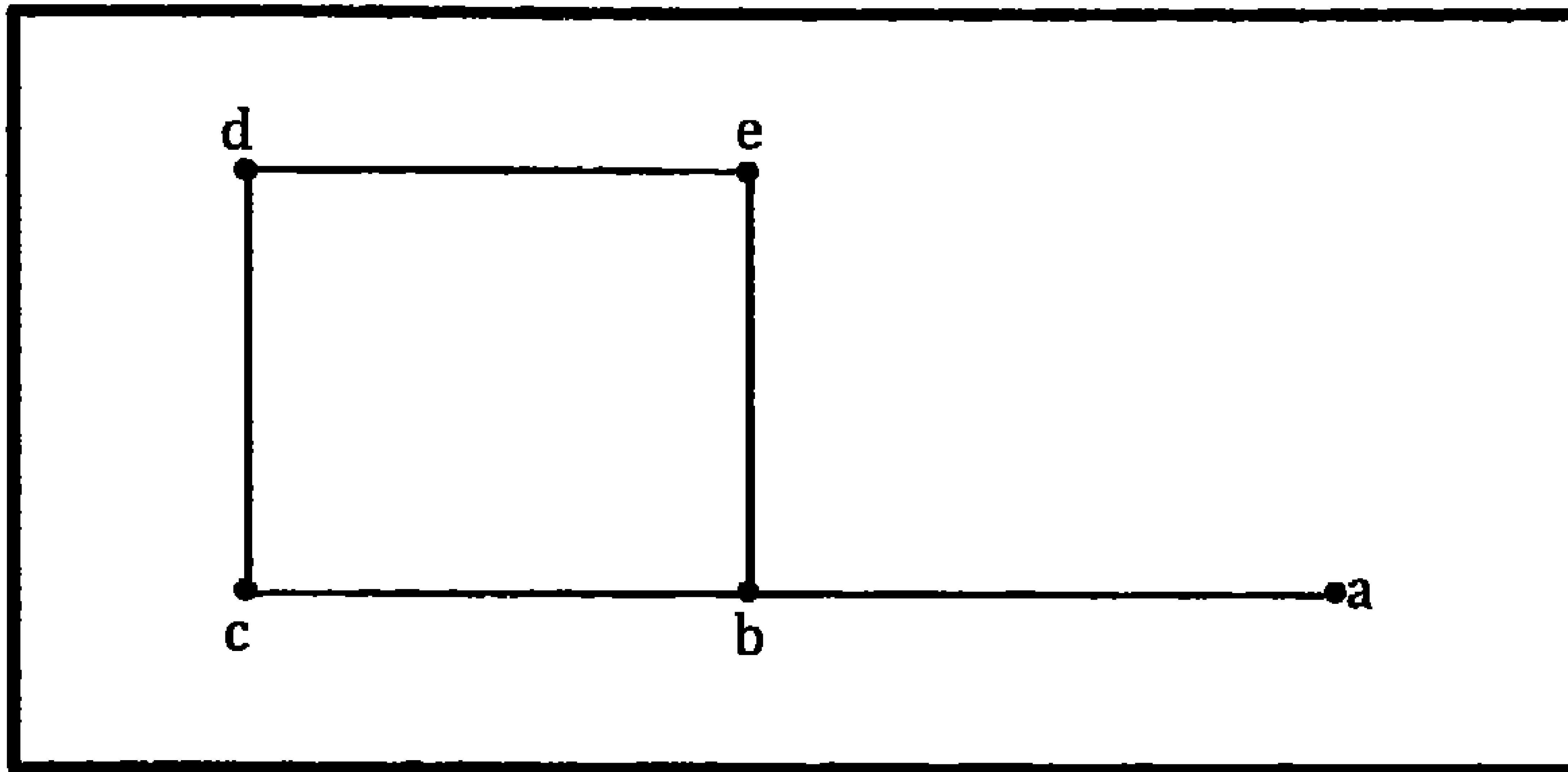
ويمكن توضيح مسار هاملتون في المخطط G بالأسهم كما يلي:



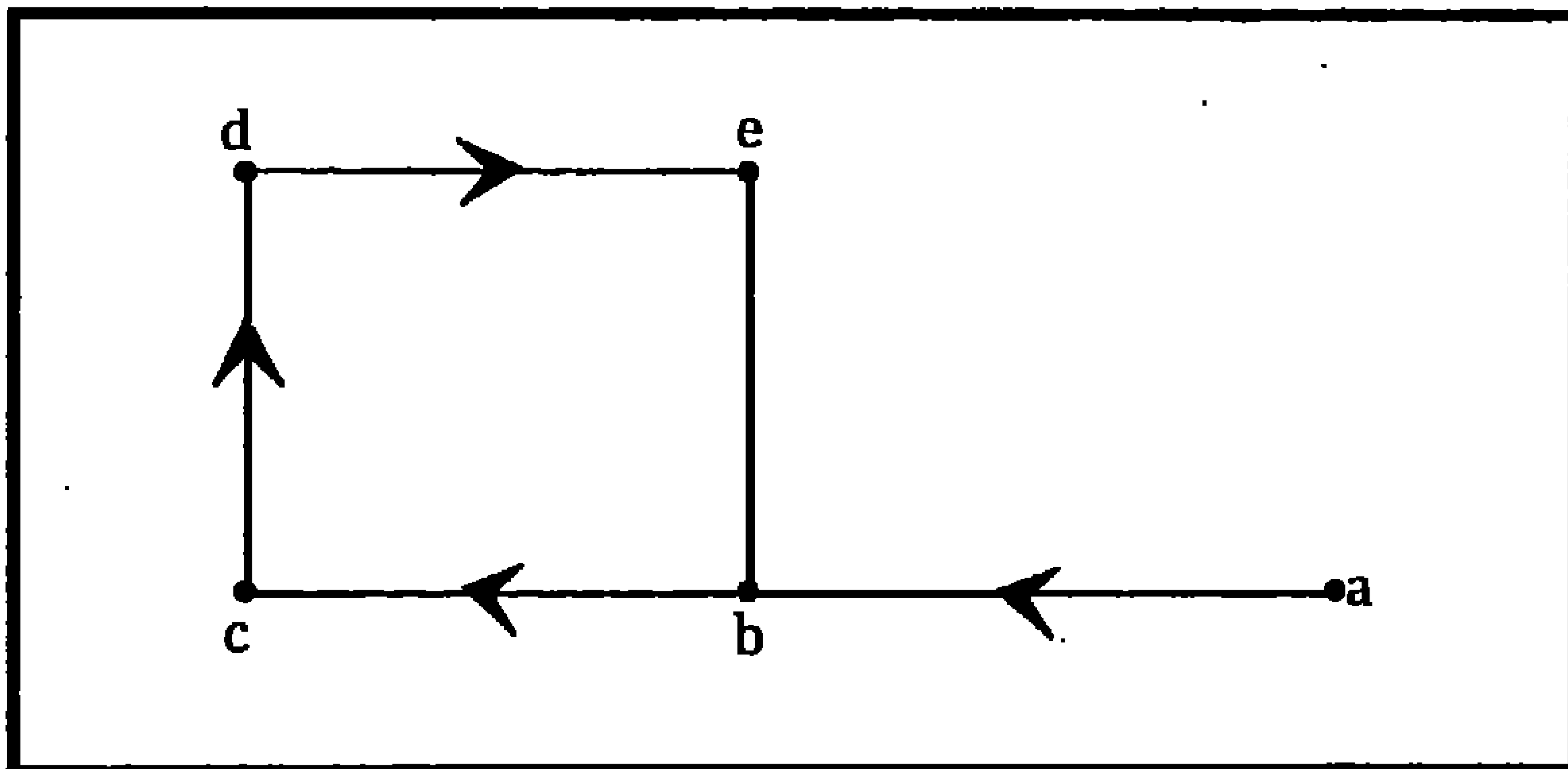
مثال: المخطط التالي لا يحتوي على مسار هاملتون ولا يحتوي على دارة هاملتون :



مثال: المخطط التالي يحتوي على مسار هاملتون ولا يحتوي على دارة هاملتون :



ويمكن توضيح مسار هاملتون في المخطط G بالأسهم كما يلي:



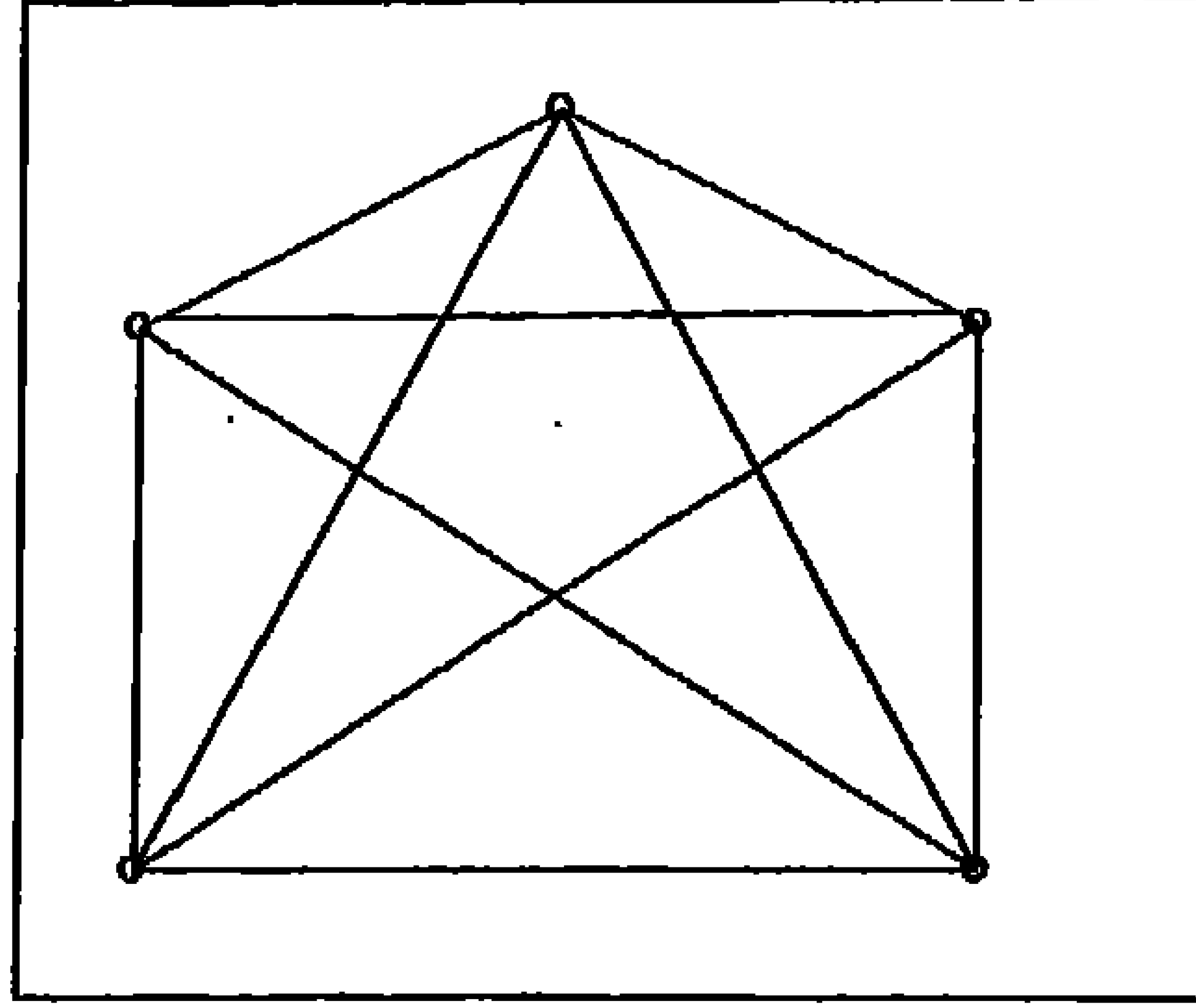
ملاحظة: النظرية التالية نظرية دراك Dirac's theorem سوف تعطينا شرط وجود دارة هاملتون في المخطط G وسوف نعطي هذه النظرية بدون برهان .

نظرية دراك (8.6.1) Dirac's theorem : إذا كان G مخطط بسيط يحتوي على n رأس و كانت لكل v_i رأس في المخطط تكون

$$\deg(v_i) \geq \frac{n}{2}$$

فإن المخطط G يحتوي على دارة هاملتون.

مثال: هل المخطط التالي يحتوي على دارة هاملتون:



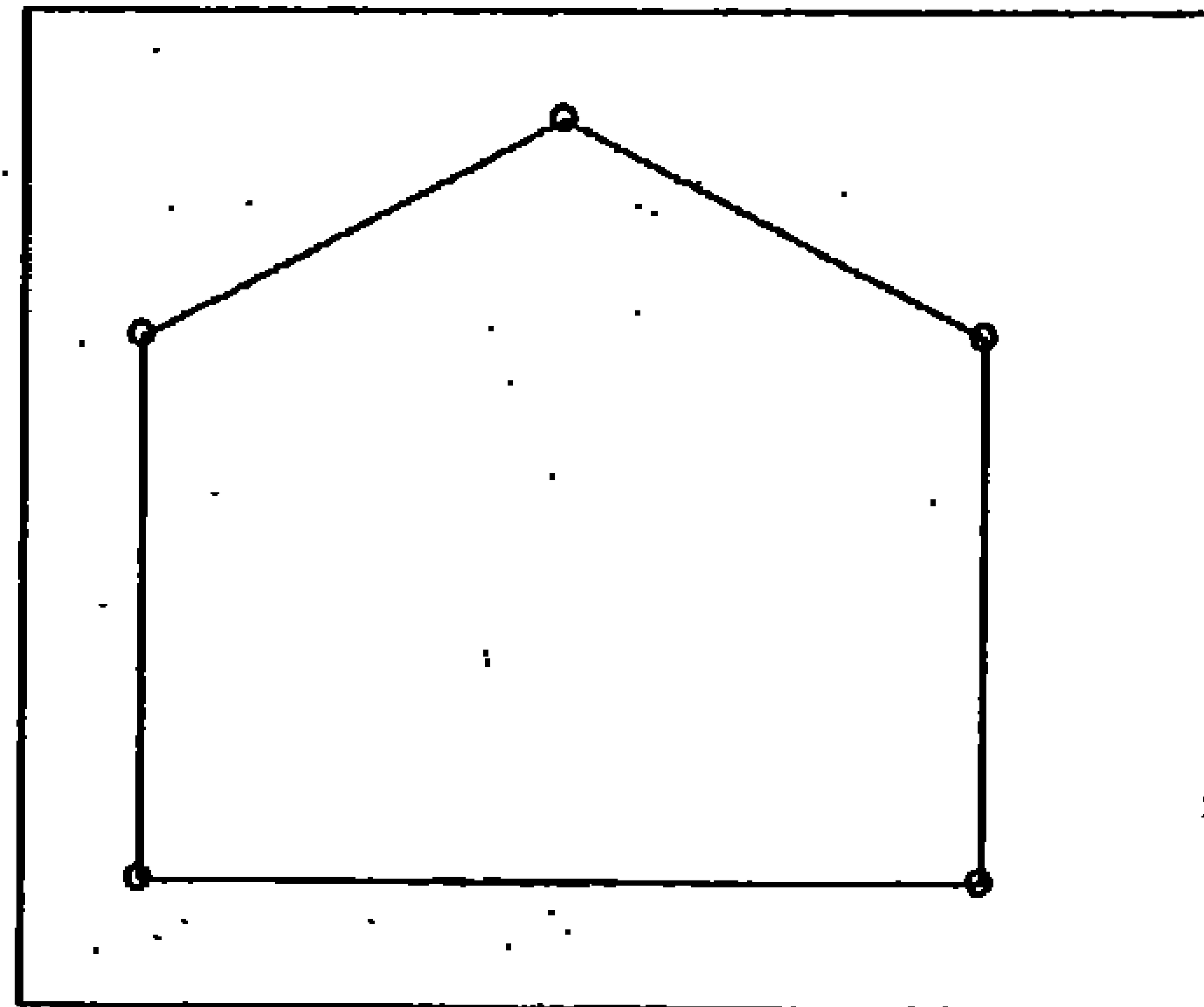
الحل:

إذا كانت x من رؤوس المخطط فإن:

$$\deg(x) = 4 > \frac{n}{2} = \frac{5}{2}$$

وبالتالي فمن نظرية دراك(8.6.1) فإن المخطط G يحتوي على دارة هاملتون.

ملاحظة: نظرية دراك (8.6.1) تعطينا شرط كافي وغير لازم لكي يحتوي المخطط على دارة هاملتون بمعنى أنه إذا تحقق هذا الشرط فإن المخطط يحتوي على دارة هاملتون ولكن قد يكون هذا الشرط غير متحقق ولكن المخطط يحتوي على دارة هاملتون كما في المخطط التالي:



المخطط يحتوي على دارة هاملتون بالرغم من كونه لا يحقق نظرية دراك (8.6.1) حيث إذا كانت x رأس من رؤوس المخطط فإن

$$\deg(x) = 2 \leq \frac{n}{2} = \frac{5}{2}$$

نظرية (8.6.2) : إذا كانت n≥3 فإن المخطط التام K_n يحتوي على دارة هاملتون.

البرهان:

أولاً: بما أن

$$n > 2$$

إذن:

$$n - 2 > 0$$
$$2n - 2 > n$$
$$n - 1 > \frac{n}{2} \qquad \text{...(1)}$$

ثانياً: إذا كان G مخطط تام يحتوي على n رأس فإن درجة كل رأس في المخطط هي n-1 وبالتالي إذا كانت v رأس في المخطط فإن:

$$\deg(v) = n - 1 \qquad \text{...(2)}$$

فمن (1) و (2) نحصل على:

$$\deg(v) > \frac{n}{2}$$

فمن نظرية دراك (8.6.1) فإن المخطط G يحتوي على دارة هاملتون.

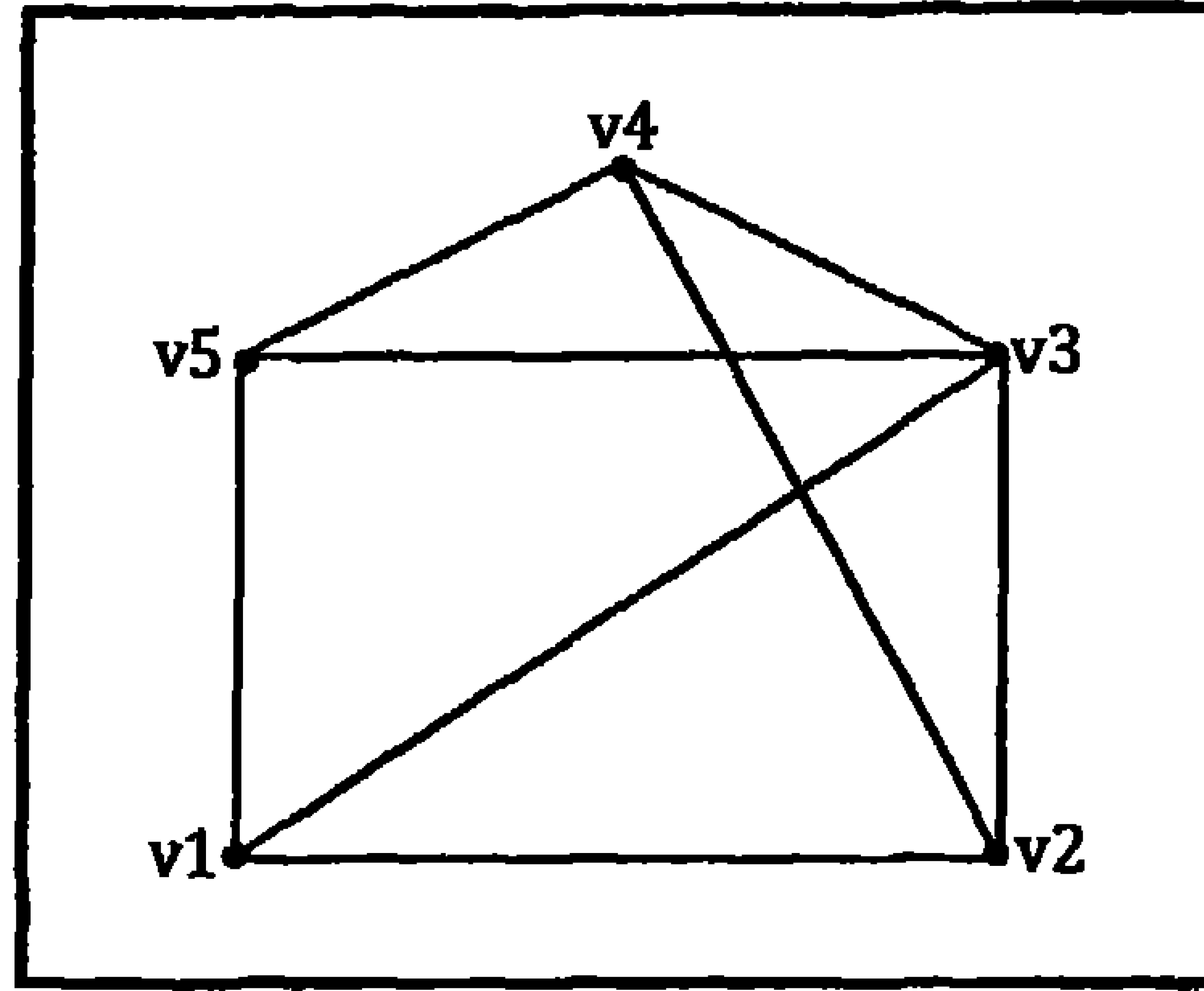
ملاحظة: النظرية التالية نظرية أوري Ore's theorem سوف تعطينا شرط وجود مسار هاملتون في المخطط G وسوف نعطي هذه النظرية بدون برهان .

نظرية أورى (8.6.2) Ore's theorem : إذا كان G مخطط بسيط يحتوي على n رأس بحيث لكل v_i و v_j رأسين في المخطط فإن:

$$\deg(v_i) + \deg(v_j) \geq n$$

فإن المخطط G يحتوي على مسار هاملتون.

مثال: هل المخطط التالي يحتوي على مسار هاملتون:



الحل:

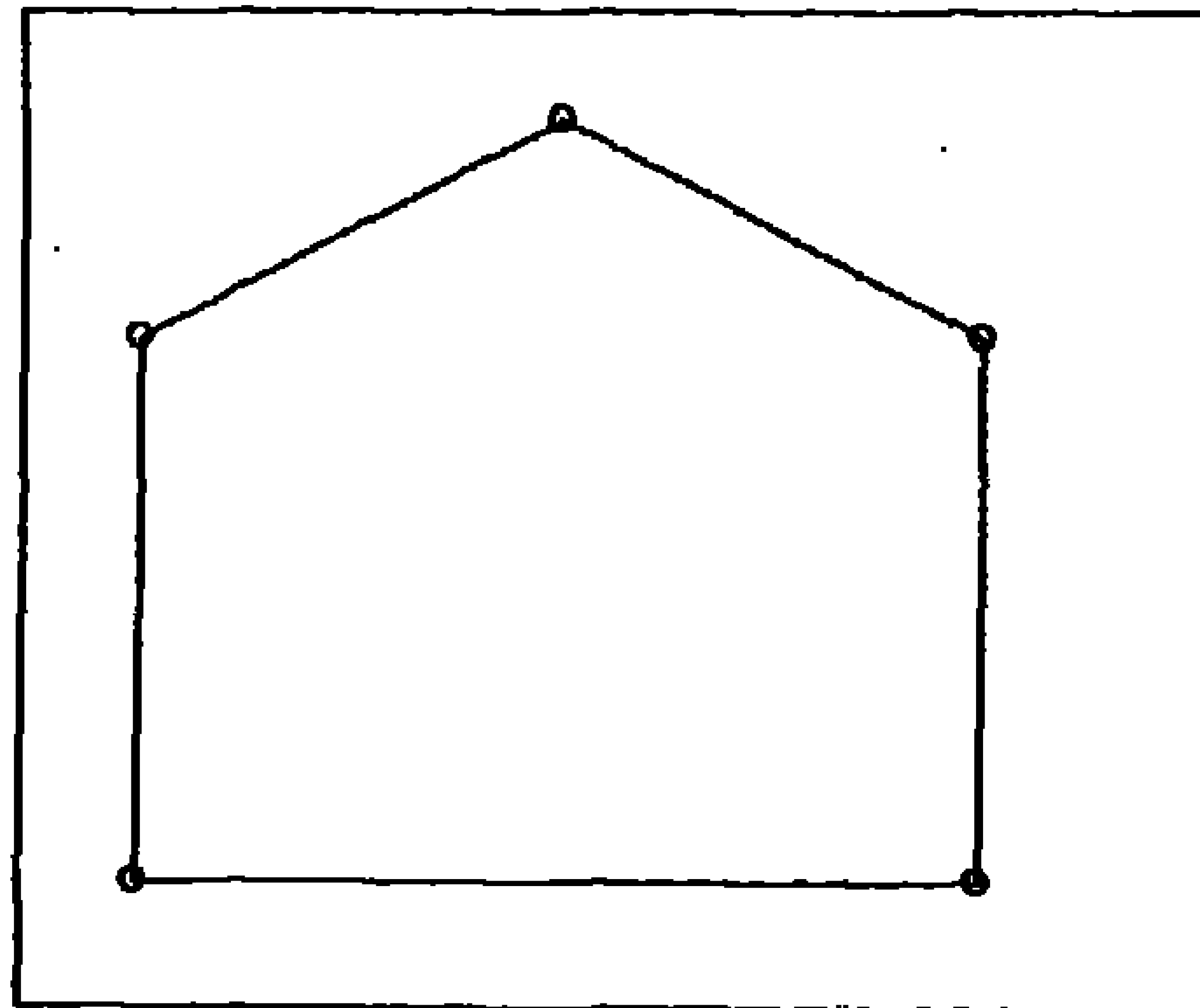
$$deg(v_1) = 3, deg(v_2) = 3, deg(v_3) = 4, deg(v_4) = 3, deg(v_5) = 3$$

وبالتالي إذا كانت x و y رأسين من رؤوس المخطط فإن:

$$deg(x) + deg(y) \geq 3 + 3 = 6 > n = 5$$

وبالتالي فمن نظرية أورى (8.6.2) فإن المخطط G يحتوي على مسار هاملتون.

ملاحظة: نظرية أورى (8 .6.2) تعطينا شرط كافي وغير لازم لكي يحتوي المخطط على مسار هاملتون بمعنى أنه إذا تحقق هذا الشرط فإن المخطط يحتوي على مسار هاملتون ولكن قد يكون هذا الشرط غير متحقق ولكن المخطط يحتوي على مسار هاملتون كما في المخطط التالي :



المخطط يحتوي على مسار هاملتون بالرغم من كونه لا يحقق نظرية أورى (8 .6.2)حيث إذا كانت x و y رأسين من رؤوس المخطط فإن:

$$deg(x) + deg(y) = 2 + 2 = 4 < n = 5$$

(8-7) تمثيل المخططات بالمصفوفات

في هذا الجزء سوف نستعرض كيف يمكن استخدام المصفوفات في تمثيل المخططات لذا سوف ندرس أسلوبين من تمثيل المصفوفات:

1. مصفوفات التجاور Adjacency Matrices.
2. مصفوفات الوقوع Incidence Matrices.

(8-7-1) مصفوفات التجاور Adjacency Matrices

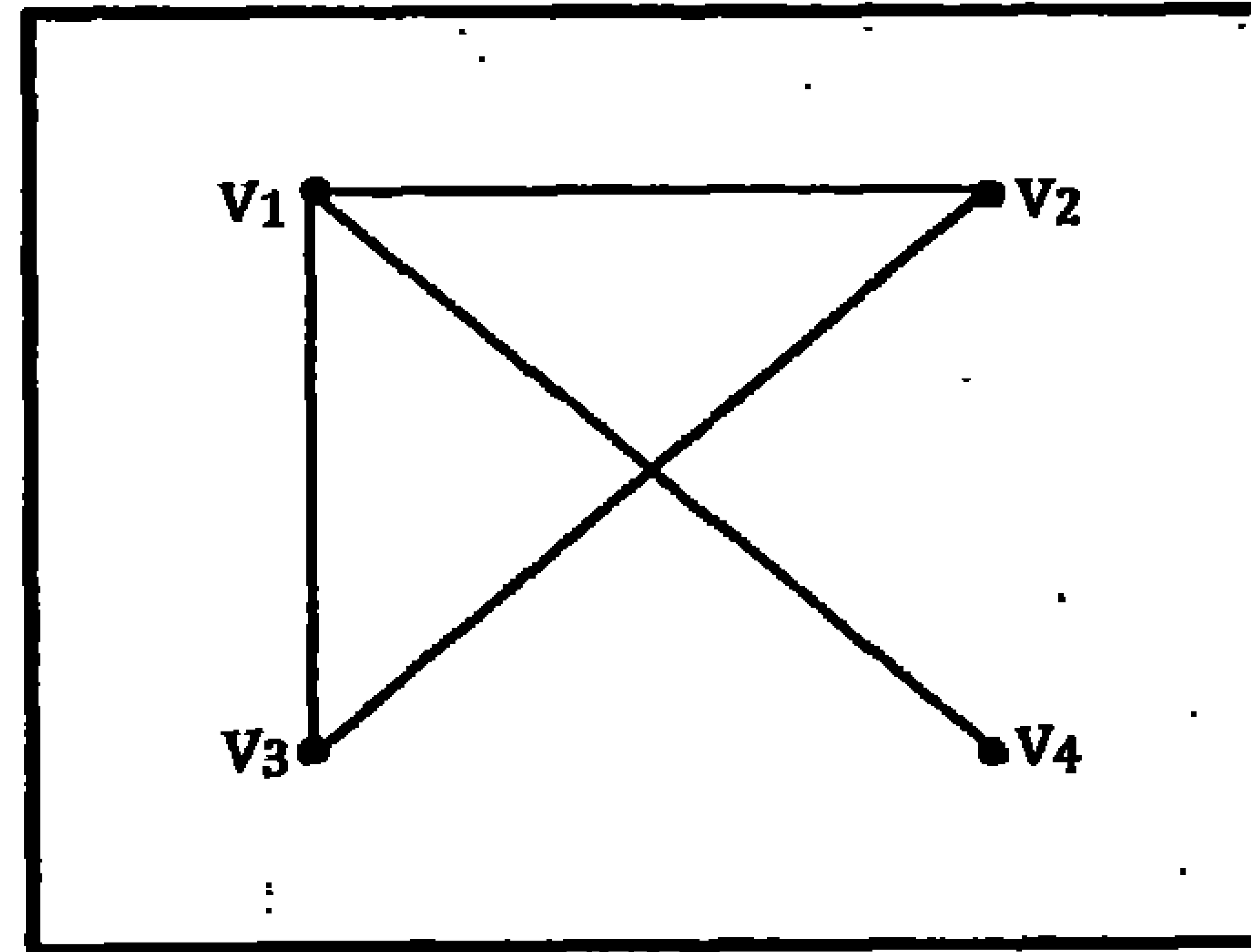
ليكن $G=(V, E)$ مخطط بسيط غير متجه يحتوي على الرؤوس $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ فإننا نعرف مصفوفة التجاور بأنها مصفوفة مربعة $A=[a_{ij}]$ من النوع $n\times n$ يكون فيها :

$a_{ij}=1$ إذا كانت $[v_i, v_j]$ تمثل ضلع في المخطط G .

$a_{ij}=0$ إذا كانت $[v_i, v_j]$ لا تمثل ضلع في المخطط G .

ملاحظة: مصفوفة التجاور في المخطط الغير متجه تكون مصفوفة مماثلة.

مثال: باستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي:

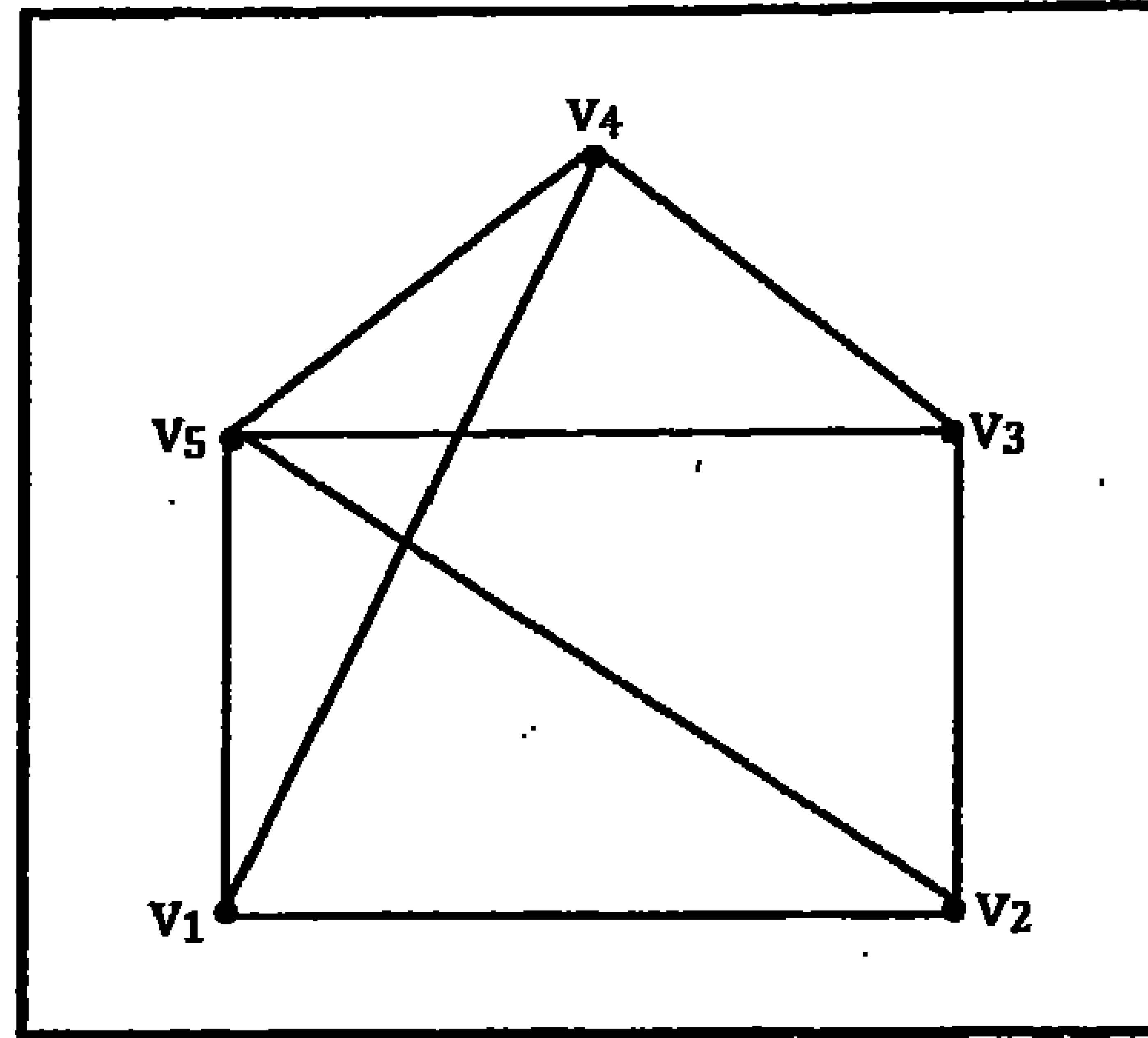


الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: عبر عن المخطط التالي باستخدام مصفوفة التجاور:



الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

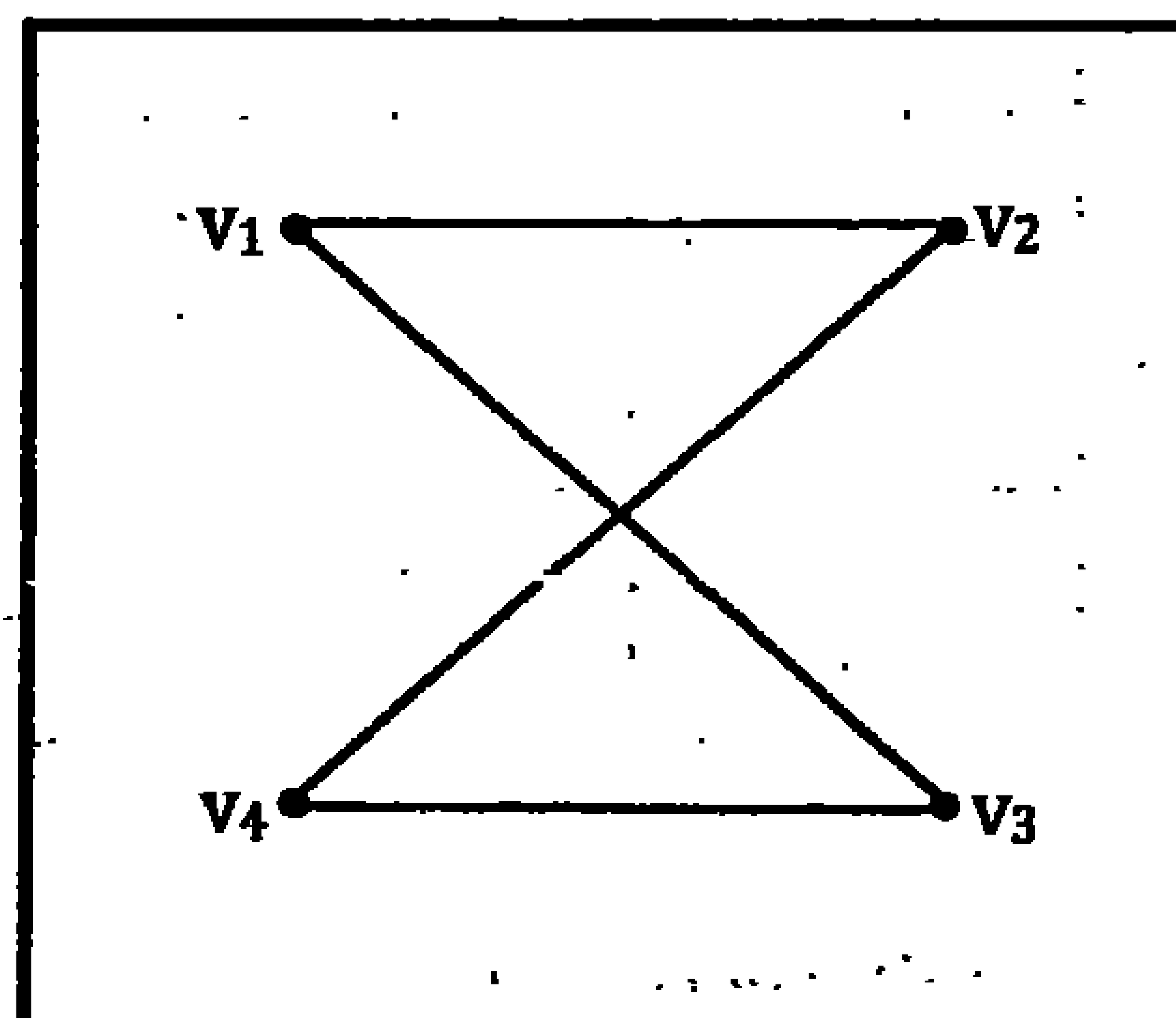
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: ارسم المخطط الذي له مصفوفة التجاور التالية:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

المخطط الذي له مصفوفة التجاور يمكن رسمه كما يلي:

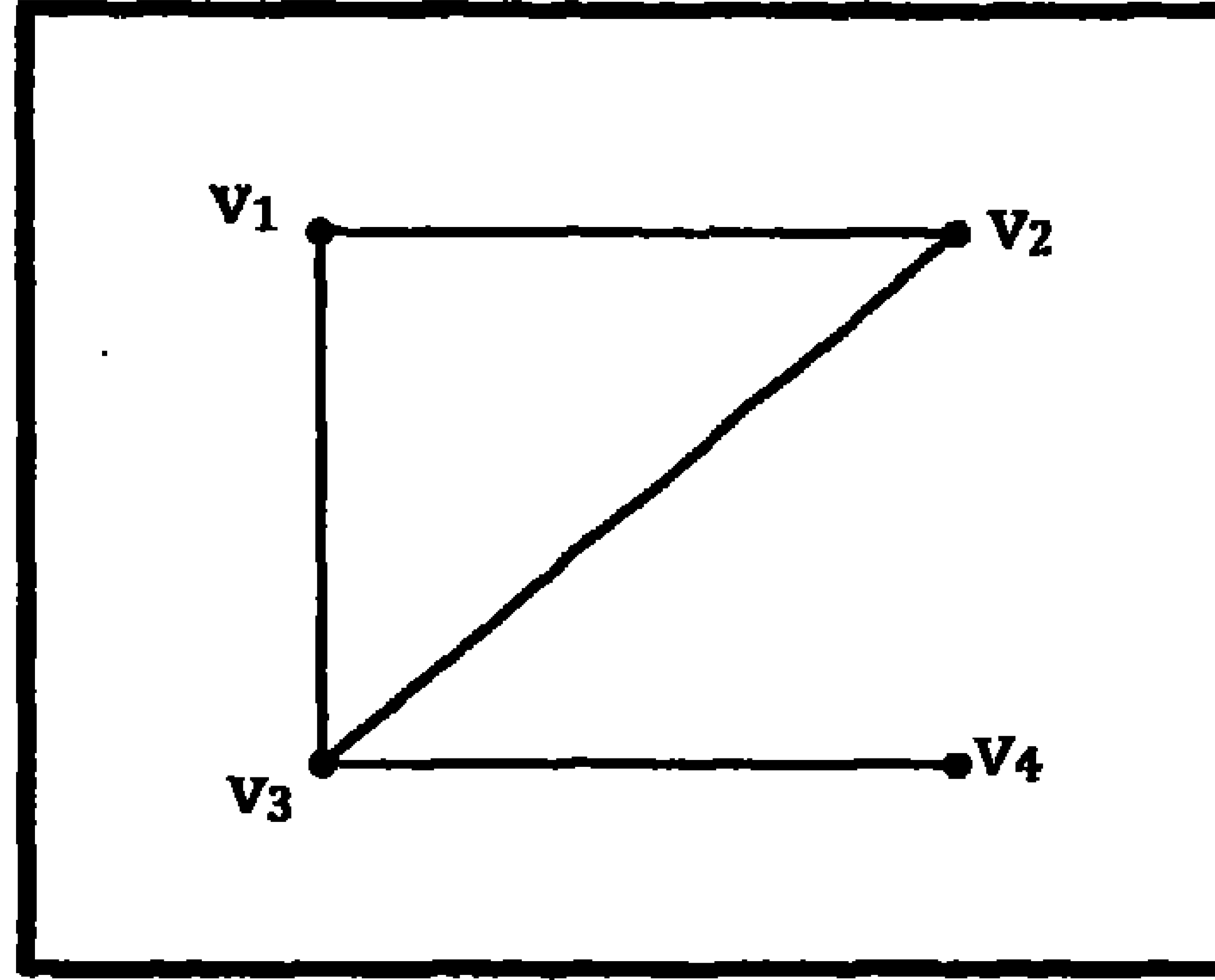


ملاحظة:

يمكن حساب درجة أي رأس في المخطط الغير اتجاهي باستخدام مصفوفة التجاور كما يلي:

$$\deg(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

مثال: باستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي ثم إحسب درجات رؤوس المخطط:



الحل:

أولاً: مصفوفة التجاور للمخطط هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ثانياً: لحساب درجات رؤوس المخطط نكون الجدول التالي:

v_i \ v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	$\deg(v_i)$
v_1	0	1	1	0	2
v_2	1	0	1	0	2
v_3	1	1	0	1	3
v_4	0	0	1	0	1
$\deg(v_i)$	2	2	3	1	

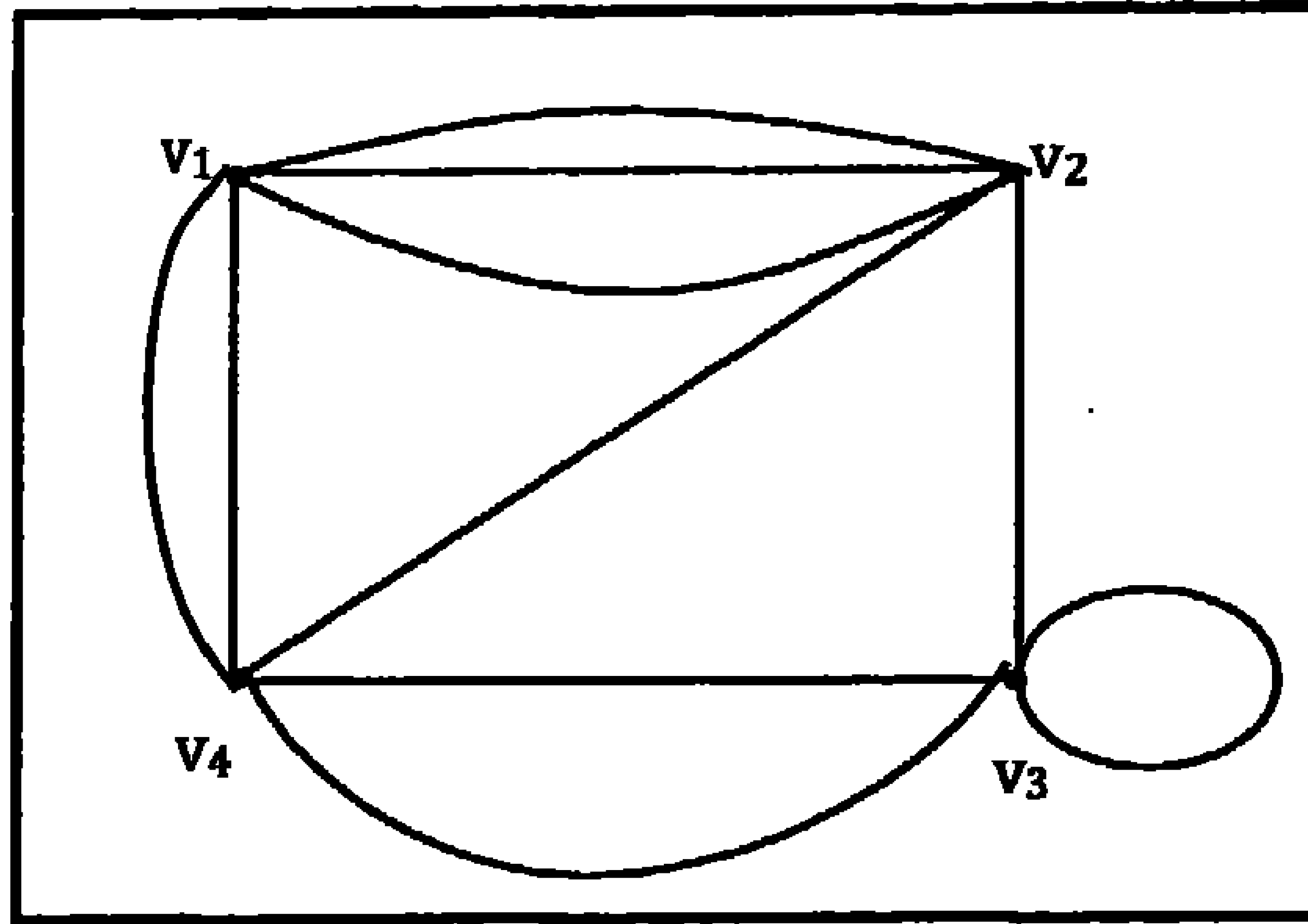
إذن:

$\deg(v_1)=2, \deg(v_2)=2, \deg(v_3)=3, \deg(v_4)=1$

ملحوظة: من الممكن استخدام مصفوفة التجاور لتمثيل المخططات الغير متجه والغير بسيطة والتي تحتوي عقد وأضلاع مكررة حيث:

1. العقدة عند الرأس v_i تعطى ب 1 في الموقع a_{ii} في مصفوفة التجاور.
2. الأضلاع المكررة $[v_i, v_j]$ والتي لها نفس نقاط النهايات v_i, v_j تعطي كل ضلع من الأضلاع المكررة ب1 في الموقع a_{ij} في مصفوفة التجاور.

مثال: بإستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي:

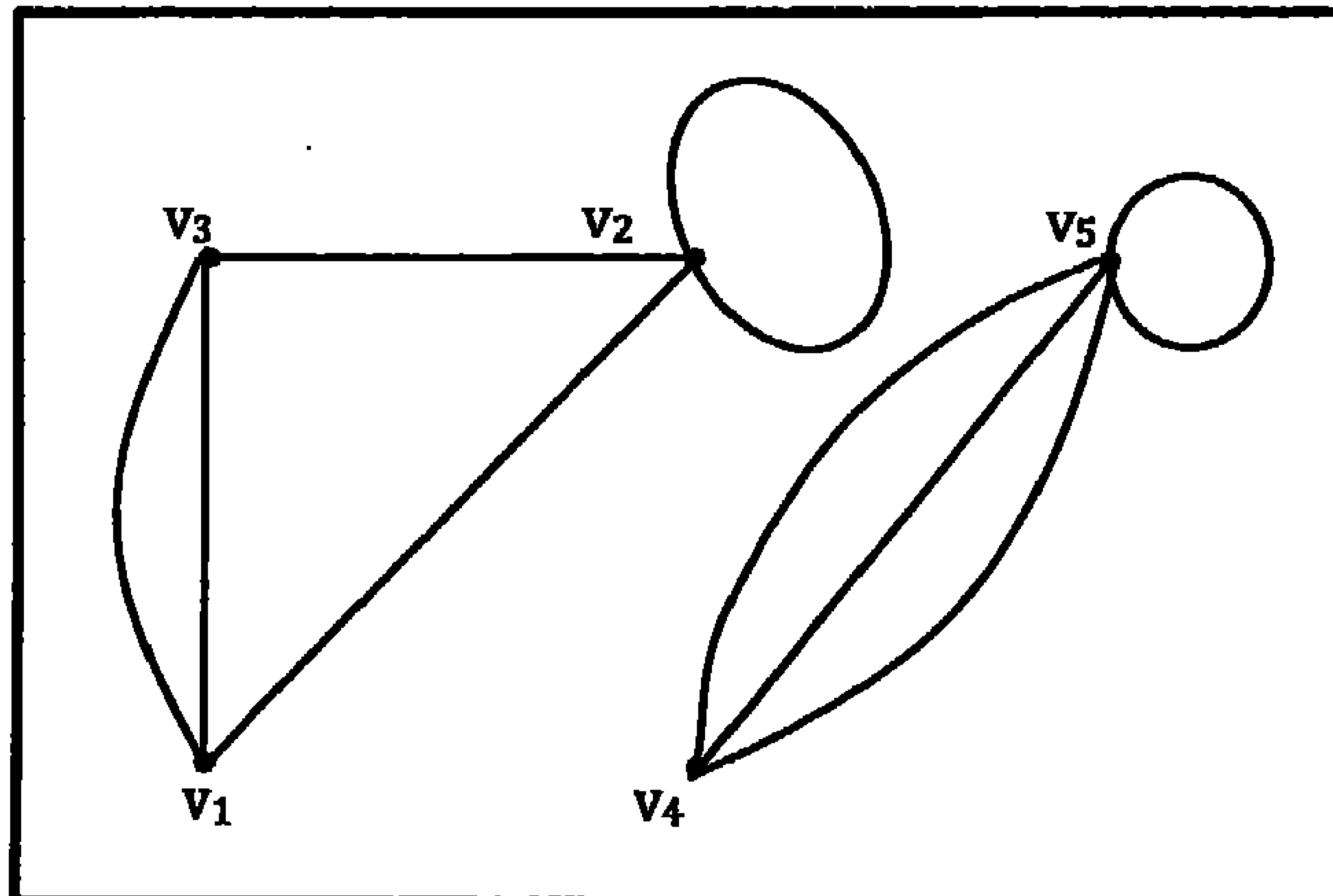


الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: باستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي:



الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

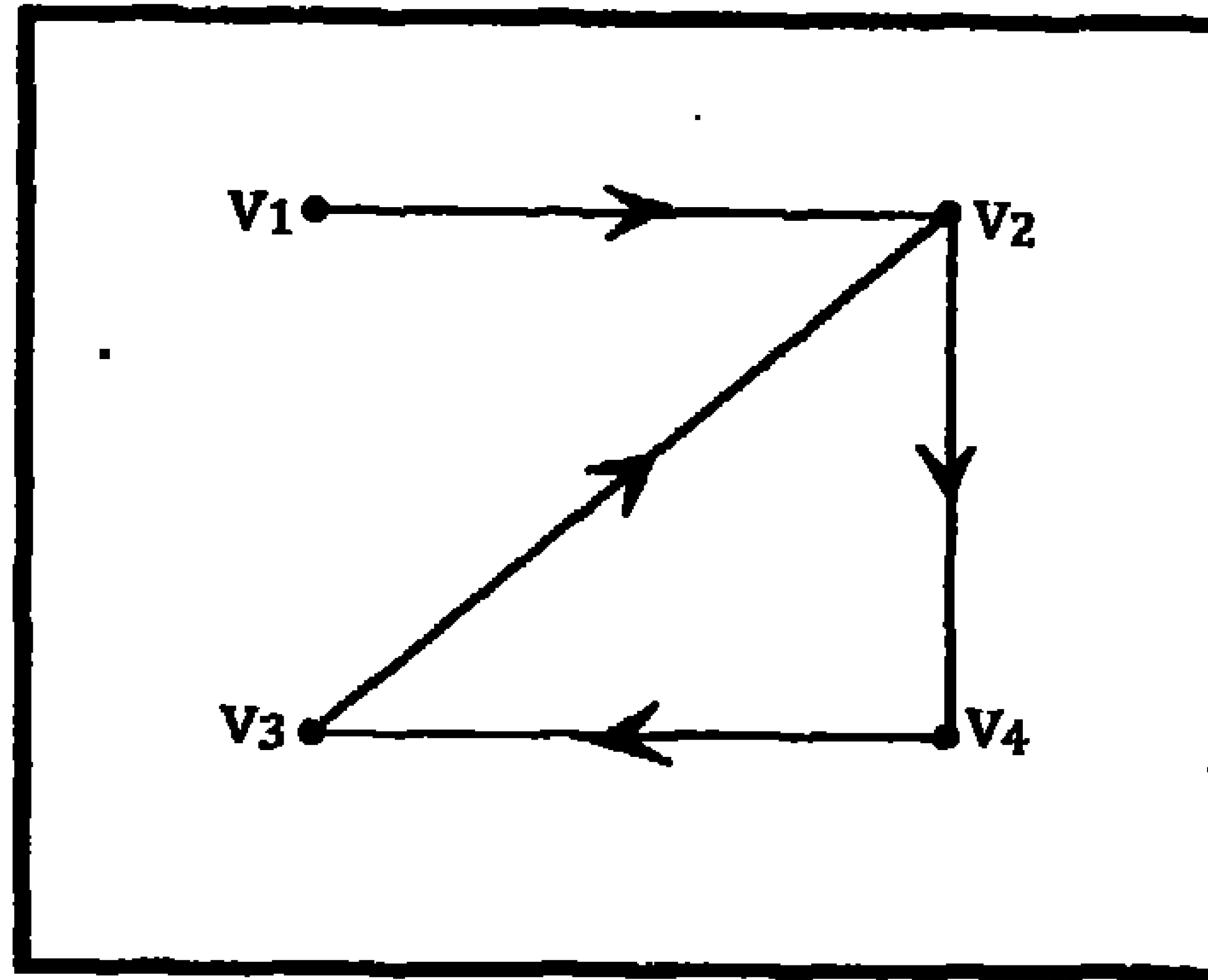
ملحوظة: من الممكن إستخدام مصفوفة التجاور لتمثيل المخططات المتجهة حيث نحسب قيمة العنصر a_{ij} في مصفوفة التجاور كما يلي:

$a_{ij}=1$ إذا وجد ضلع متجهة بدايته الرأس v_i ونهايته الرأس v_j .

$a_{ij}=0$ إذا لم يوجد ضلع متجهة بدايته الرأس v_i ونهايته الرأس v_j .

ملاحظة: مصفوفة التجاور للمخطط المتجه ليس ضروري أن تكون مصفوفة متماثلة.

مثال: بإستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي:

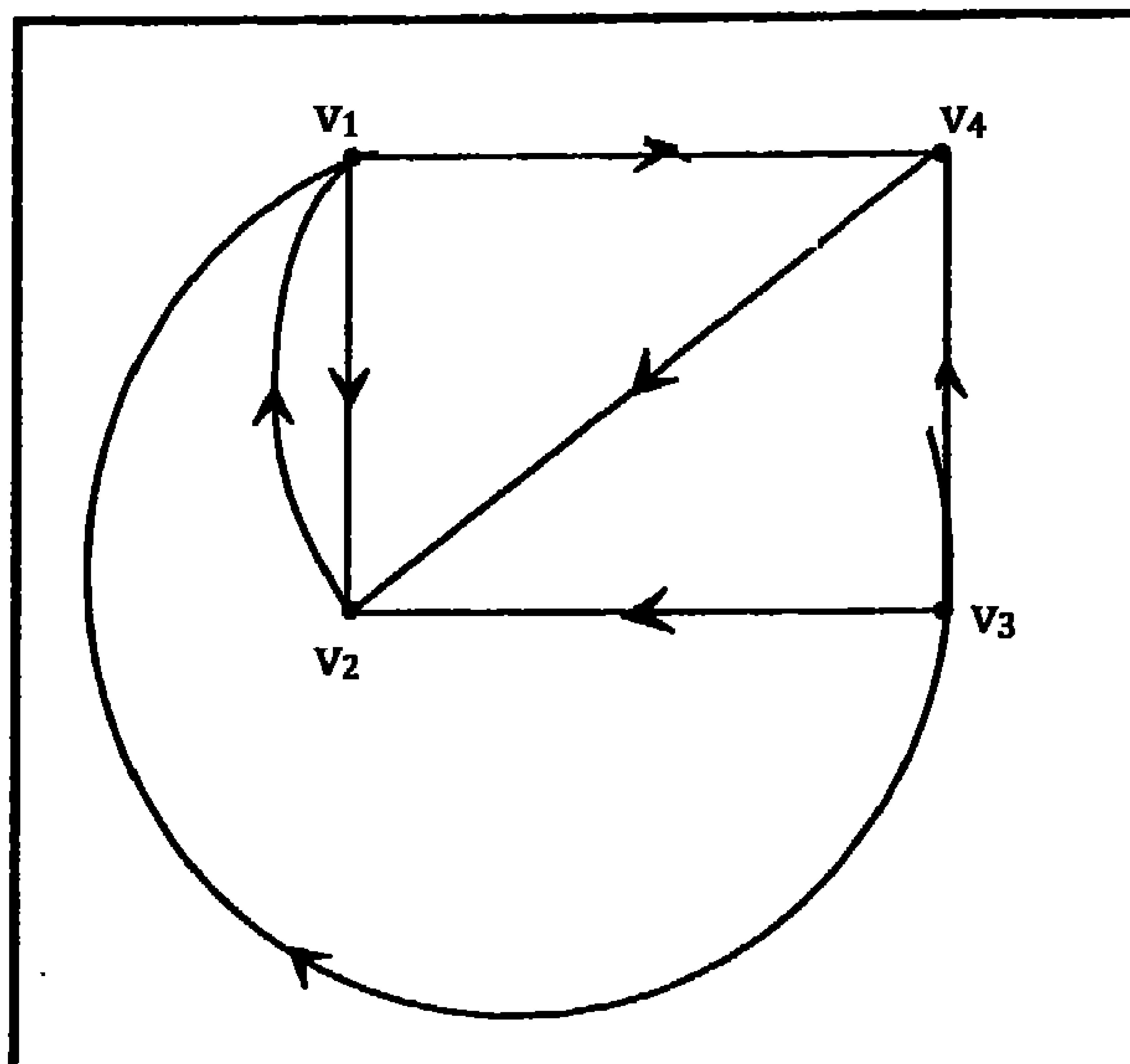


الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: بإستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي:



الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

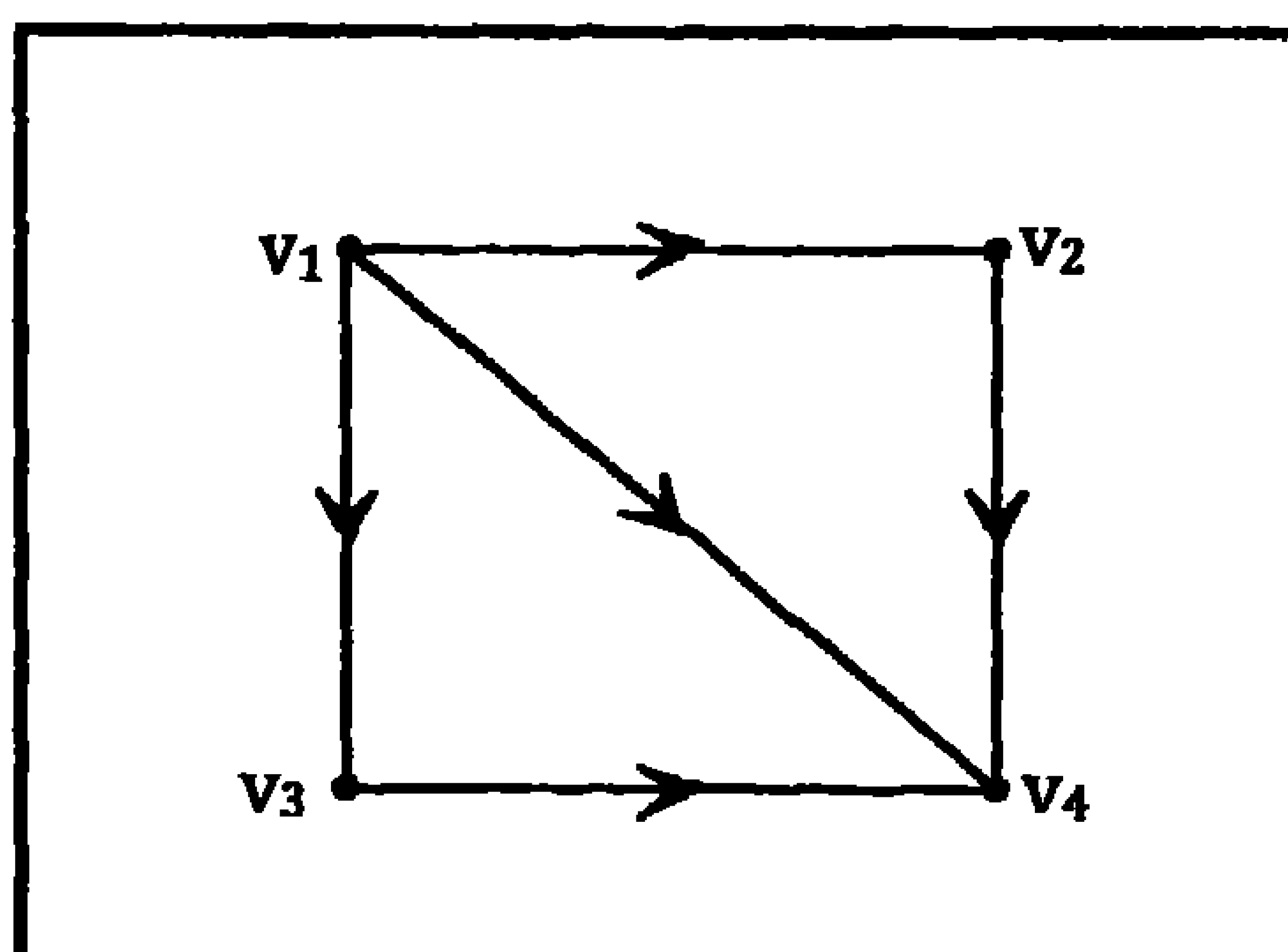
ملاحظات:

1. مصفوفة التجاور للمخططات الغير متجهة تكون مصفوفة متماثلة symmetric matrix بينما تكون مصفوفة غير متماثلة في حالة المخططات المتجهة.
2. يمكن حساب درجة أي رأس في المخطط الإتجاهي بإستخدام مصفوفة التجاور كما يلي:

$$\deg(v_i) = \deg^{+}(v_i) + \deg^{-}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

= مجموع الصف(i) + مجموع العمود(i) =

مثال: بإستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي ثم إحسب درجات رؤوس المخطط:



الحل:

أولاً: مصفوفة التجاور للمخطط هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثانياً: لحساب درجات رؤوس المخطط نكون الجدول التالي:

v_i \ v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	$deg^+(v_i)$
v_1	0	1	1	1	3
v_2	0	0	0	1	1
v_3	0	0	0	1	1
v_4	0	0	0	0	0
$deg^-(v_j)$	0	1	1	3	

إذن:

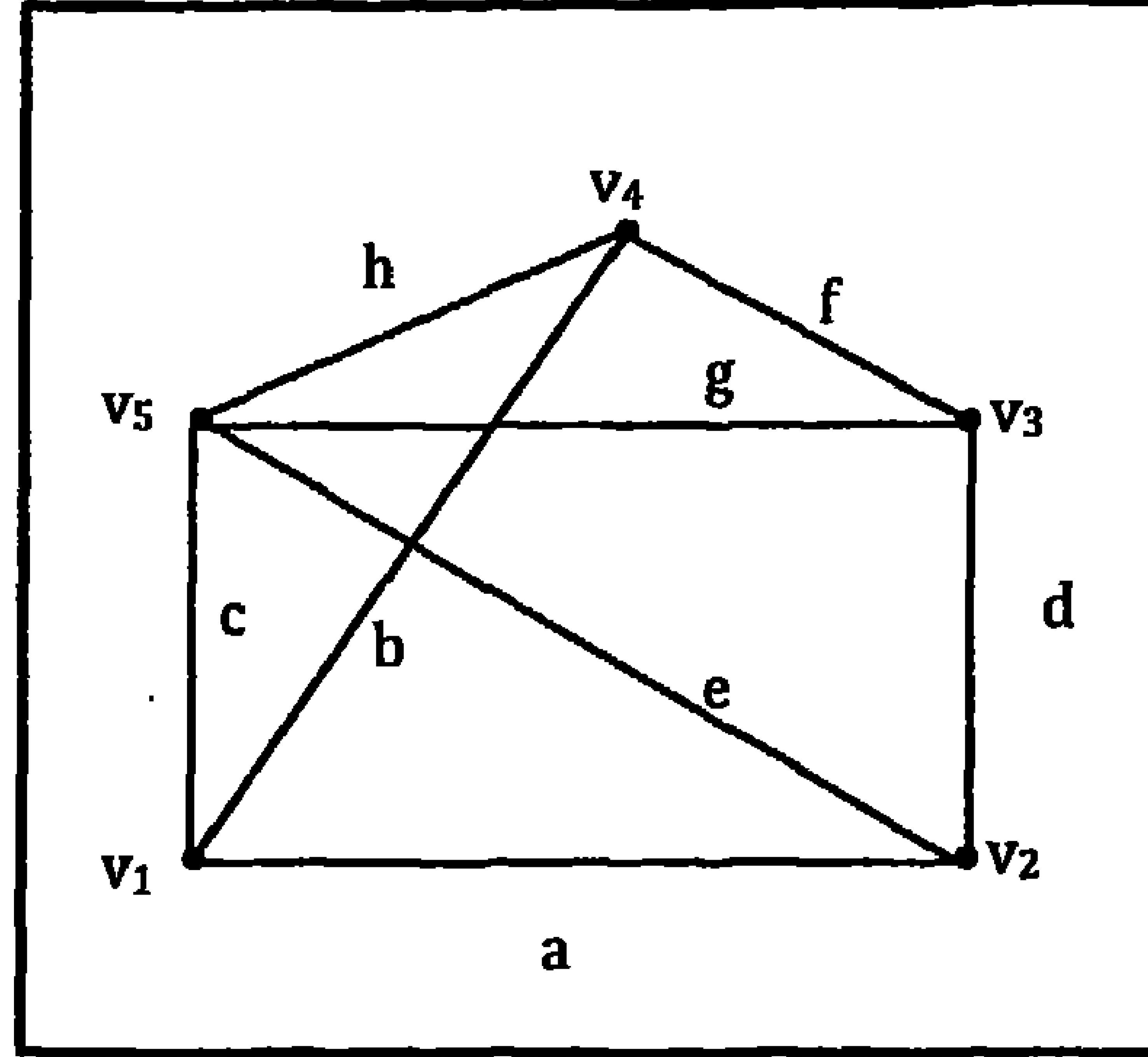
$deg(v_1)=3+0=3$, $deg(v_2)=1+1=2$, $deg(v_3)=1+1=2$, $deg(v_4)=0+3=3$

ملحوظة: من الممكن إستخدام مصفوفة التجاور لتمثيل المخططات المعنونه الغيرمتجهة حيث نحسب قيمة العنصر a_{ij} في مصفوفة التجاور كما يلي:

$a_{ij} = w_{ij}$ إذا كانت $[v_i, v_j]$ تمثل ضلع في المخطط G .

$a_{ij} =0$ إذا كانت $[v_i, v_j]$ لا تمثل ضلع في المخطط G .

مثال: بإستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي:



الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

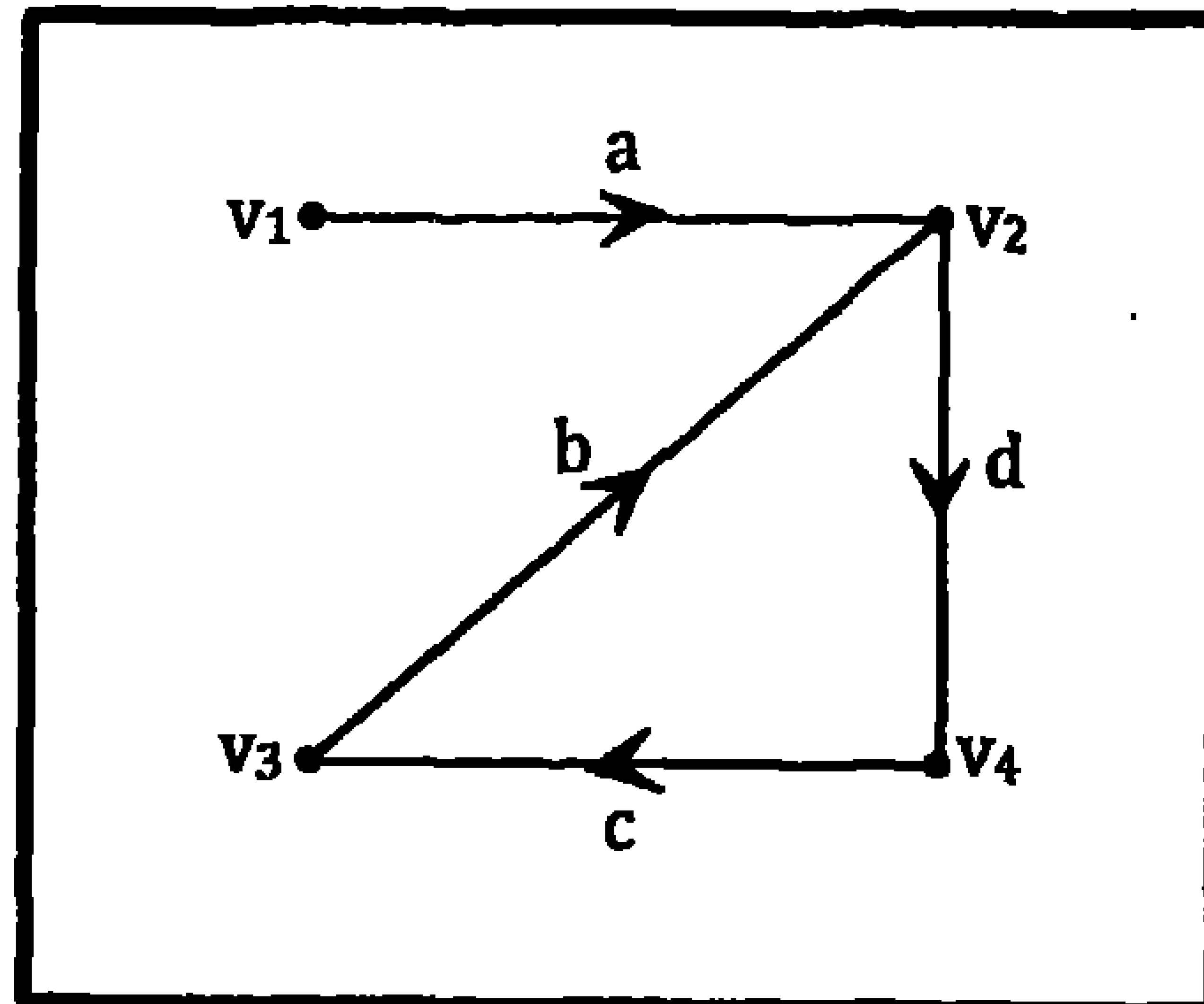
$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b & c \\ a & 0 & d & 0 & e \\ 0 & d & 0 & f & g \\ b & 0 & f & 0 & h \\ c & e & g & h & 0 \end{bmatrix}$$

ملحوظة: من الممكن إستخدام مصفوفة التجاور لتمثيل المخططات العنونة المتجهة حيث نحسب قيمة العنصر a_{ij} في مصفوفة التجاور كما يلي:

$w_{ij} = a_{ij}$ إذا وجد ضلع متجهة بدايته الرأس v_i ونهايته الرأس v_j .

$a_{ij} = 0$ إذا لم يوجد ضلع متجهة بدايته الرأس v_i ونهايته الرأس v_j .

مثال: بإستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي:



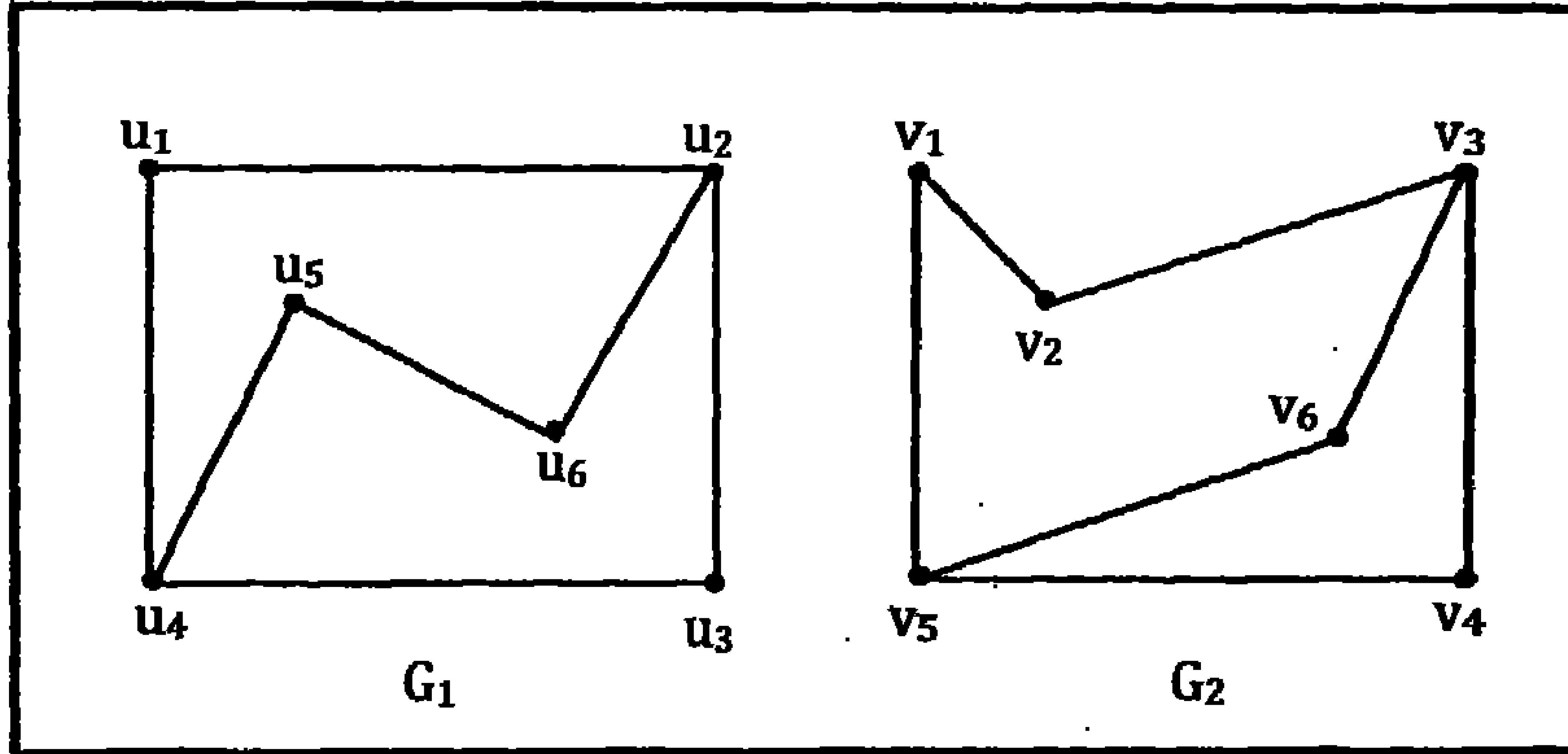
الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إن عملية إعادة ترتيب الرؤوس داخل مصفوفة التجاور هي عملية إعادة تسمية رؤوس المخطط وبالتالي يمكننا إستخدام مصفوفة التجاور لإثبات أن المخططين متشاكلين حيث أن المخططين يكونا متشاكلين إذا أمكن إثبات أن لهما نفس مصفوفة التجاور .

مثال: بإستخدام مصفوفات التجاور إثبت أن المخططين التالين متشاكلين:



الحل:

مصفوفة التجاور للمخطط G_1 هي:

$$M(G_1) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ومصفوفة التجاور للمخطط G_2 هي:

$$M(G_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

وبالتالي بإعادة ترتيب الرؤوس داخل مصفوفة التجاور $M(G_2)$ على الشكل التالي:

$$M(G_2) = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

وهي نفس مصفوفة التجاور $M(G_1)$ وبالتالي المخططين G_1 و G_2 يكونا متشاكلين.

(8-7-2) مصفوفات الوقوع Incidence Matrices

ليكن $G=(V, E)$ مخطط بسيط غير متجه يحتوي على الرؤوس $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ وعلى الأضلاع $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ فإننا نعرف مصفوفة الوقوع بأنها مصفوفة مستطيلة $A=[a_{ij}]$ من النوع $n\times m$ يكون فيها:

$a_{ij}=1$ إذا كان الضلع e_j يقع على الرأس v_i في المخطط G.

$a_{ij}=0$ إذا كان الضلع e_j لا يقع على الرأس v_i في المخطط G.

ملاحظات:

1. مجموع عناصر أي صف في مصفوفة الوقوع يساوي درجة الرأس الذي يقابل ذلك الصف.
2. بما أن كل ضلع في المخطط G يكون له نقطة بداية ونقطة نهاية فإن كل عمود في مصفوفة الوقع يجب أن يحتوي على 1 مرتين فقط وبقية عناصر العمود تكون أصفار.
3. إذا كانت جميع العناصر الموجودة في صف i جميعها أصفار في مصفوفة الوقوع فإن الرأس المناظر v_i تكون رأس منعزلة.

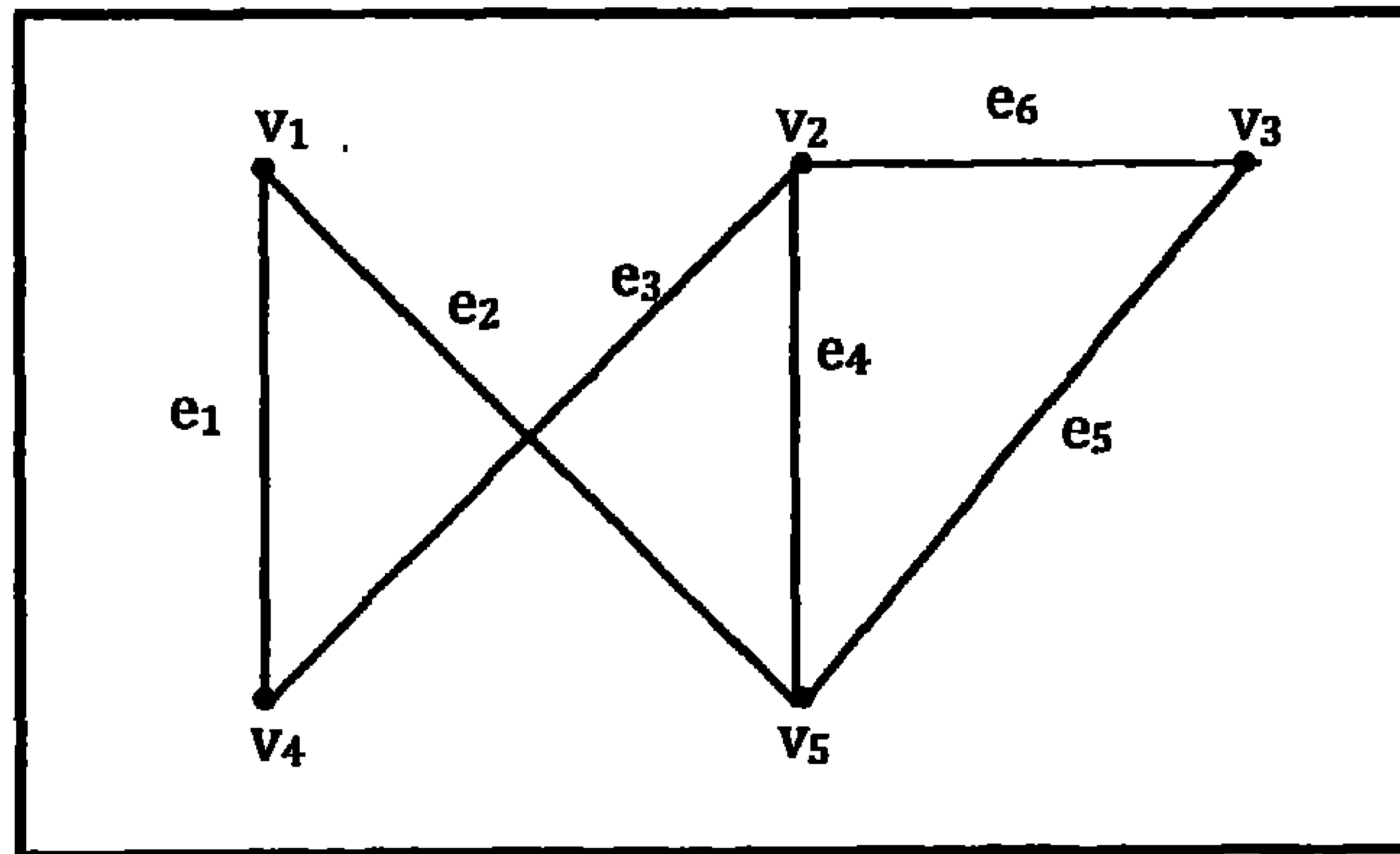
4. إذا كانت مصفوفة الوقوع تحتوي على صفين متساويين i, j فإن هذا يعني وجود ضلعين مكررين (متوازين) في المخطط G هما e_i, e_j يصلان بين الرأسين v_i, v_j .

5. إذا كان المخطط G مخطط غير مترابط ومتكون من مخططين جزئين مترابطين هما G_1 وG_2 وإذا كانت مصفوفات الوقوع لهذه المخططات الجزئية هما $M(G_1)$ و $M(G_2)$ فإن مصفوفة الوقوع للمخطط G تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} M(G_1) & 0 \\ 0 & M(G_2) \end{bmatrix}$$

6. إن تبديل أي صفين في مصفوفة الوقوع يعني تبديل أسماء الرأسين المناظرين لهذان الصفين بينما عملية تبديل عمودين من أعمدة مصفوفة الوقوع يعني لنا تبديل أسماء الضلعين المناظرين لهذان العمودين وبالتالي فإن عملية تبديل الصفوف أو عملية تبديل الأعمدة تعطينا مخطط يكون متشاكل مع المخطط الأول وبالتالي يمكننا إستخدام مصفوفة الوقوع لإثبات أن المخططين متشاكلين حيث أن المخططين يكونا متشاكلين إذا وفقط إذا أمكن الحصول على مصفوفة الوقوع لإحداهما من الأخرى عن طريق تبديل الصفوف أو تبديل الأعمدة.

مثال: بإستخدام مصفوفة الوقوع عبر عن المخطط التالي:

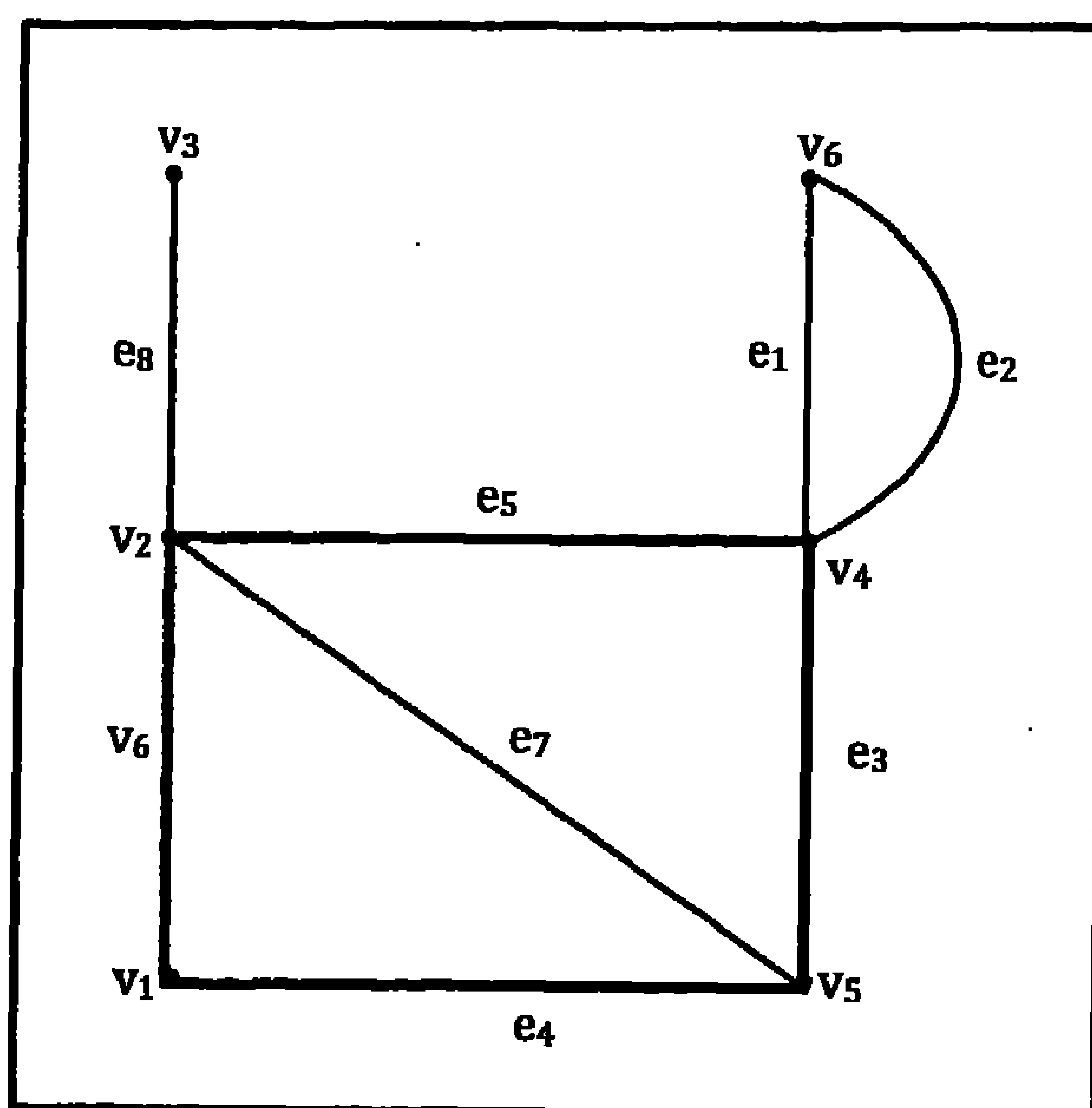


الحل:

مصفوفة الوقوع للمخطط هي:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	1
v_3	0	0	0	0	1	1
v_4	1	0	1	0	0	0
v_5	0	1	0	1	1	0

مثال: بإستخدام مصفوفة الوقوع عبر عن المخطط التالي:

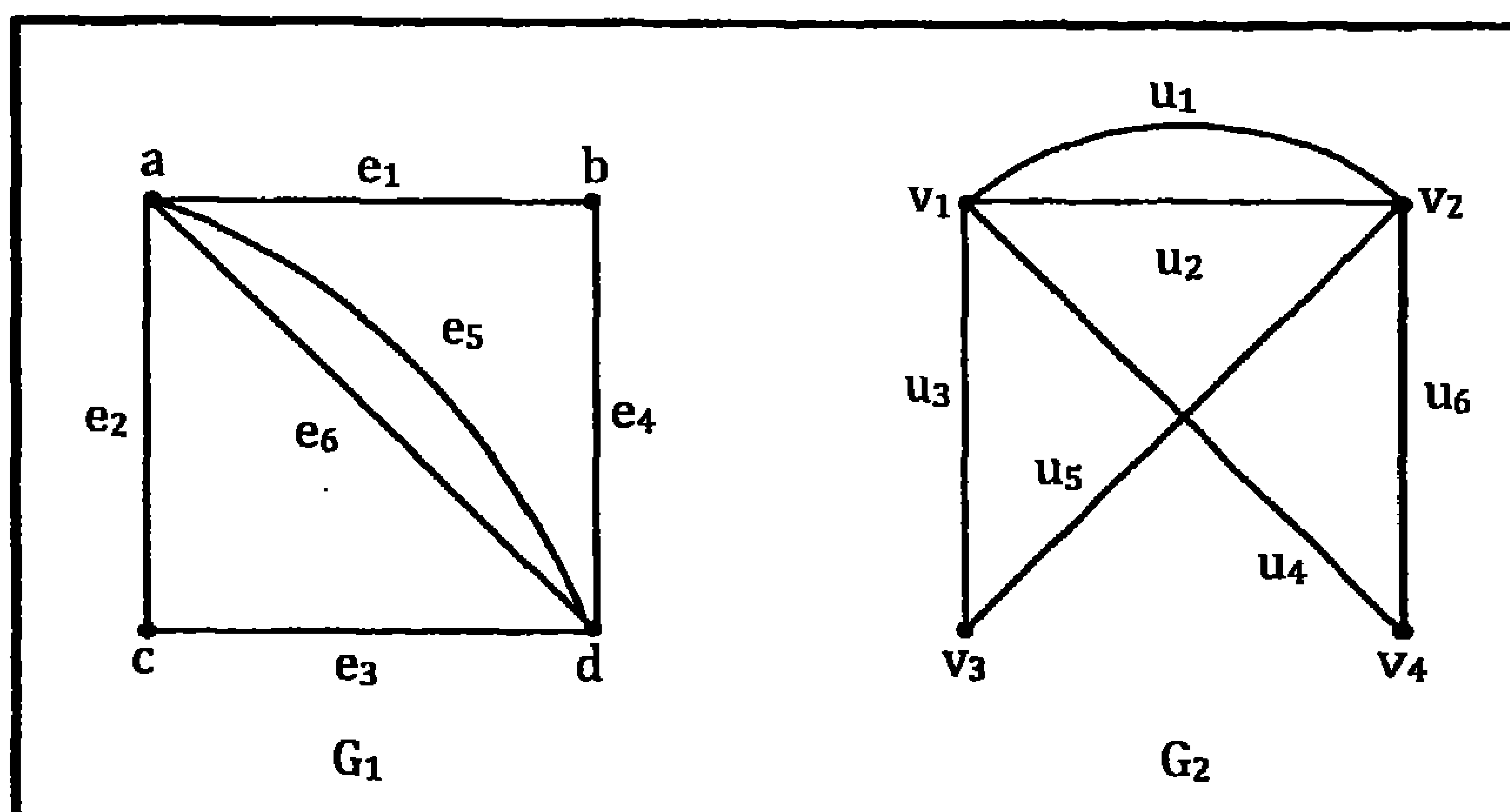


الحل:

مصفوفة الوقوع للمخطط هي:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	0	0	0	1	0	1	0	0
v_2	0	0	0	0	1	1	1	1
v_3	0	0	0	0	0	0	0	1
v_4	1	1	1	0	1	0	0	0
v_5	0	0	1	1	0	0	1	0
v_6	1	1	0	0	0	0	0	0

مثال: بإستخدام مصفوفات الوقوع اثبت أن المخططين التالين متشاكلين:



الحل:

مصفوفة الوقوع للمخطط G_1 هي:

$$M(G_1) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مصفوفة الوقوع للمخطط G_2 هي:

$$M(G_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

والأن سوف نحاول من المصفوفة $M(G_2)$ أن نستنتج المصفوفة $M(G_1)$ وذلك عن طريق تبديل الصفوف أو تبديل الأعمدة كما يلي:

$$M(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبتبديل الصفين الثاني والرابع نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبتبديل العمودين الأول والسادس نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبتبديل العمودين الثاني والخامس نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبتبديل العمودين الأول والرابع نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

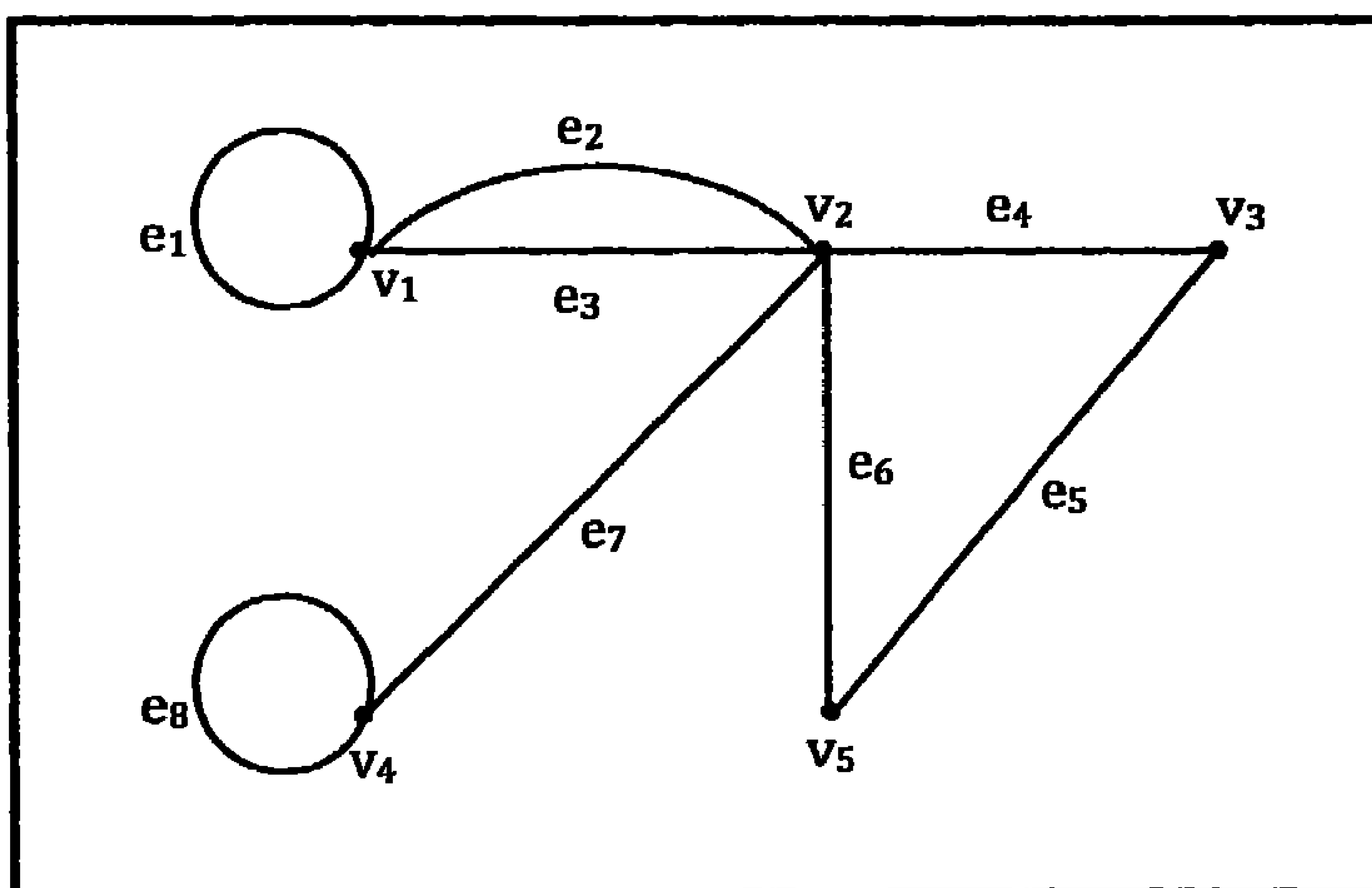
وبتبديل العمودين الثاني والثالث نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M(G_1)$$

ملحوظة: من الممكن استخدام مصفوفة الوقوع لتمثيل المخططات الغير متجه والغير بسيطة والتي تحتوي عقد وأضلاع مكررة حيث

1. العقدة عند الرأس v_i تعطى ب 1 في الموقع a_{ii} في مصفوفة الوقوع.
2. الأضلاع المكررة e_j التي تقع على الرأس v_i في المخطط G تعطى كل ضلع من الأضلاع المكررة ب1 في الموقع a_{ij} في مصفوفة الوقوع.

مثال: بإستخدام مصفوفة الوقوع عبر عن المخطط التالي:

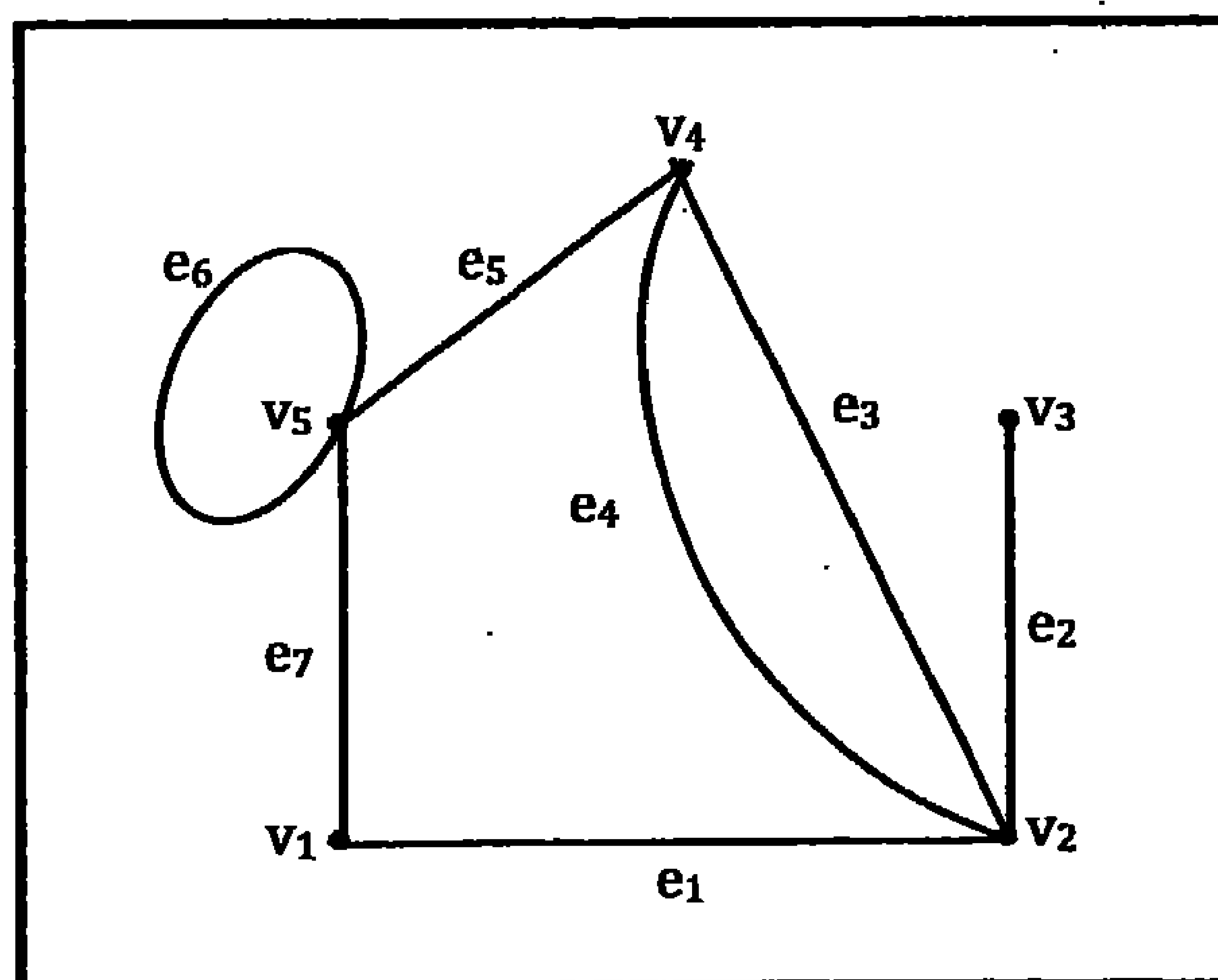


الحل:

مصفوفة الوقوع للمخطط هي:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال: بإستخدام مصفوفة الوقوع عبر عن المخطط التالي:



الحل:

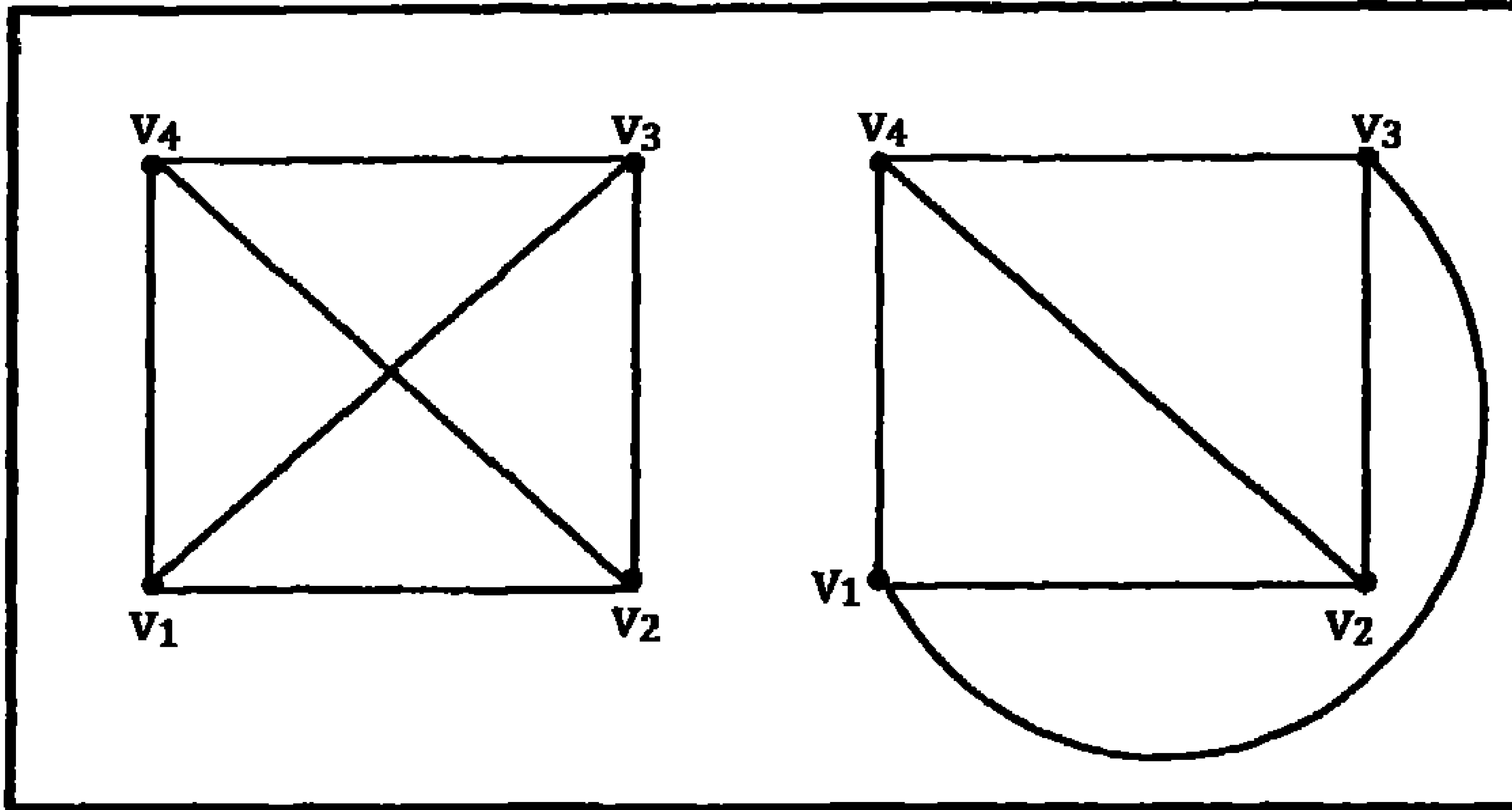
مصفوفة الوقوع للمخطط هي:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

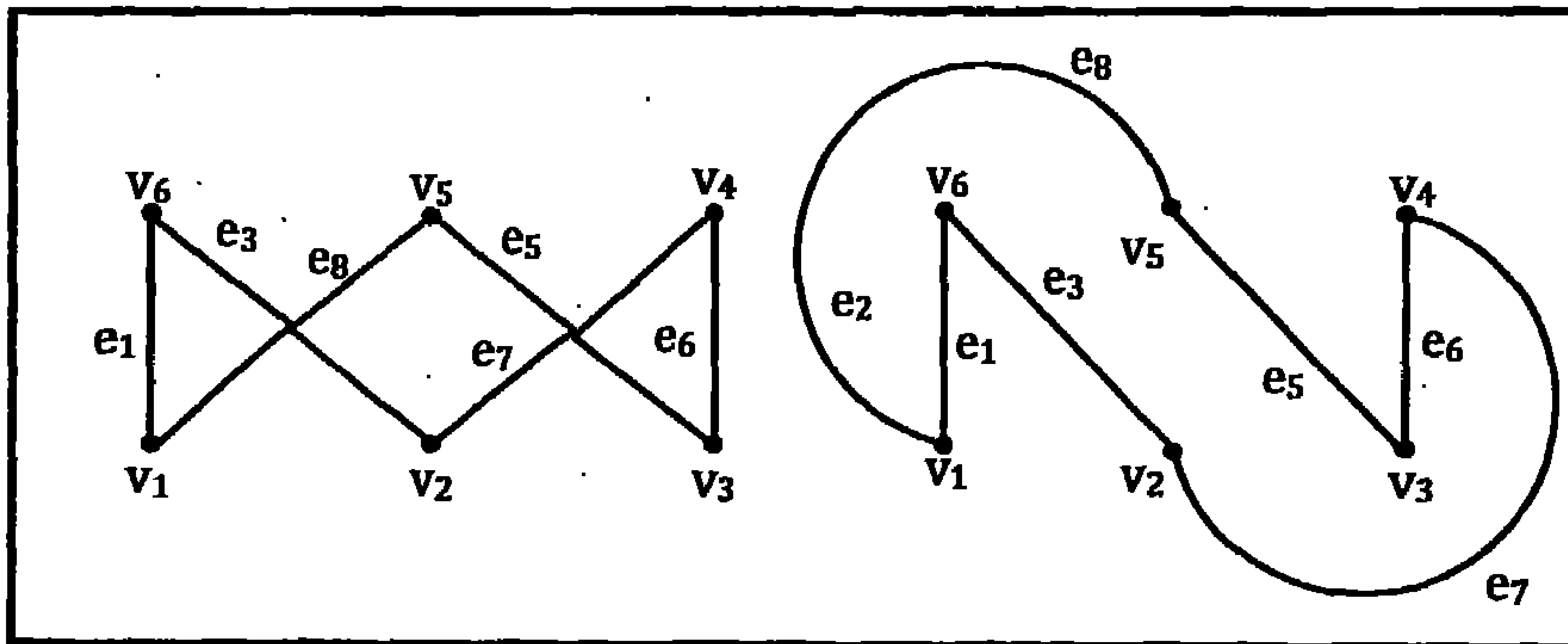
(8-8) المخططات المستوية Planar Graphs

المخطط المستوى planar graph هو مخطط يمكن رسمة في المستوى بدون أي تقطعات بين أضلاعة إلا عند الرؤوس فقط.

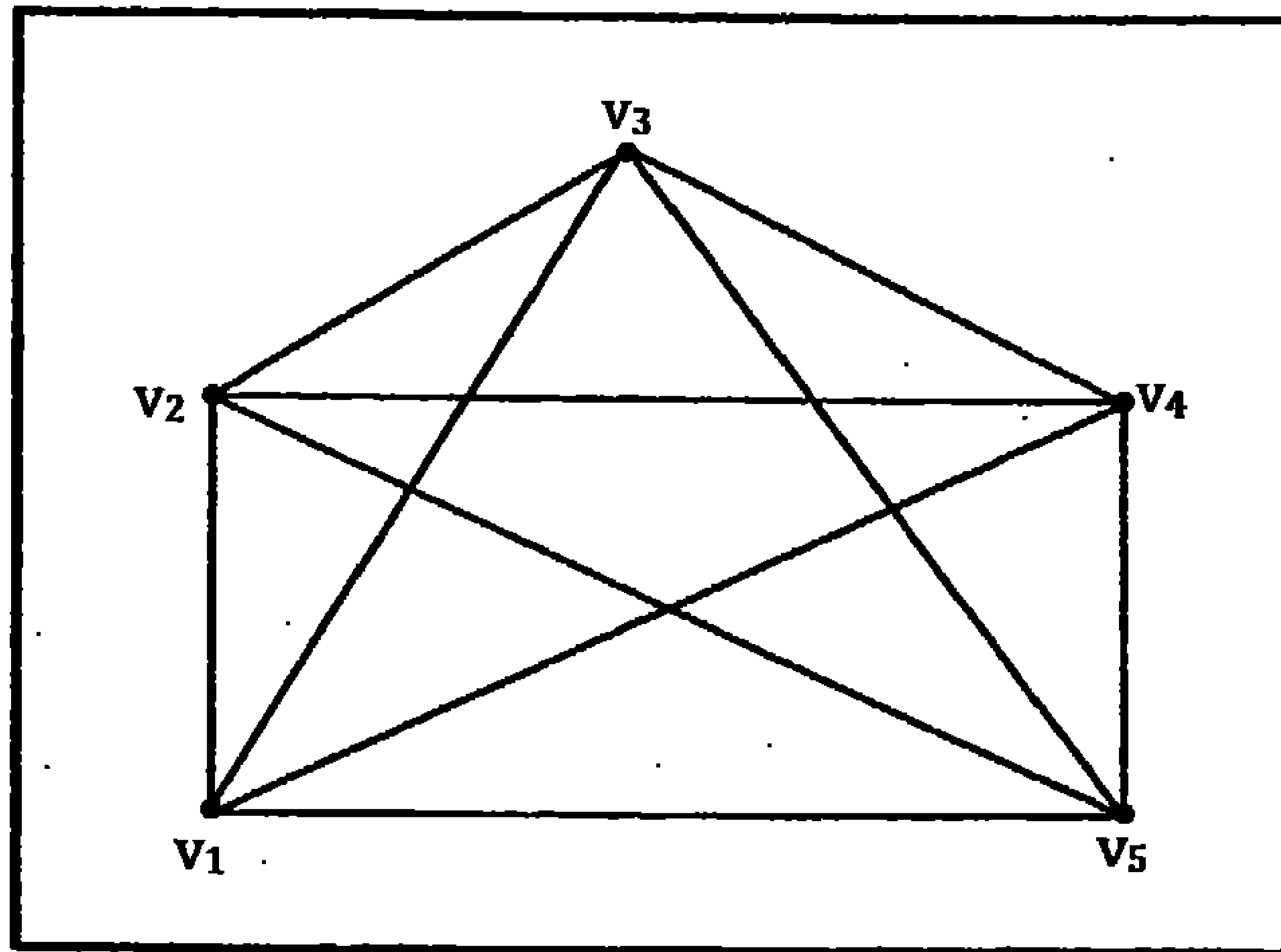
مثال: المخطط التالي مخطط مستوى لأن:



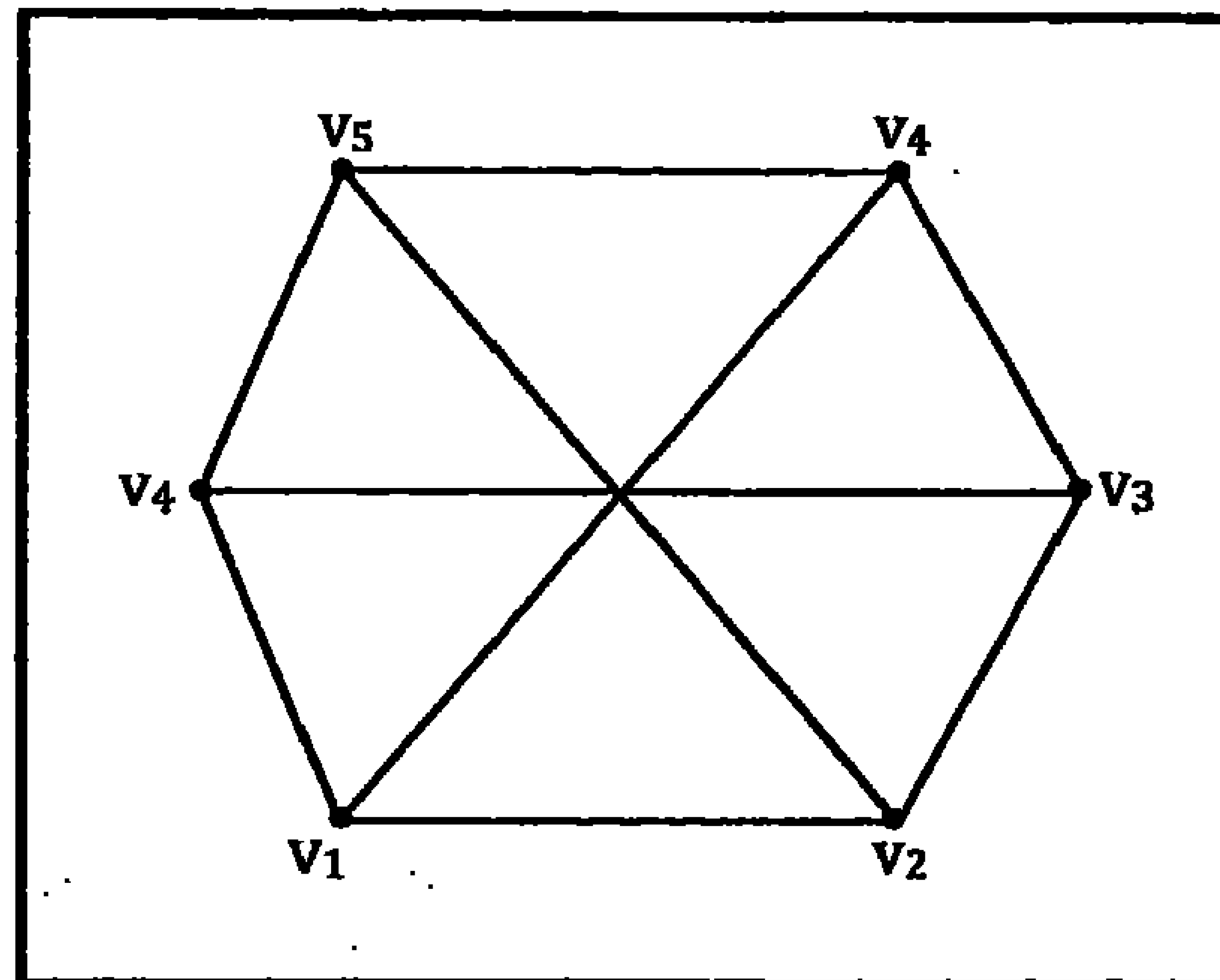
مثال: المخطط التالي مخطط مستوي لأن:



مثال: المخطط التالي مخطط غير مستوي:

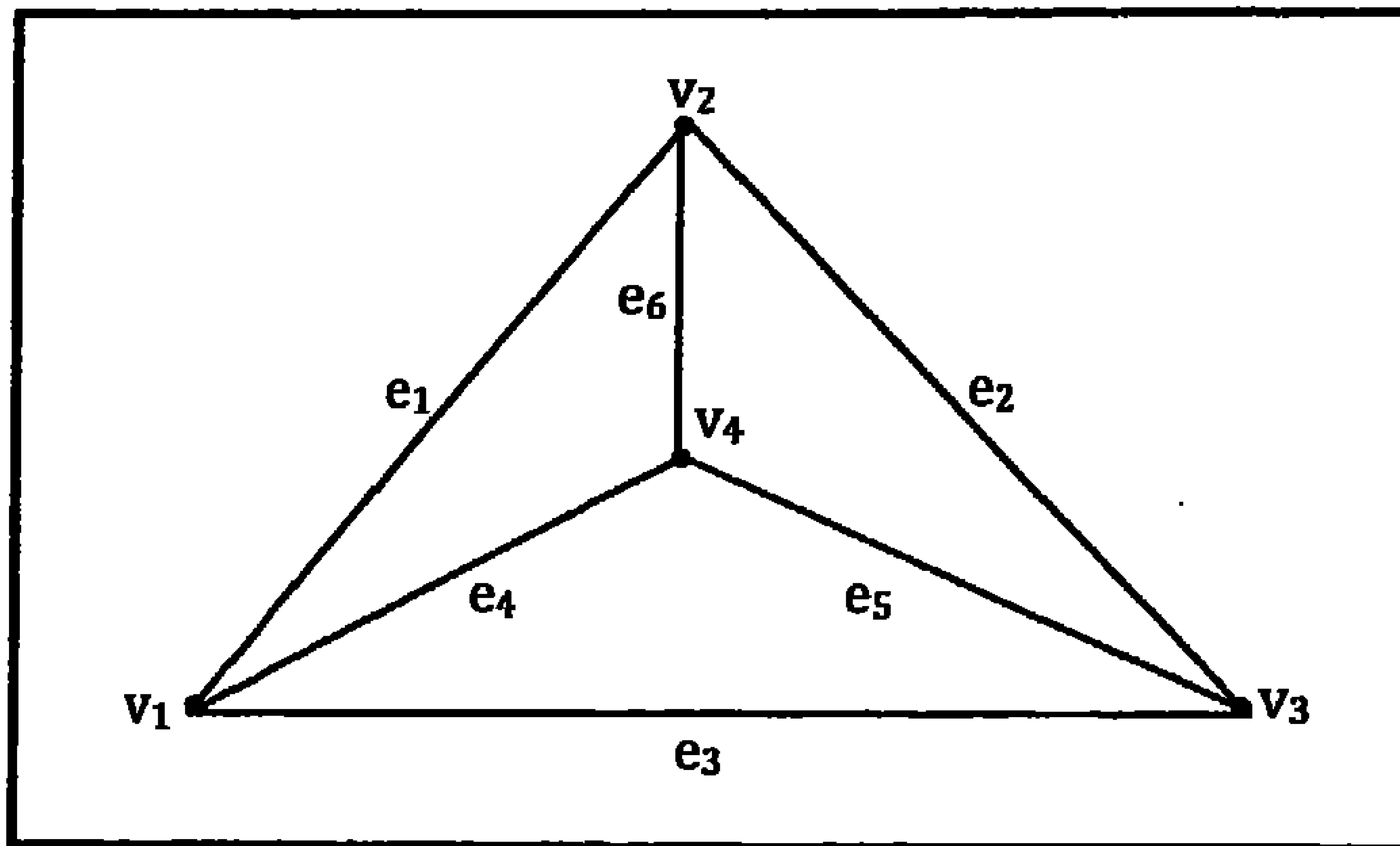


مثال: المخطط التالي $K_{3,3}$ مخطط غير مستوي:

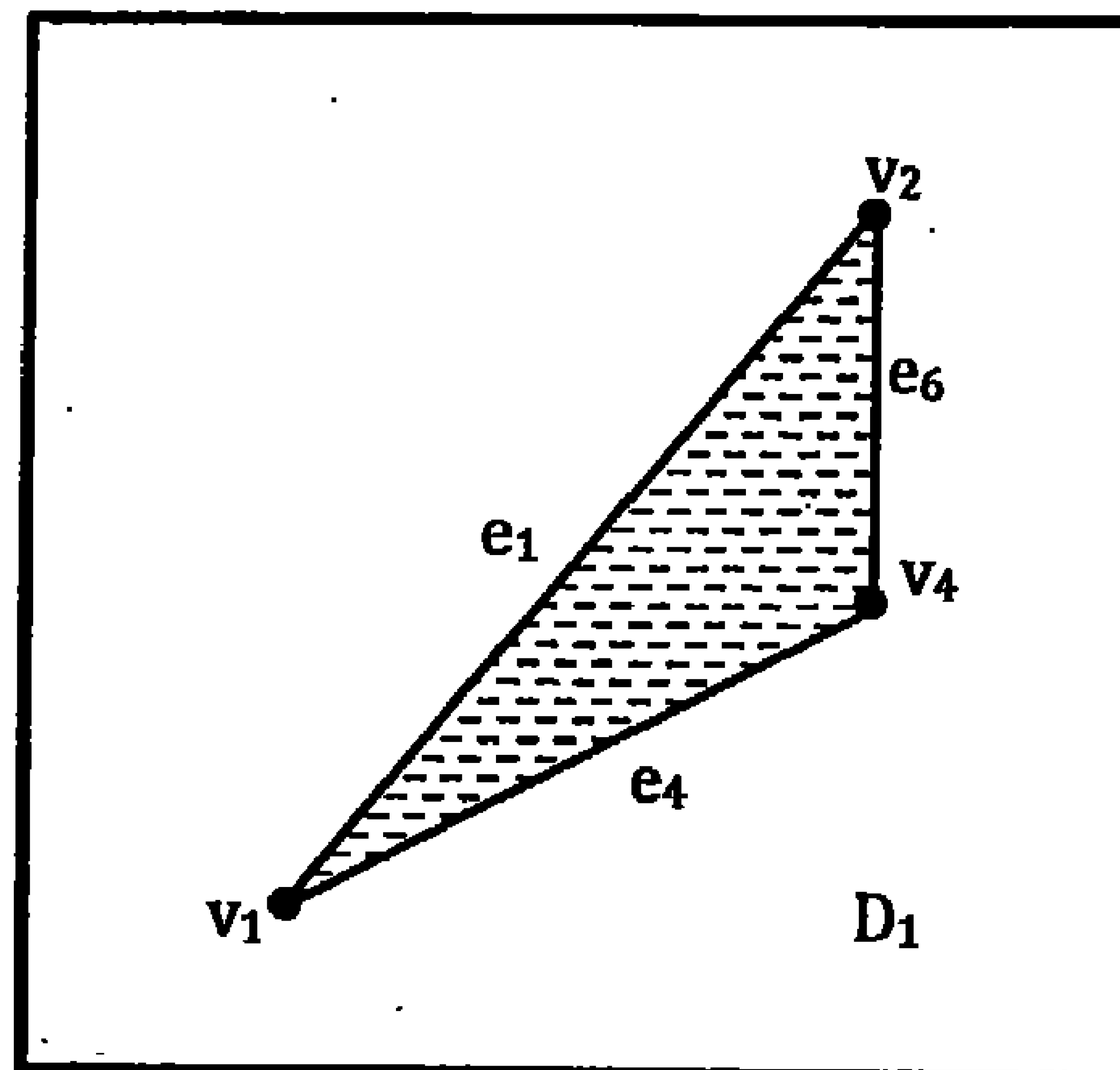


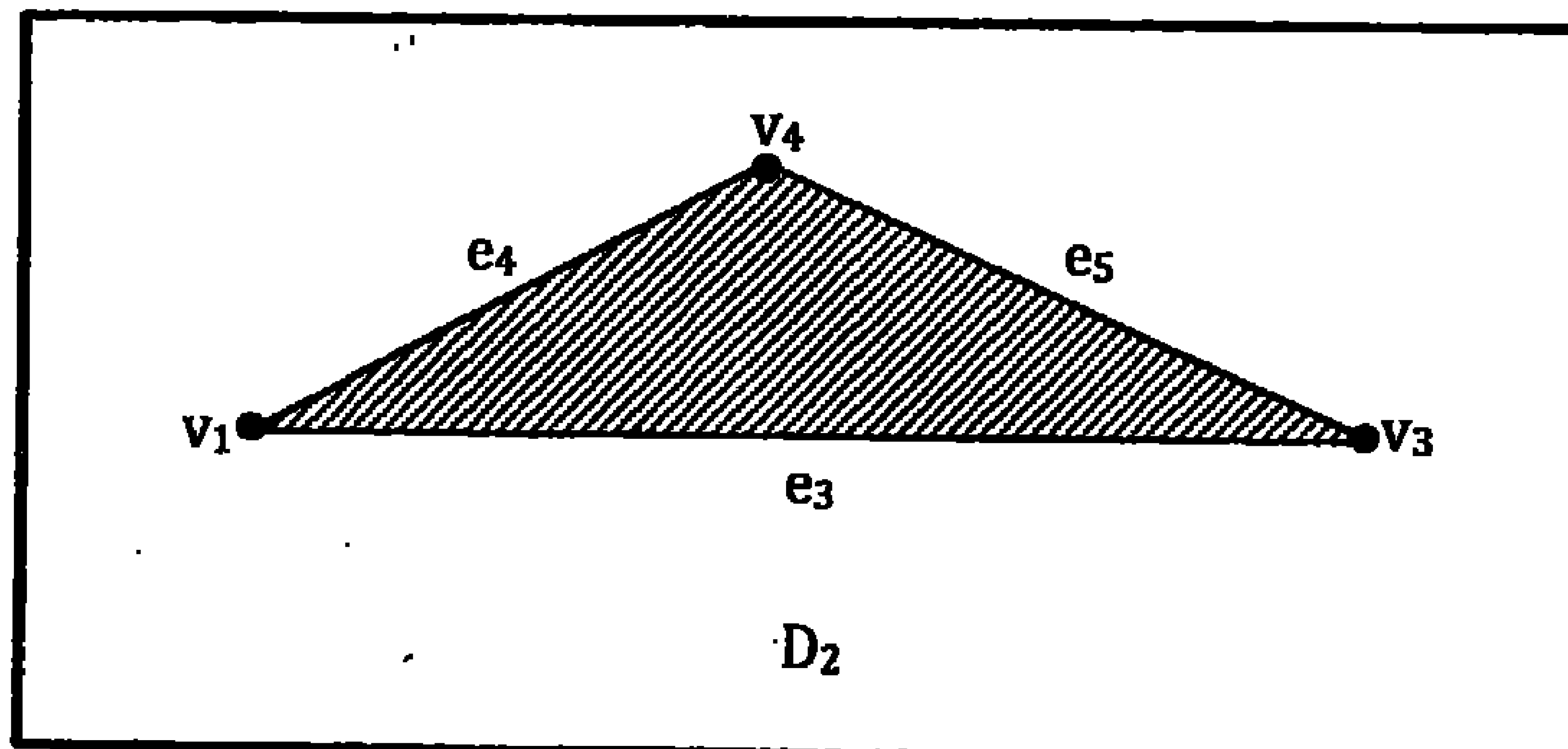
ملاحظة: إذا كان لدينا ضلع مغلق بسيط لا يتقاطع مع نفسه فإن هذا الخط يقسم المستوى إلى منطقتين إحداهما تقع داخل الخط المغلق والأخرى خارج المنطقة وهي منطقة غير محدودة فعندما يتجزأ ذلك المستوى إلى مناطق تكون مساحات من المستوى تكون محدودة بأضلاع من المخطط لا تنقسم إلى مساحات جزئية يطلق على كلا منها وجه face أو منطقة region وفي هذه التجزئة يطلق على المنطقة الخارجية الغير محدودة الوجه الخارجي exterior face أو الوجه الغير محدود unbounded face .

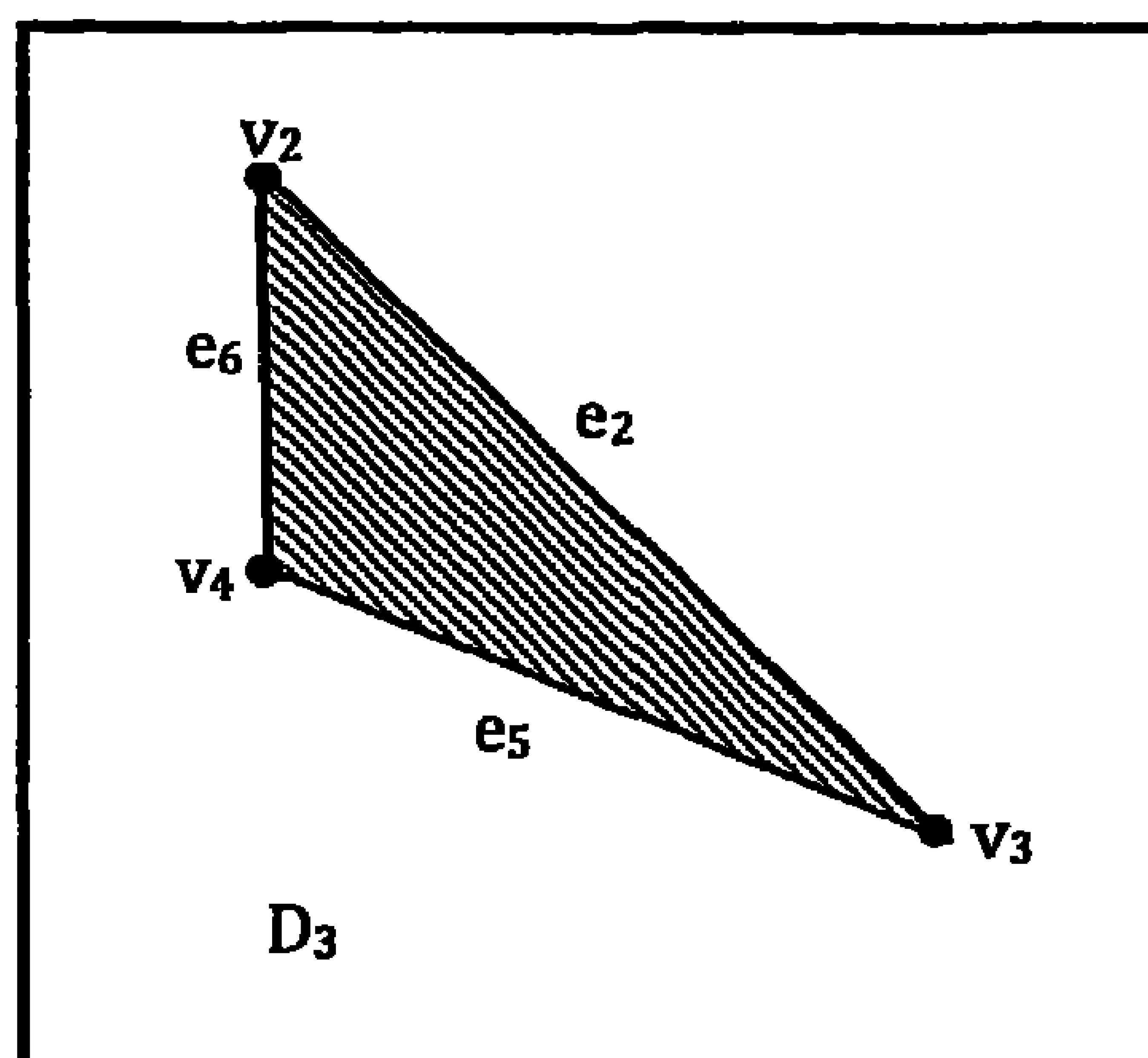
مثال (1): المخطط المستوى التالي:

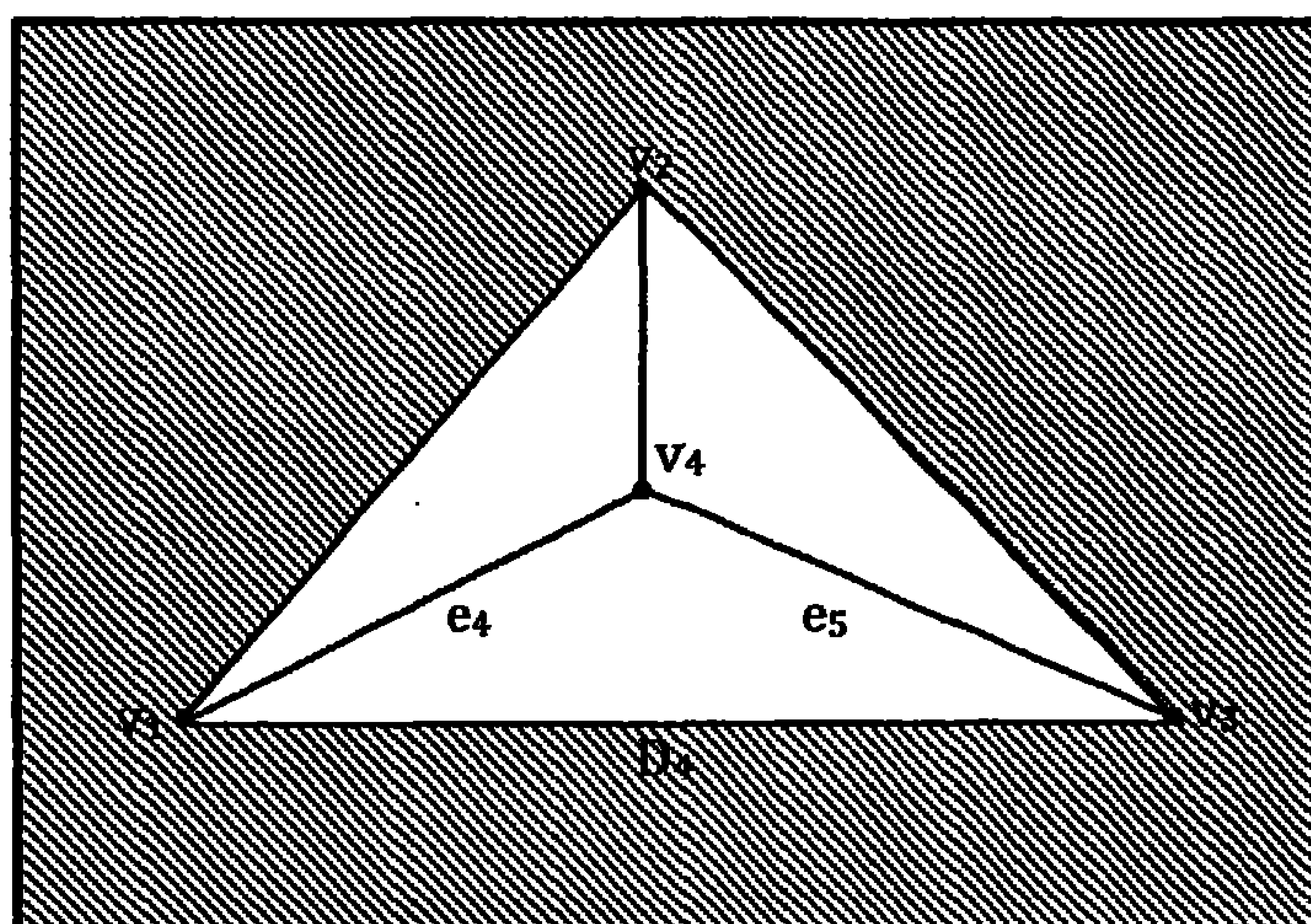


يحتوى على المناطق التالية:



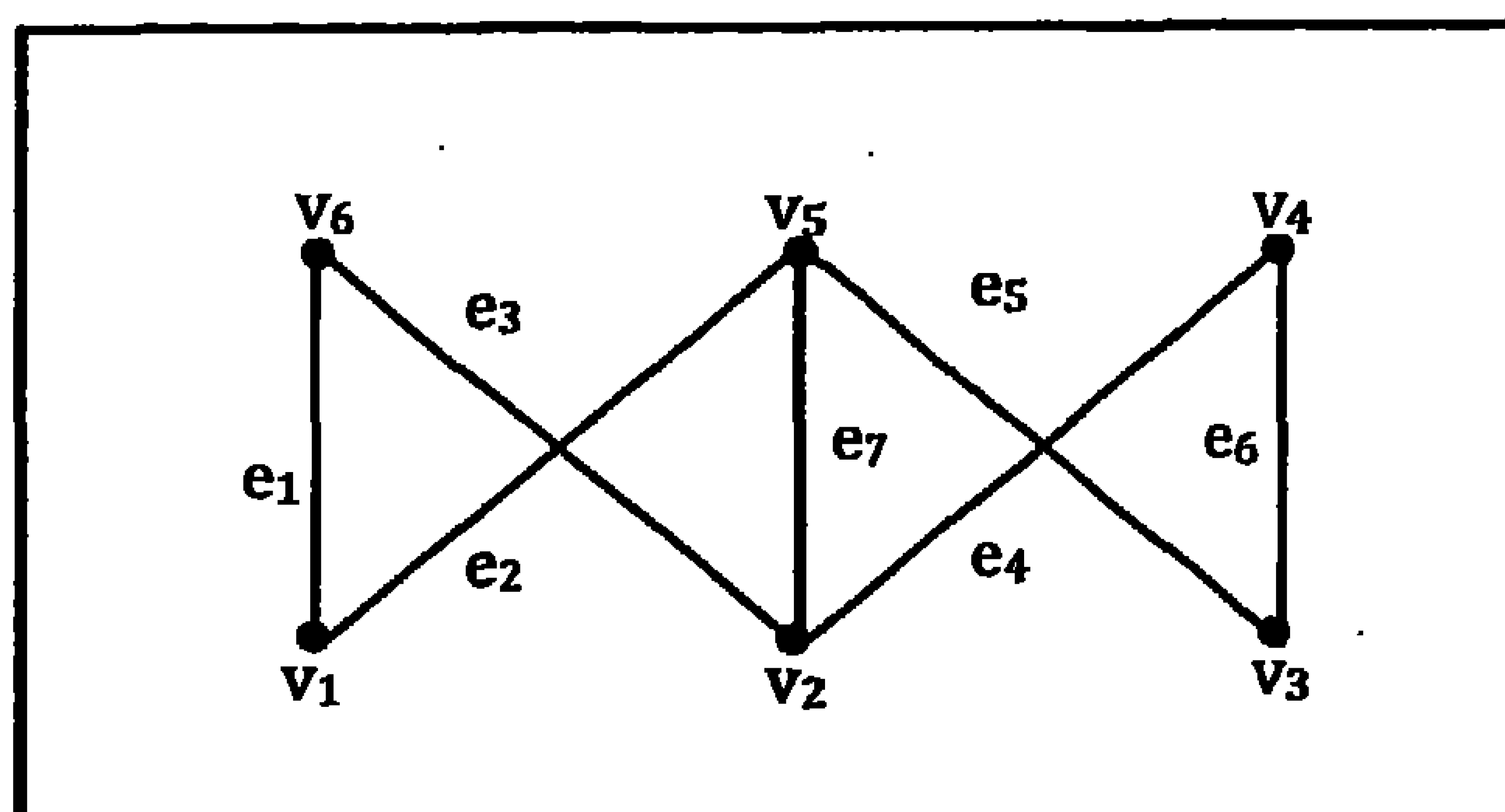




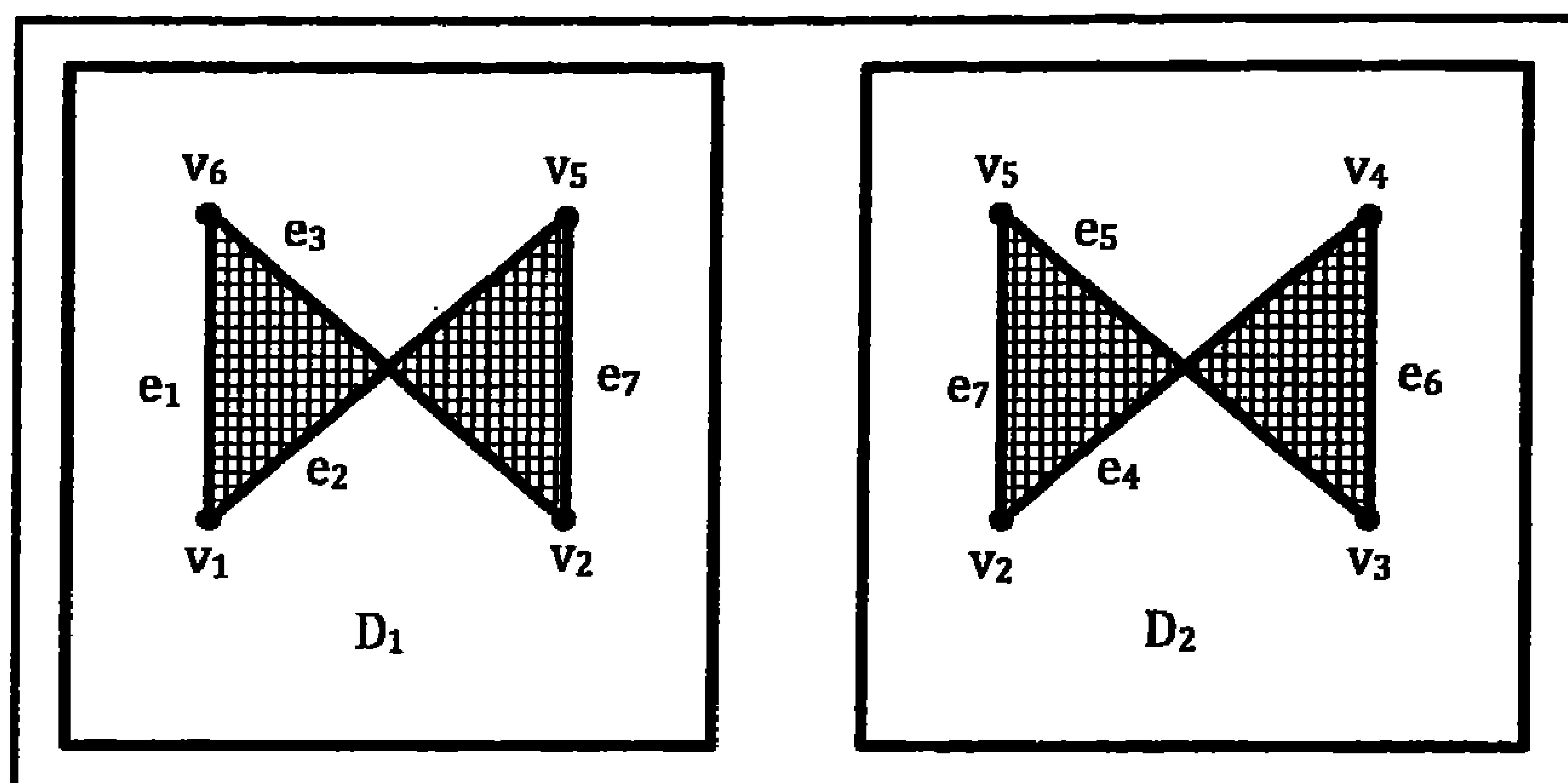


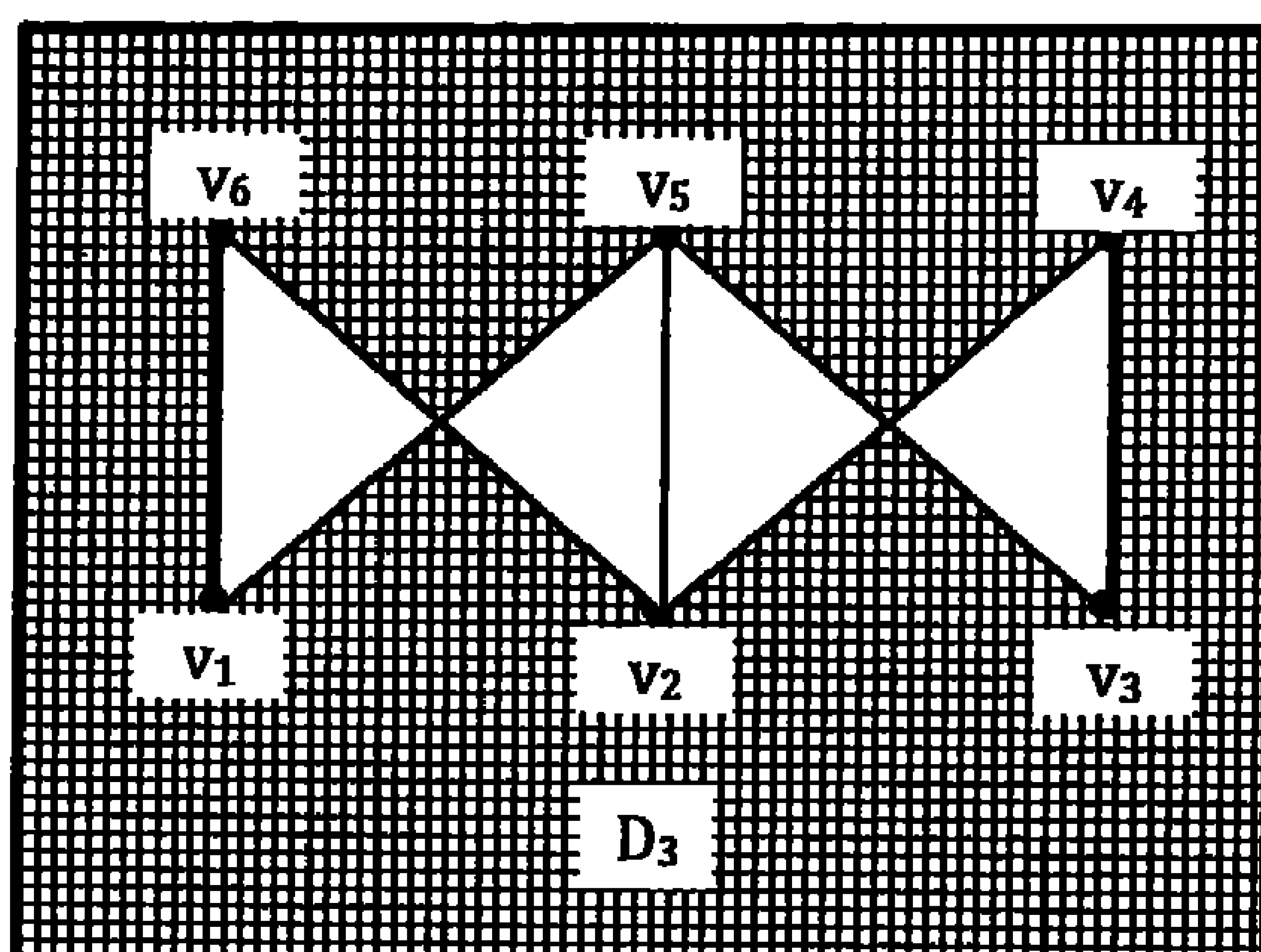
ملاحظة: المستوى D4 يسمى المنطقة (الوجه) اللانهائي (infinite face)

مثال (2): المخطط المستوى التالي:

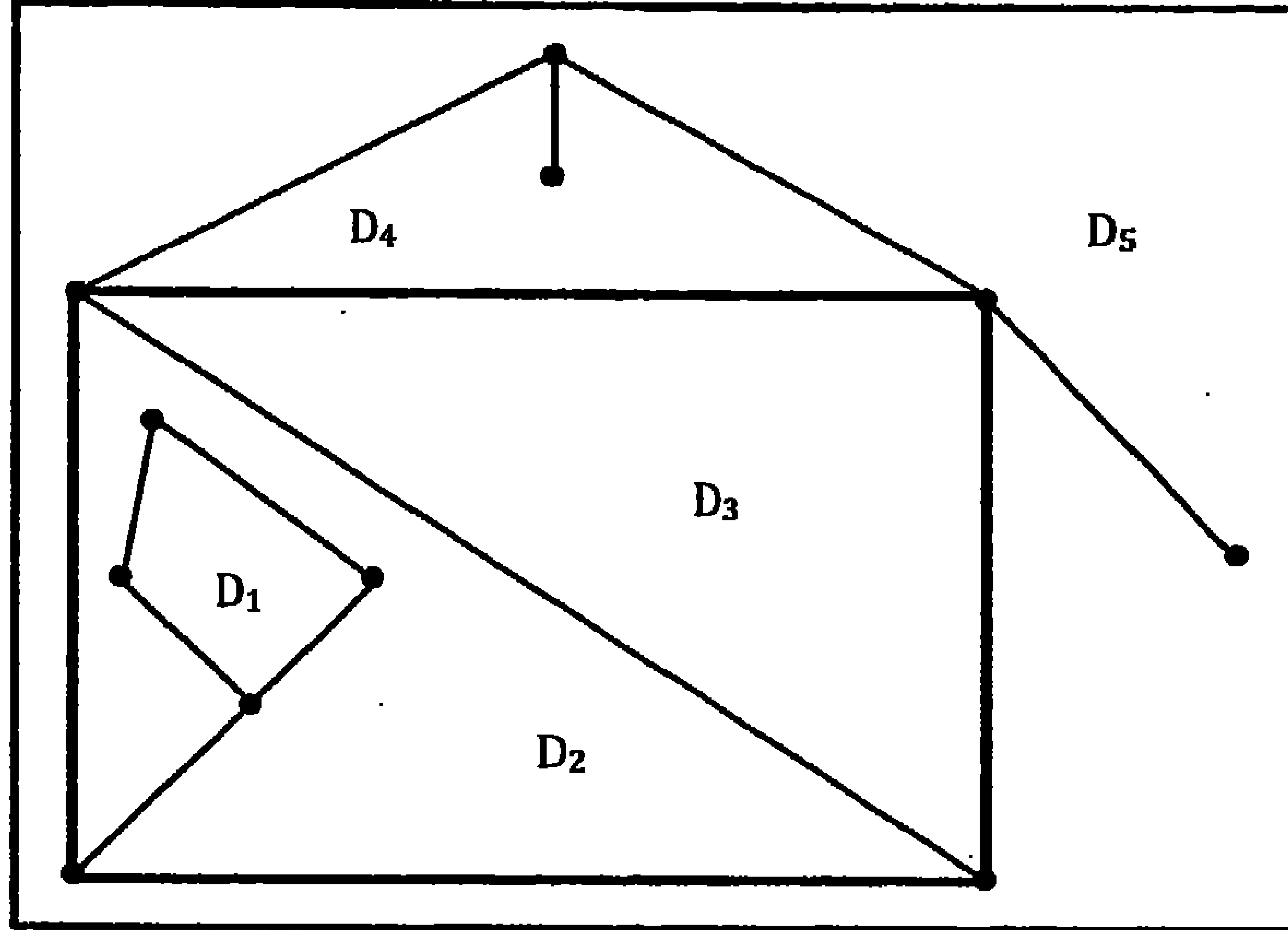


يحتوي على المناطق التالية:

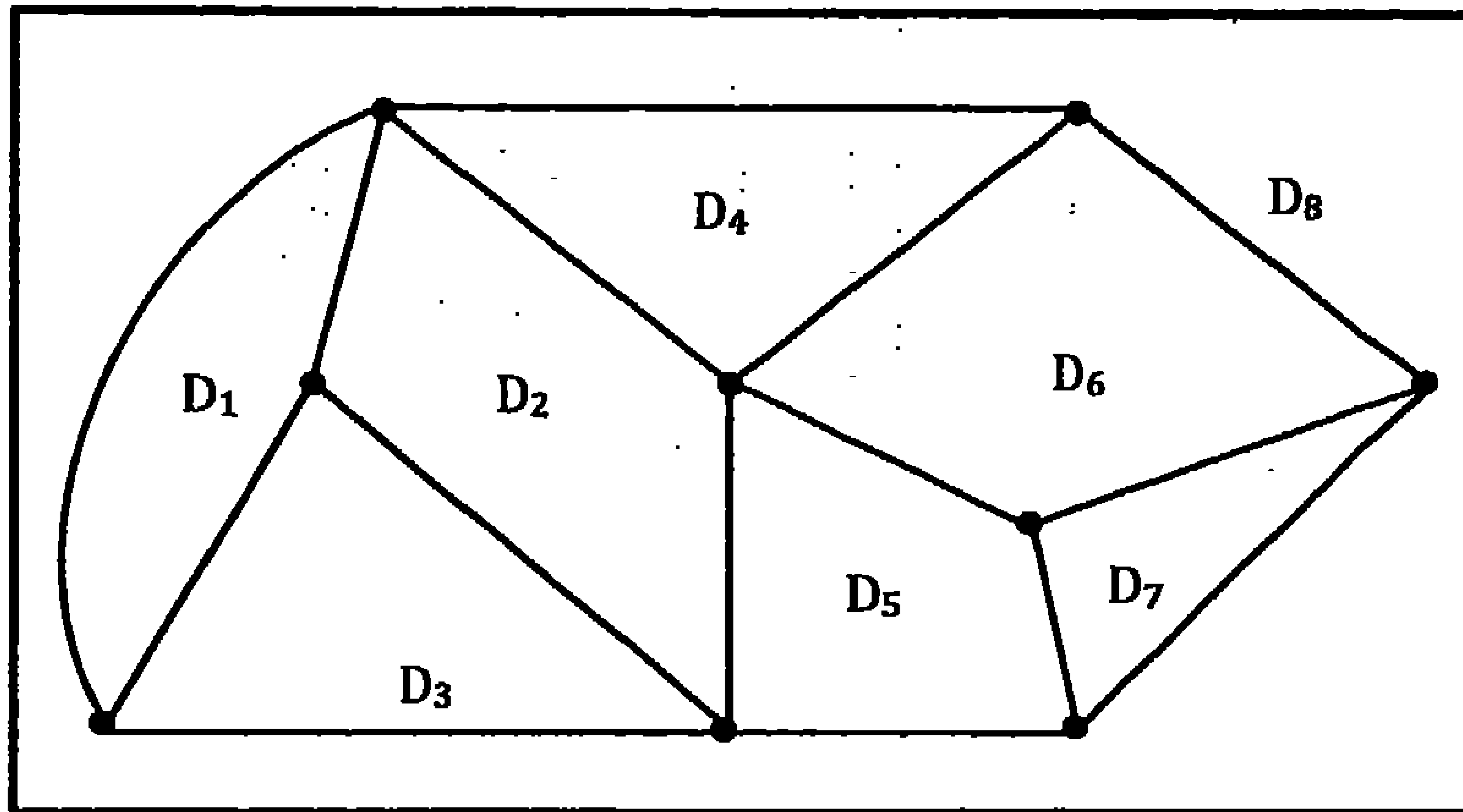




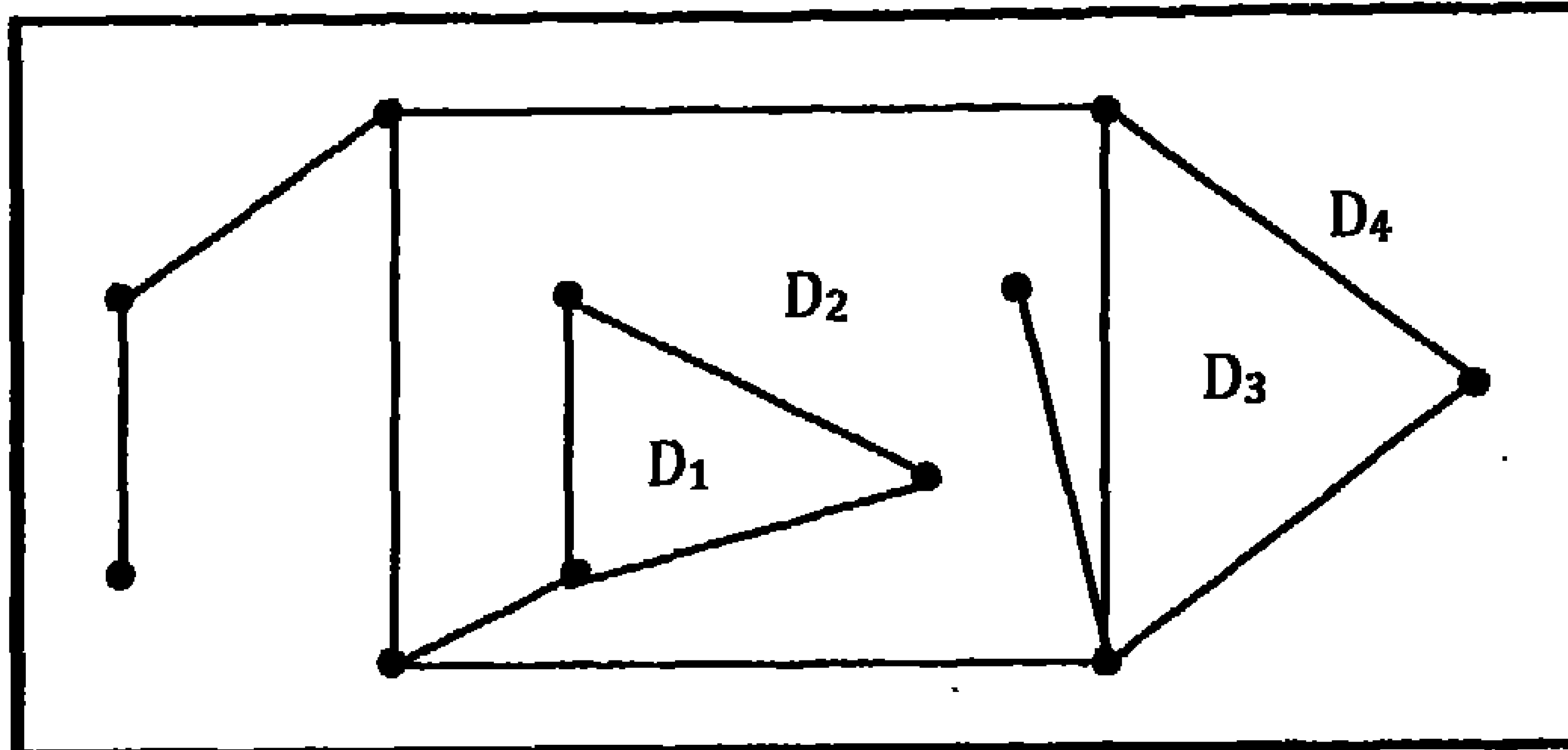
مثال (3): المخطط المستوى التالي ينقسم إلى 5 مناطق:



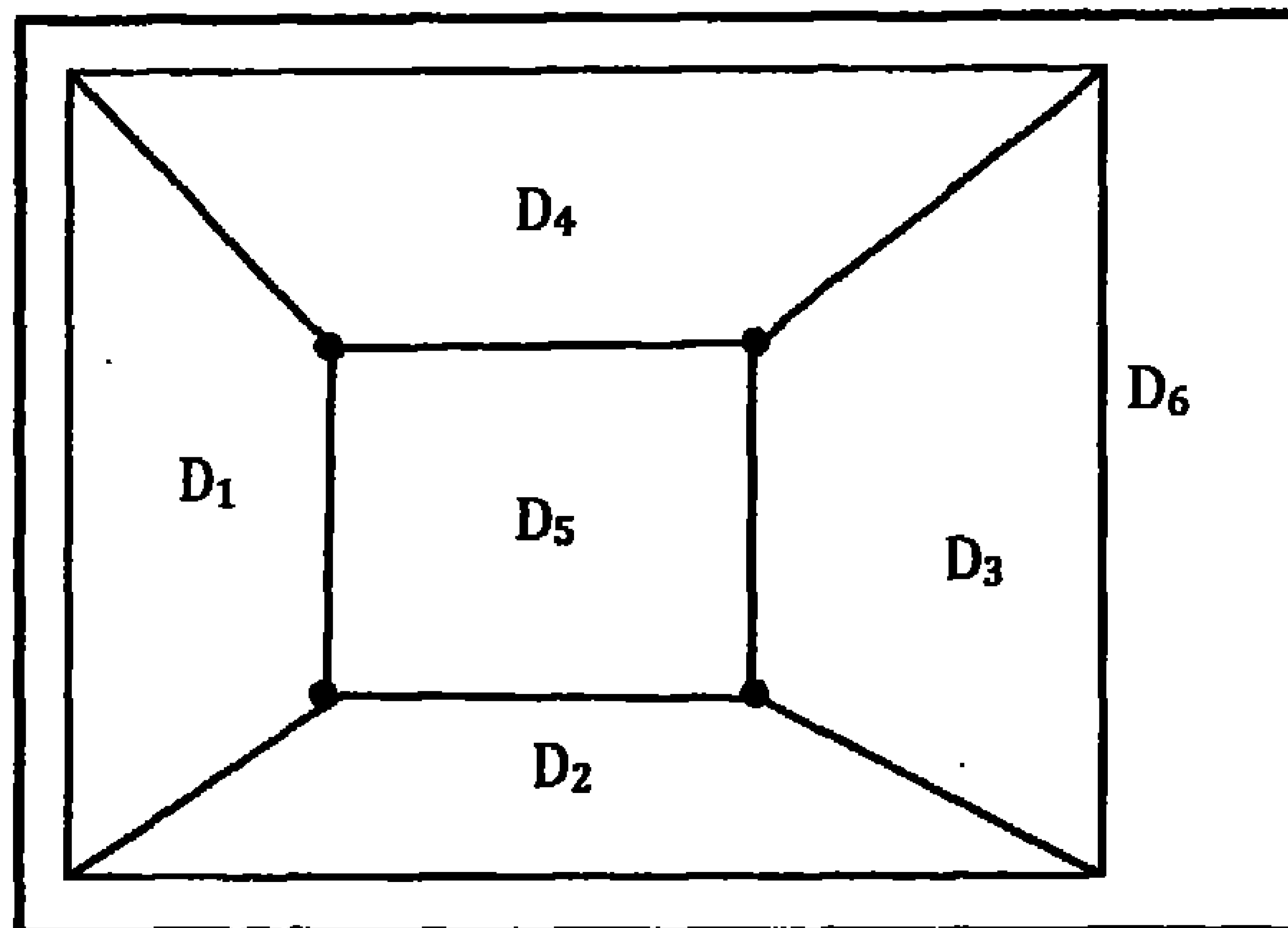
مثال (4): المخطط المستوى التالي ينقسم إلى 8 مناطق:



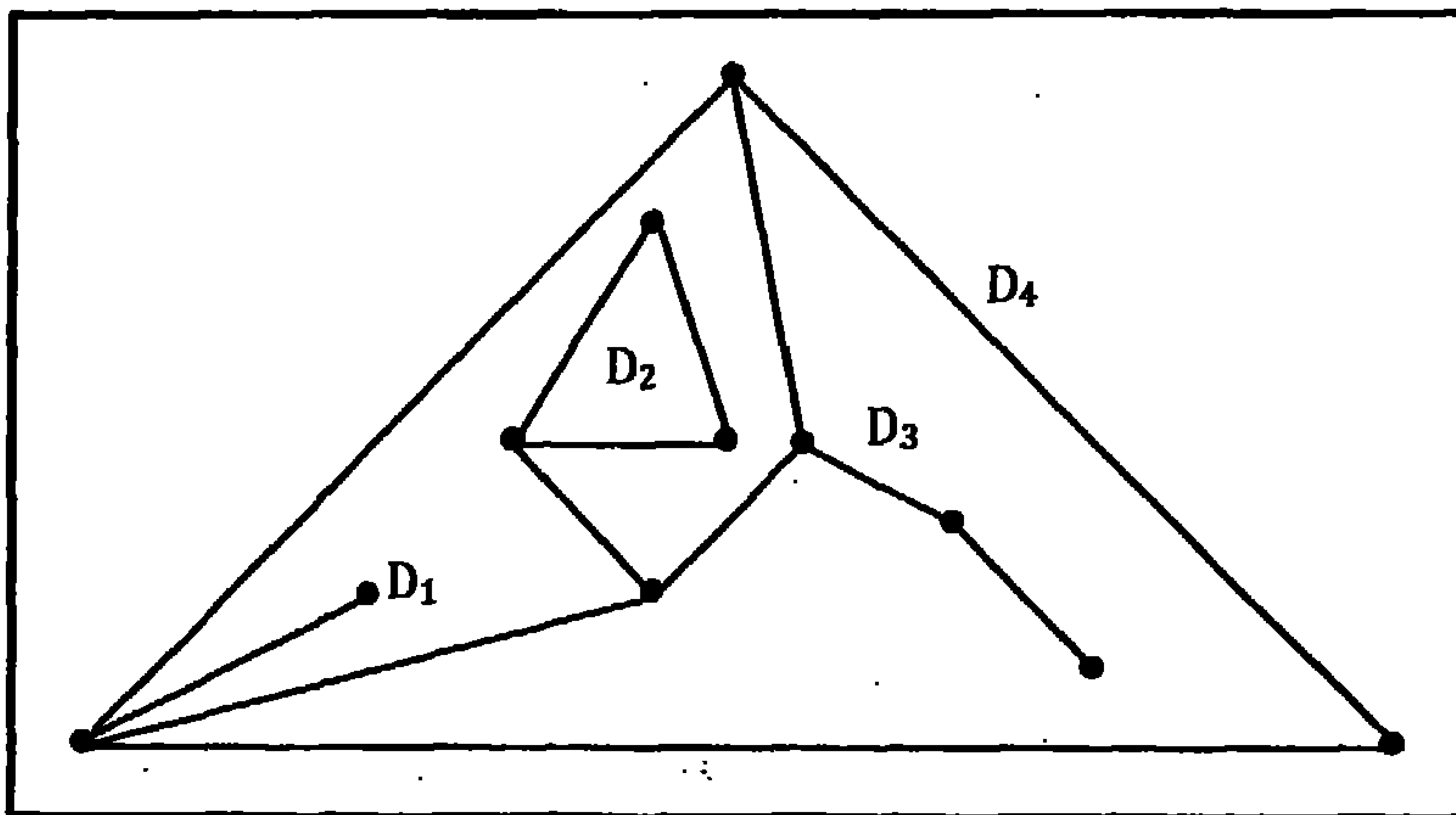
مثال (5): المخطط المستوى التالي ينقسم إلى 4 مناطق:



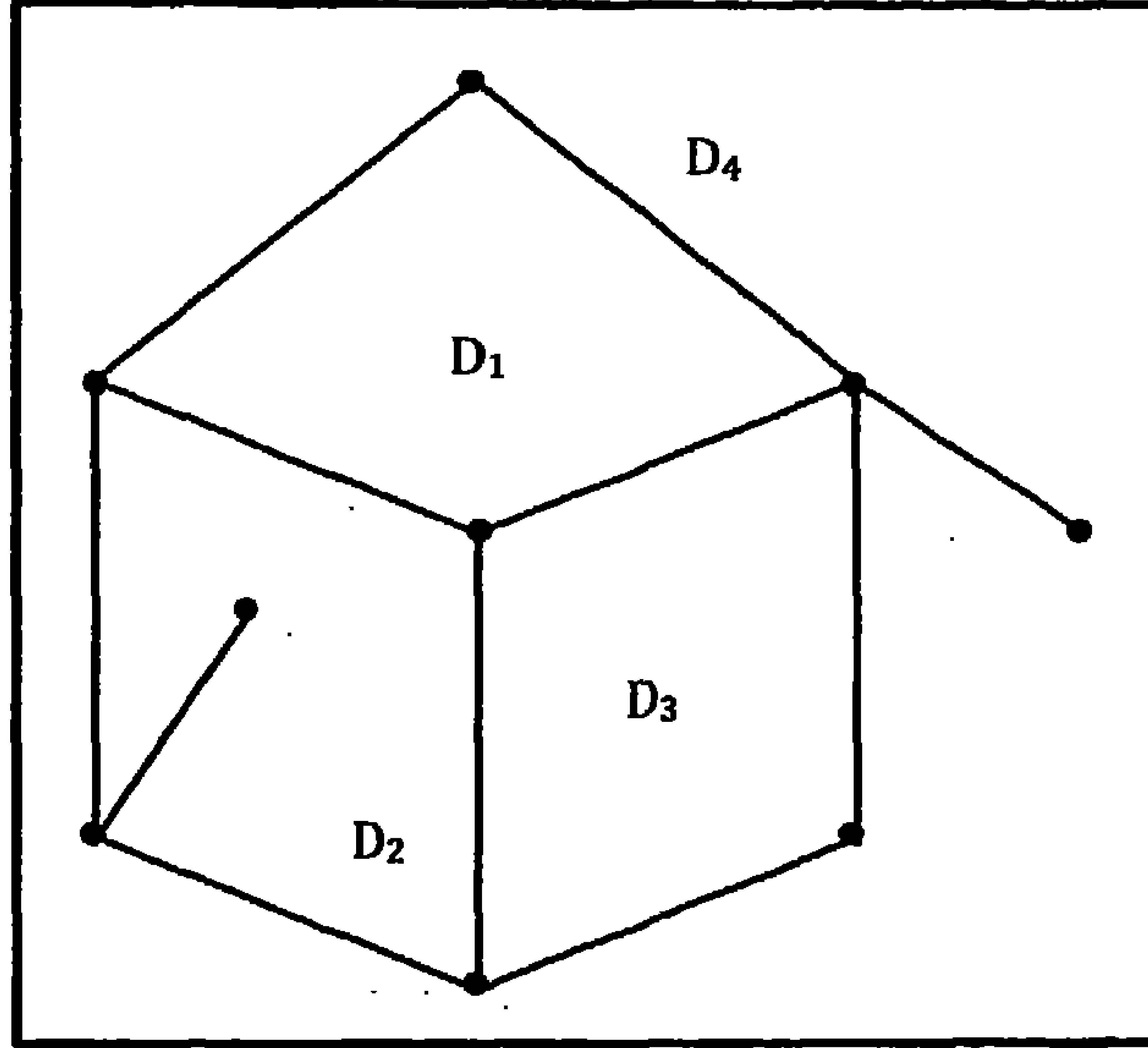
مثال (6): المخطط المستوى التالي ينقسم إلى 6 مناطق:



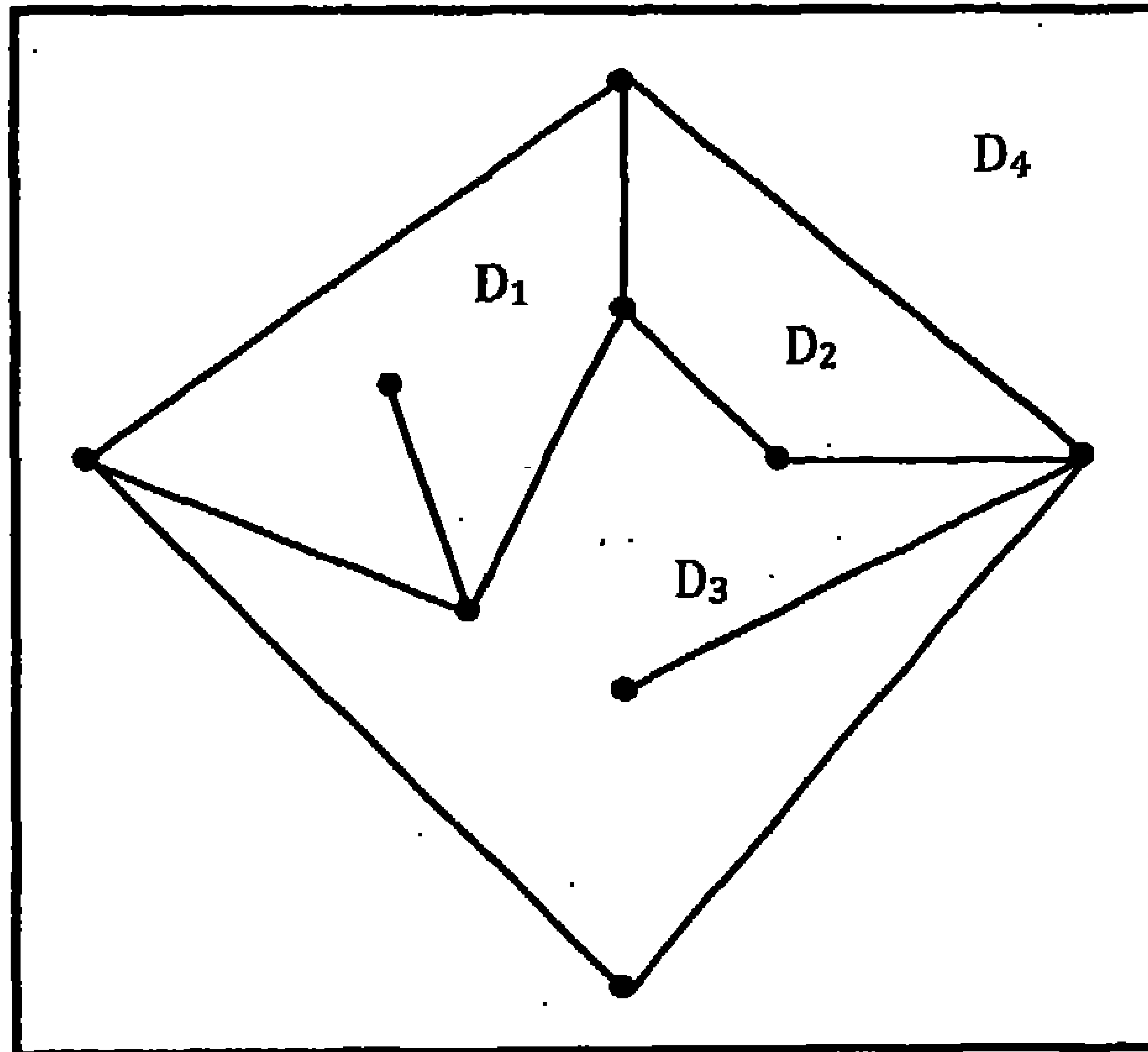
مثال (7): المخطط المستوى التالي ينقسم إلى 4 مناطق:



مثال (8): المخطط المستوى التالي ينقسم إلى 4 مناطق:



مثال (9): المخطط المستوى التالي ينقسم إلى 4 مناطق:



نظرية (8.8.1): (صيغة أويلر Euler's Formula)

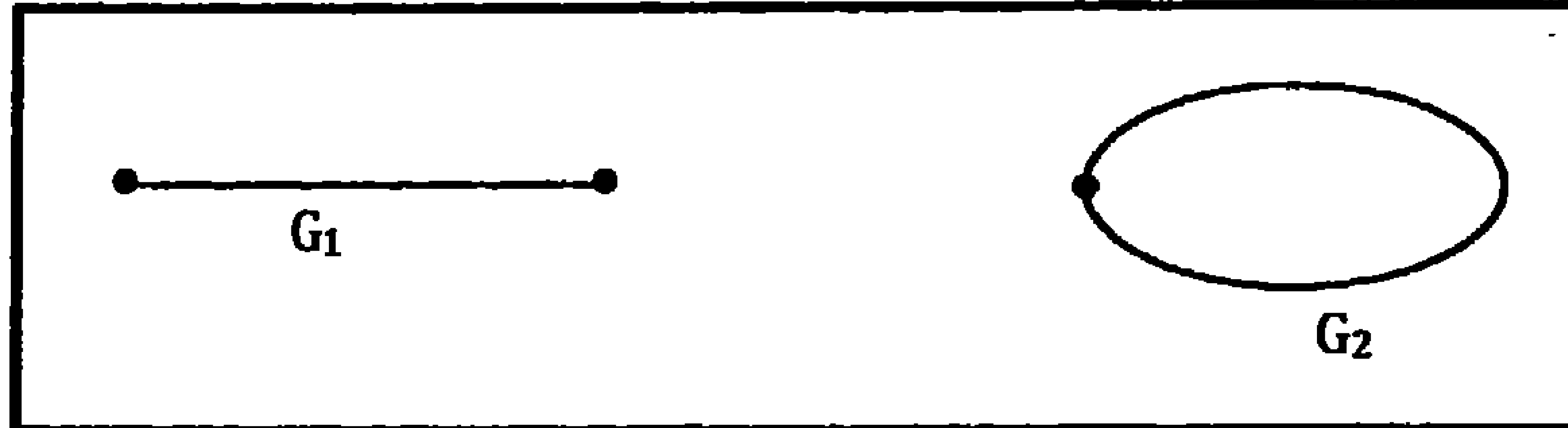
إذا كان G مخطط مستوي مترابط فإذا كانت |V| عدد رؤوس المخطط G و |E| هـي عدد أضلاع المخطط G و |D| هي عدد المناطق للمخطط G فإن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

البرهان:

بإستخدام الإستقراء الرياضي على عدد الأضلاع $|E|$:

الخطوة الأولى: إذا كانت $|E| = 1$ فإنه يكون لدينا أحد المخطط التالين:



المخطط الأول G_1 : فإن $|V| = 2, |E| = 1, |D| = 1$ وبالتالي:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

المخطط الثاني G_2 : فإن $|V| = 1, |E| = 1, |D| = 2$ وبالتالي:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

إذن صيغة أويلر صحيحة عندما $|E| = 1$

الخطوة الثانية: نفرض صحة صيغة أويلر عندما $|E| = p - 1$ ونحاول إثبات صيغة أويلر عندما $|E| = p$ ؟ وبالتالي يوجد لدينا حالتان:

- **الحالة الأولى:** إذا كان المخطط يحتوي على رأس معلقة فإننا نحذف هذه الرأس لنحصل على مخطط G_1 يحتوي على عدد من الرؤوس يساوي $|V_1| = |V| - 1$ ويحتوي على عدد أضلاع يساوي $|E_1| = |E| - 1 = p - 1$ وعدد مناطق يساوي $|D_1| = |D|$ وبما أن المخطط G_1 مستوى مترابط وعدد أضلاعة $|E_1| = p - 1$ فإننا نطبق صيغة أويلر لنحصل على:

$$|V_1| - |E_1| + |D_1| = 2$$

وبالتالي:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

- **الحالة الثانية:** إذا كان المخطط لا يحتوي على رأس معلقة وفي هذه الحالة فإننا نحذف ضلع من المخطط G لنحصل على مخطط G_1 مترابط يحتوي على عدد أضلاع يساوي $|E_1| = |E| - 1 = p - 1$ ويحتوي على عدد رؤوس يساوي $|V_1| = |V|$ وتكون عدد المناطق يساوي $|D_1| = |D| - 1$ و بما أن المخطط G_1

مستوى مترابط وعدد أضلاعه $|E_1| = p - 1$ فإننا نطبق صيغة أويلر لنحصل على:

$$|V_1| - |E_1| + |D_1| = 2$$

وبالتالي:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

وبالتالي من الحالة الأولى والثانية تكون صيغة أويلر صحيحة عندما $|E| = p$.

ملاحظات:

1. في مثال (1) ص 565 يكون لدينا :

$$|V| = 4, \qquad |E| = 6, \qquad |D| = 4$$

وبالتالي:

$$4 - 6 + 4 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

2. في مثال (2) ص 656 يكون لدينا :

$$|V| = 6, \qquad |E| = 7, \qquad |D| = 3$$

وبالتالي:

$$6 - 7 + 3 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

3. في مثال (3) ص 568 يكون لدينا :

$$|V| = 11, \qquad |E| = 13, \qquad |D| = 5$$

وبالتالي:

$$11 - 14 + 5 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

4. في مثال (4) ص 568 يكون لدينا :

$$|V| = 9, \qquad |E| = 15, \qquad |D| = 8$$

وبالتالي:

$$9 - 15 + 8 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

5. في مثال (5) ص 569 يكون لدينا :

$$|V| = 11, \qquad |E| = 13, \qquad |D| = 4$$

وبالتالي:

$$11 - 13 + 4 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

6. في مثال (6) ص 569 يكون لدينا :

$$|V| = 8, \qquad |E| = 12, \qquad |D| = 6$$

وبالتالي:

$$8 - 12 + 6 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

7. في مثال (7) ص 569 يكون لدينا :

$$|V| = 11, \qquad |E| = 13, \qquad |D| = 4$$

وبالتالي:

$$11 - 13 + 4 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

8. في مثال (8) ص 570 يكون لدينا :

$$|V| = 9, \qquad |E| = 11, \qquad |D| = 4$$

وبالتالي:

$$9 - 11 + 4 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

9. في مثال (9) ص 570 يكون لدينا :

$$|V| = 9, \qquad |E| = 11, \qquad |D| = 4$$

وبالتالي:

$$9 - 11 + 4 = 2$$

أي أن:

$$|V| - |E| + |D| = 2$$

نظرية (8.8.2): إذا كان G مخطط بسيط مستوي و $|E| \geq 2$ هي عدد أضلاع المخطط G و كانت $|V|$ عدد رؤوس المخطط G فإن:

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

البرهان:

بما ان المخطط G بسيط مستوي فإن كل منطقة من مناطق المخطط G تكون محدودة بثلاث أضلاع على الأقل وبالتالي يكون العدد الإجمالي e لكل الأضلاع التي إستعملت في تحديد كل مناطق المخطط تحقق المتباينة:

$$e \geq 3|D|$$

وبما أن كل ضلع من أضلاع المخطط G يكون قد دخل على الأكثر في تحديد منطقتين متجاورتين في المخطط G فإن:

$$2|E| \geq e \geq 3|D|$$

إذن:

$$\frac{2}{3}|E| \geq |D| \quad \text{.......(1)}$$

ولكن من صيغة أويلر يكون لدينا:

$$|V| - |E| + |D| = 2 \quad \text{.......(2)}$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$|V| - |E| + |D| = 2 \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E|$$

وبالتالي:

$$|V| - \frac{|E|}{3} \geq 2$$

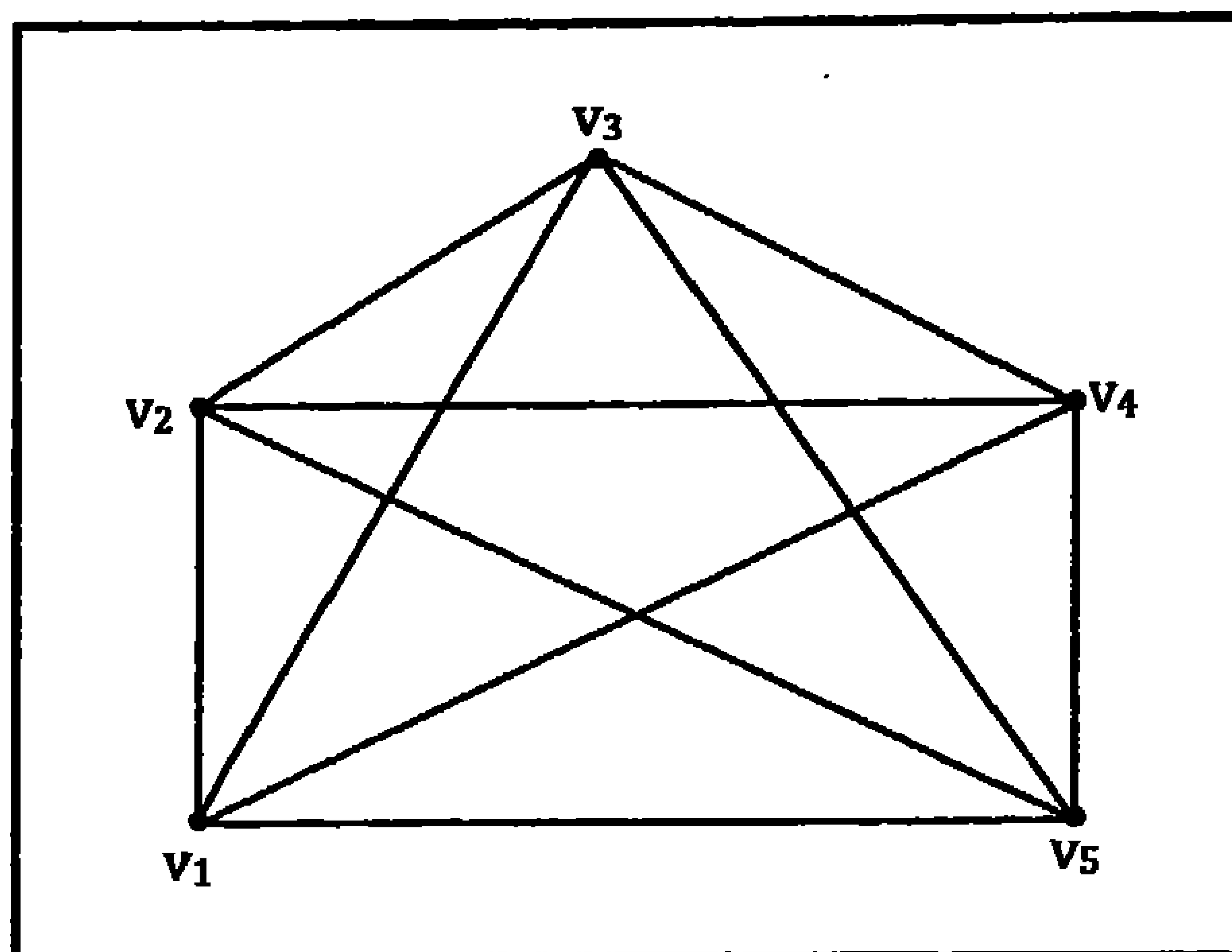
$$3|V| - |E| \geq 6$$

$$-|E| \geq 6 - 3|V|$$

إذن:

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

مثال: هل المخطط التالي مخطط مستوي:



الحل:

بما أن:

$|V| = 5, \qquad |E| = 10$

إذن المتباينة $|E| \leq 3|V| - 6$ تكون غير متحققة

وبالتالي المخطط غير مستوي.

نظرية (8.8.3): إذا كان G مخطط بسيط مستوي لا يحتوي على أي مثلثات وكانت $|E| \geq 3$ هي عدد أضلاع المخطط G و كانت $|V|$ عدد رؤوس المخطط G فإن:

$|E| \leq 2|V| - 4$

البرهان:

بما ان المخطط G بسيط مستوي لا يحتوي أي مثلثات فإن كل منطقة من مناطق المخطط G تكون محدودة بأربع أضلاع على الأقل وبالتالي يكون العدد الإجمالي e لكل الأضلاع التي إستعملت في تحديد كل مناطق المخطط تحقق المتباينة:

$e \geq 4|D|$

وبما أن كل ضلع من أضلاع المخطط G يكون قد دخل على الأكثر في تحديد منطقتين متجاورتين في المخطط G فإن:

$2|E| \geq e \geq 4|D|$

إذن:

$\frac{1}{2}|E| \geq |D|$ ....(1)

ولكن من صيغة أويلر يكون لدينا:

$|V| - |E| + |D| = 2$ .... (2)

من (1) و (2) نحصل على:

$$|V| - |E| + |D| = 2 \leq |V| - |E| + \frac{|E|}{2}$$

وبالتالي:

$$|V| - \frac{|E|}{2} \geq 2$$

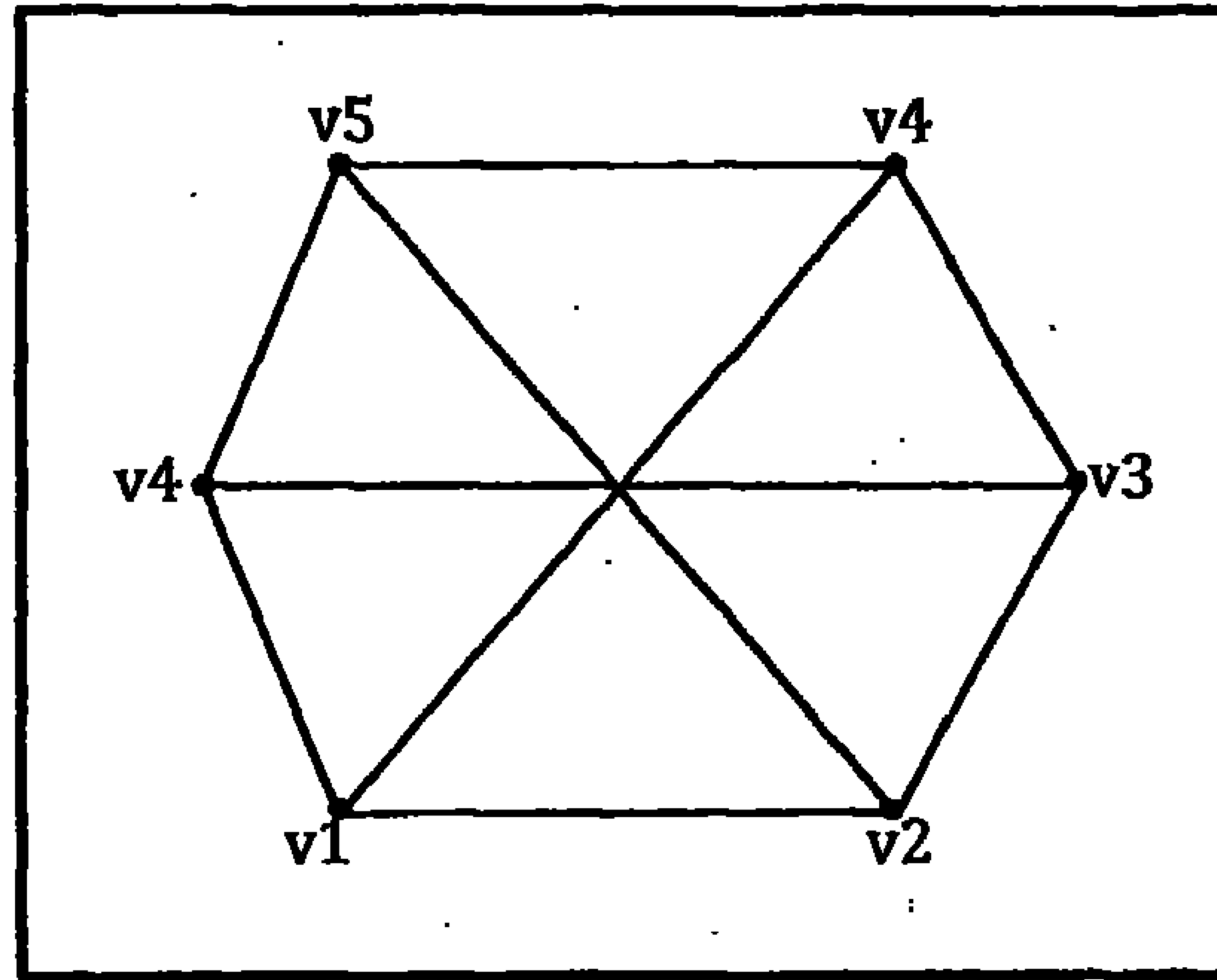
$$2|V| - |E| \geq 4$$

$$-|E| \geq 4 - 2|V|$$

إذن:

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

مثال: هل المخطط $K_{3,3}$ مخطط مستوي:



الحل:

بما أن:

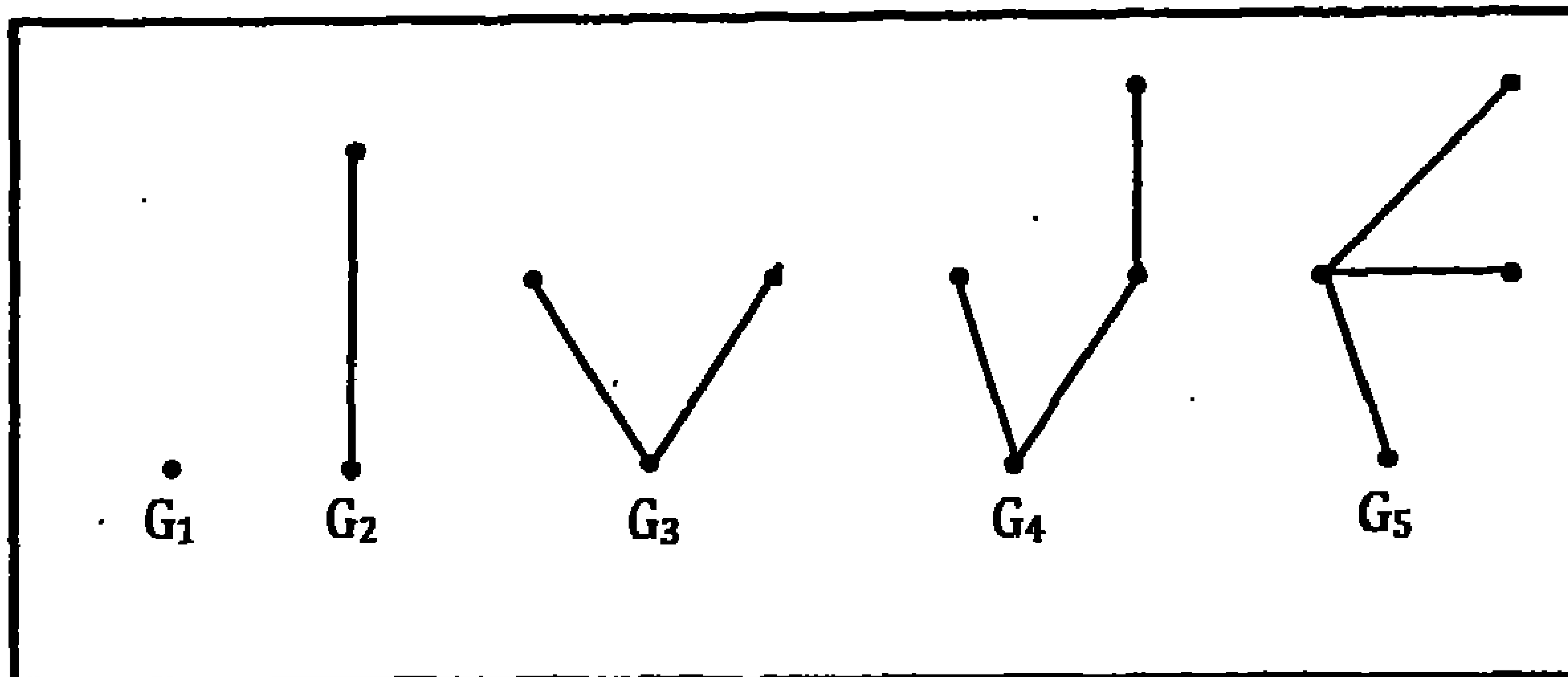
$|V| = 6, \quad |E| = 9$

وبما أن المخطط مترابط ولا يحتوي على أي مثلثات ولكن المتباينة $|E| \leq 2|V| - 4$ تكون غير متحققة وبالتالي المخطط غير مستوي.

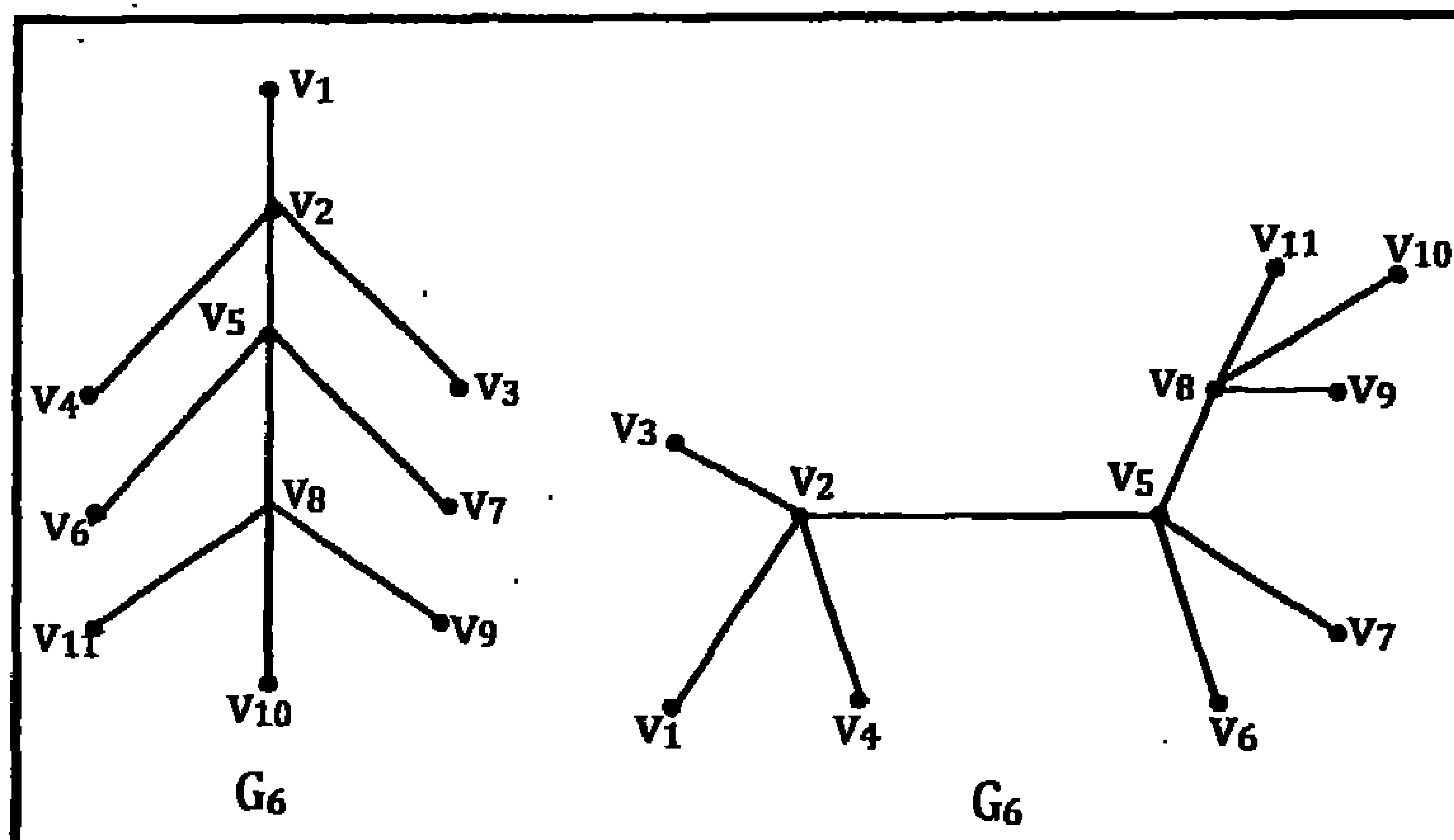
(8-9) الأشجار

الشجرة هي مخطط لا يحتوي أي دارات وبالتالي فإن الشجرة هي مخطط بسيط لا يحتوي على أي عقد أو أي أضلاع مكررة.

مثال: المخططات التالية كلاً منها يمثل شجرة:



مثال: المخططان التاليان يمثلان نفس الشجرة:



نظرية (8.9.1) : المخطط G يمثل شجرة إذا وفقط إذا وجد مسار بسيط وحيد بين اي رأسين من رؤوس المخطط G .

البرهان:

أولاً: نفرض أن المخطط G يمثل شجرة وبالتالي فإن المخطط G مترابط وبالتالي فإنه يوجد مسار بين كل رأسين من رؤوس المخطط G ولإثبات وحدانية المسار بين الرأسين نفرض جدلاً أنه يوجد مساران متوازيان بين الرأسين x, y إذن فإنهما معاً يكونان دارة

Circuit وهذا يناقض كون المخطط G شجرة إذن المسار بين أي رأسين في المخطط G يكون وحيد.

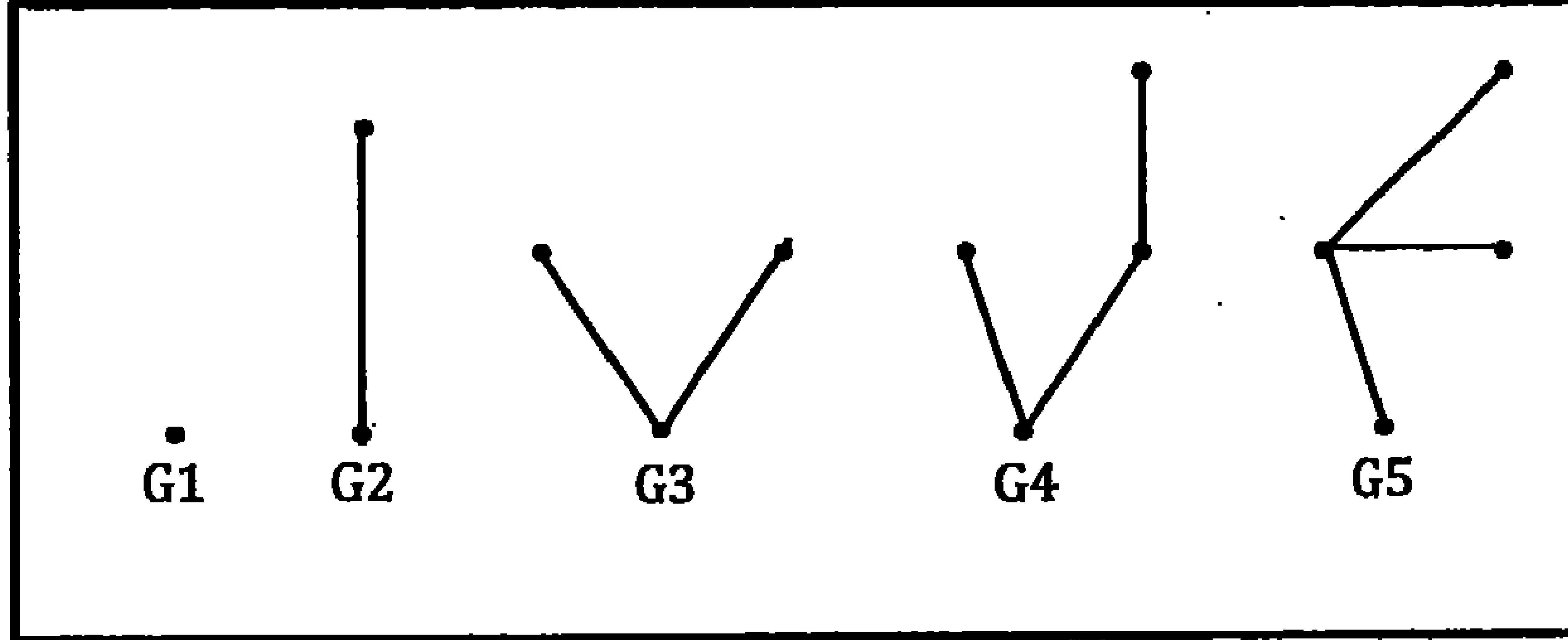
ثانيا: نفرض أنه يوجد مسار بسيط وحيد بين أي رأسين من رؤوس المخطط G إذن المخطط G مترابط ولإثبات إنه لا يملك أي دارات نفرض جدلا أن المخطط G يملك دارة بين الرأسين x, y وبالتالي يوجد مسارين بين الرأسين x, y الأول من x إلى y والثاني من y إلى x وهذا يعرض ما فرضناه من وحدانية المسار بين أي رأسين من رؤوس المخطط G وبالتالي فالمخطط G يكون مترابط ولا يحتوي على أي دارات وبالتالي فهو يمثل شجرة.

نظرية (8-9-2) : إذا كان المخطط $G=(V, E)$ يمثل شجرة وكانت $|V| = n$ فإن عدد أضلاع المخطط G يساوي $n-1$.

البرهان:

باستخدام الاستقراء الرياضي :

الخطوة الأولى: إذا كانت $n=1, 2, 3,4$ فإننا أمام الحالات الأتية:



ومن الواضح إن عدد الأضلاع فيها جميعا يساوي $n-1$.

الخطوة الثانية: نفرض صحة النظرية في حالة أن يكون عدد رؤوس المخطط G يساوي n بمعنى إن عدد أضلاع المخطط هو $n-1$ ولنحاول إثبات صحة النظرية عندما تكون عدد رؤوس المخطط هي $n+1$ ؟

لذا نفرض أن $G=(V, E)$ شجرة عدد رؤوسها يساوي $n+1$ و طالما إنها شجرة فإنها لا تحتوي على أي دارات وبالتالي فإنه توجد رأس معلقة $x \in V$ بحيث $deg(x)=1$ وبالتالي إذا حذفنا هذه الرأس لحصل على مخطط $G_1=(V_1, E_1)=G-x$ يمثل شجرة

وتكون عدد رؤوسها هو n وبالتالي فإن الشجرة G_1 يكون عدد أضلاعها يساوي n-1 وبالتالي $|E| = |E_1| + 1$ إذن الشجرة G تحتوي على n ضلع.

نظرية (8-9-3) : إذا كان المخطط G=(V, E) يمثل شجرة وكانت $|V| > 1$ فإنه يوجد على الأقل رأسين من الرؤوس درجات كلاً منها تساوي 1 (أي إنها رؤوس معلقة).

البرهان:

من نظرية (8-9-2) نجد أن المخطط G الذي يحتوي على n رأس يكون عدد أضلاعة n-1 ومن نظرية المصافحة (8–1–3) فإن:

$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E|$...(1)

إذن:

$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2(n-1) = 2n-2$ ....(2)

نفرض جدلاً أن المخطط G يحتوي على الأكثر على رأس واحد x تكون معلقة أي لها درجة deg(x)=1 وبالتالي:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V\setminus\{x\}} \deg(v) + \deg(x) \geq 2(n-2) + 1 = 2n-3$$

ولكن:

$2n-3 > 2n-2$ ....(3)

من (2) و (3) نحصل على:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) > 2n-2 = 2|E|$$

وهذا يناقض (1) إذن G يحتوي على الأقل على رأسين معلقتين.

نظرية (8.9.4): إذا كان المخطط G=(V, E) يمثل شجرة فإن G إما تحتوي على مركز أو مركزين فقط.

البرهان:

1. الخطوة الأولى: نفرض أن الرأس x تمثل بؤرة في الشجرة G وبالتالي فالرأس x تملك أصغر إختلاف مركزي بين رؤوس المخطط G وأيضا تكون أكبر مسافة بين x وبين الرأس v∈V تتحقق عندما تكون الرأس v هي رأس معلقة للشجرة وبحذف جميع

الرؤوس المعلقة v والتي لها أكبر إختلاف مركزي في المخطط G لنحصل على مخطط G_1 يمثل شجرة.

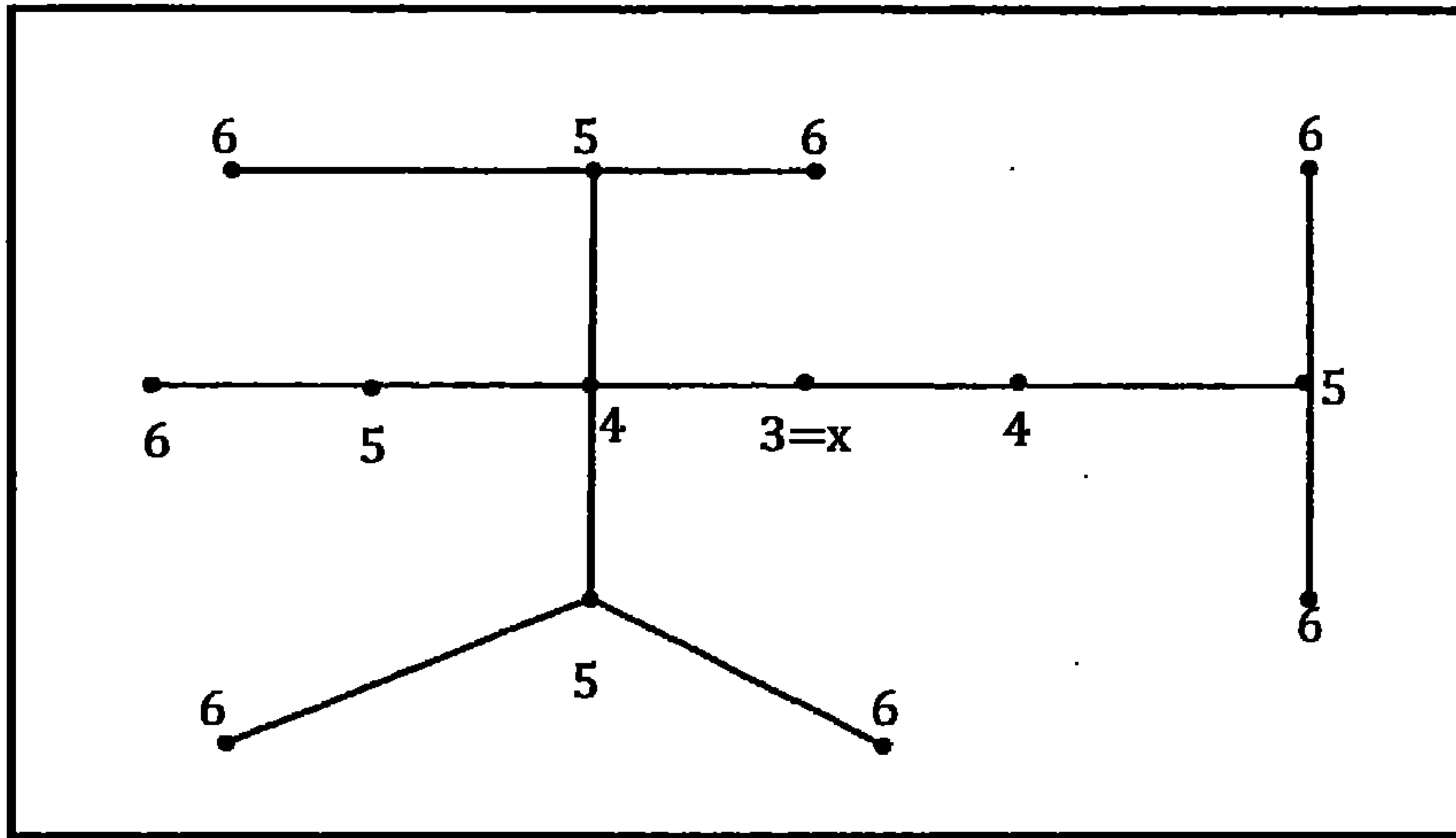
2. الخطوة الثانية: G_1 هي شجرة تكون فيها أيضاً الرأس x تمثل مركز وبحذف جميع الرؤوس المعلقة v والتي لها أكبر إختلاف مركزي من المخطط G_1 لنحصل على مخطط G_2 يمثل شجرة.

ونستمر بهذا الإسلوب إلى أن نصل في النهاية إلى أحد الحالتين:

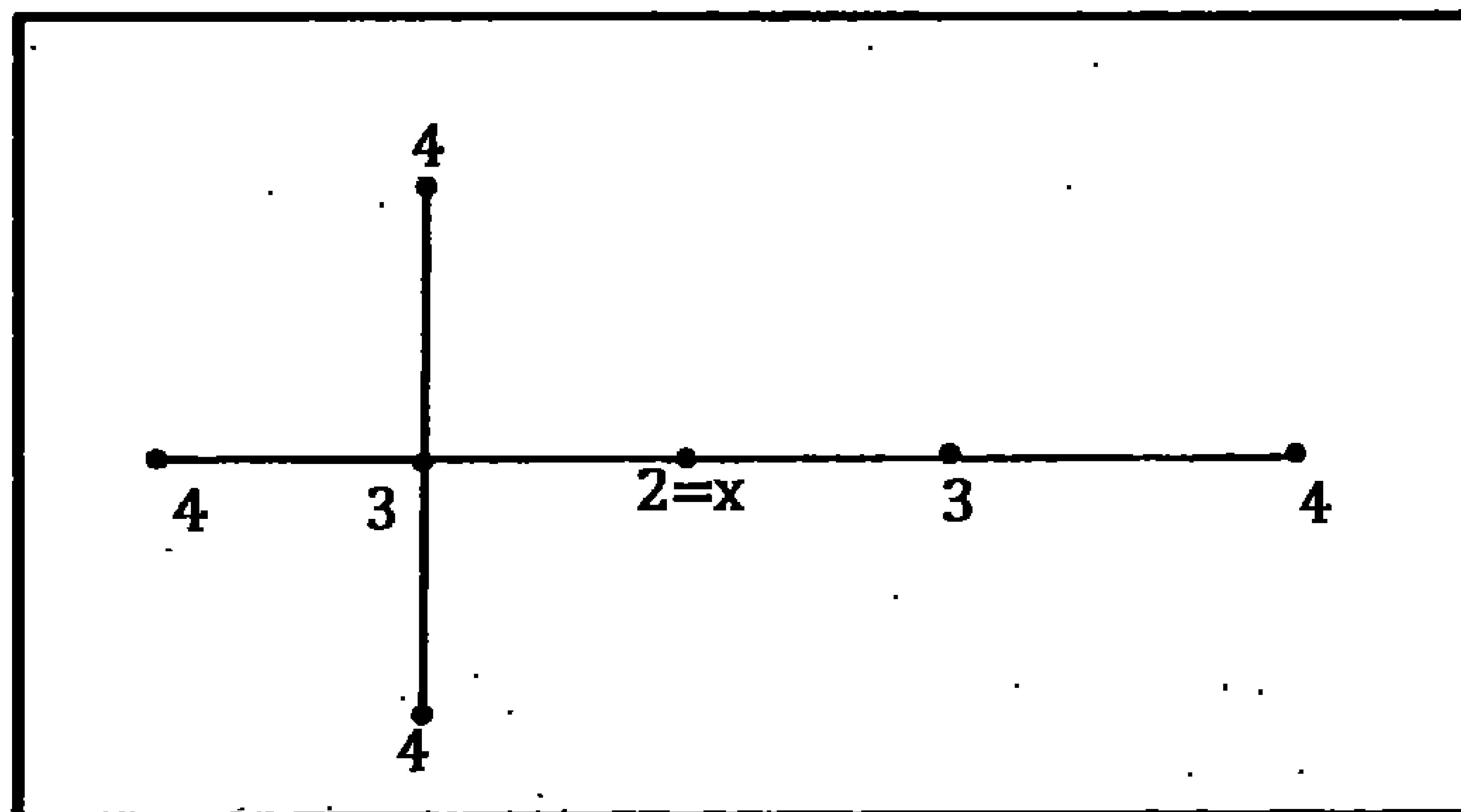
الحالة الأولى: يتبقى لنا في الأخير نقطة واحدة x تمثل مركز الشجرة G .

الحالة الثانية: يتبقى لنا في الأخير ضلع واحد تكون نقاط نهاياته هما مركزين للشجرة G .

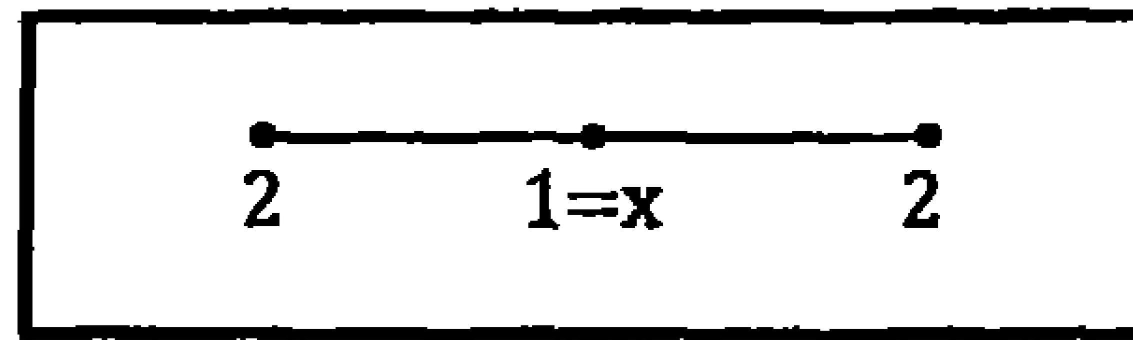
مثال: في المخطط التالي يمثل شجرة وبجانب كلاً من رؤوسه الإختلاف المركزي:



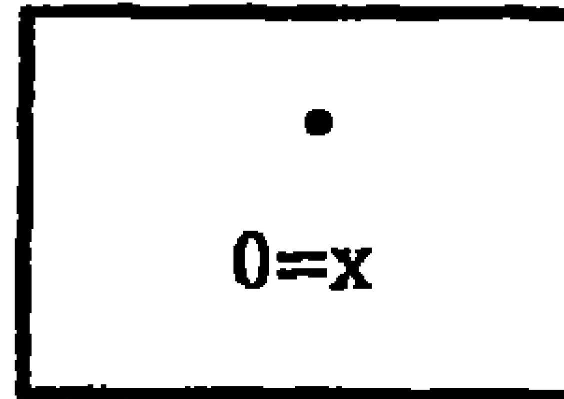
الخطوة الأولى: نحذف الرؤوس التي لها الإختلاف المركزي يساوي 6 فنحصل على:



الخطوة الثانية: نحذف الرؤوس التي من الدرجة 4 لنحصل على الشجرة:

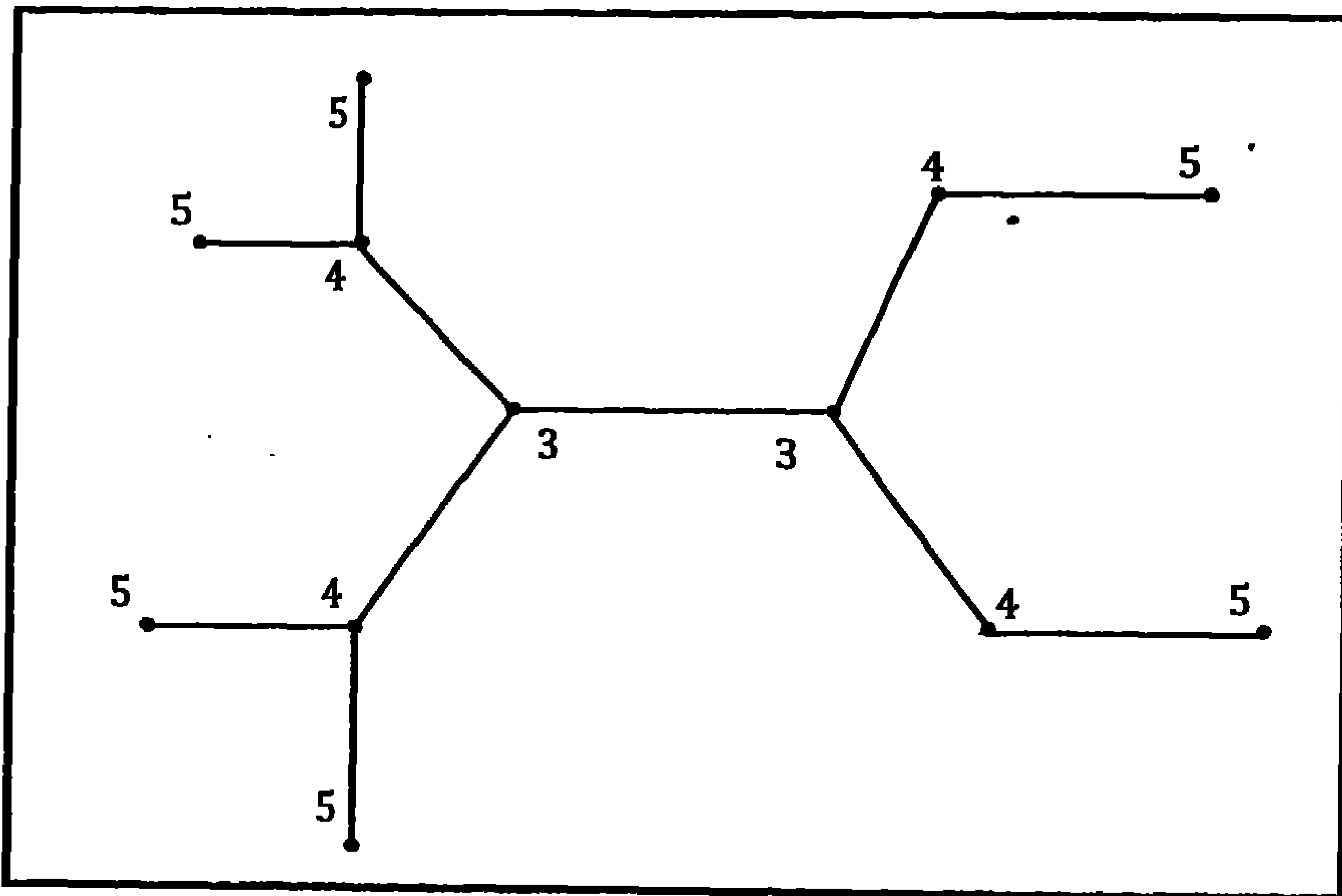


الخطوة الثالثة: نحذف الرؤوس التي من الدرجة 2 لنحصل على الشجرة:

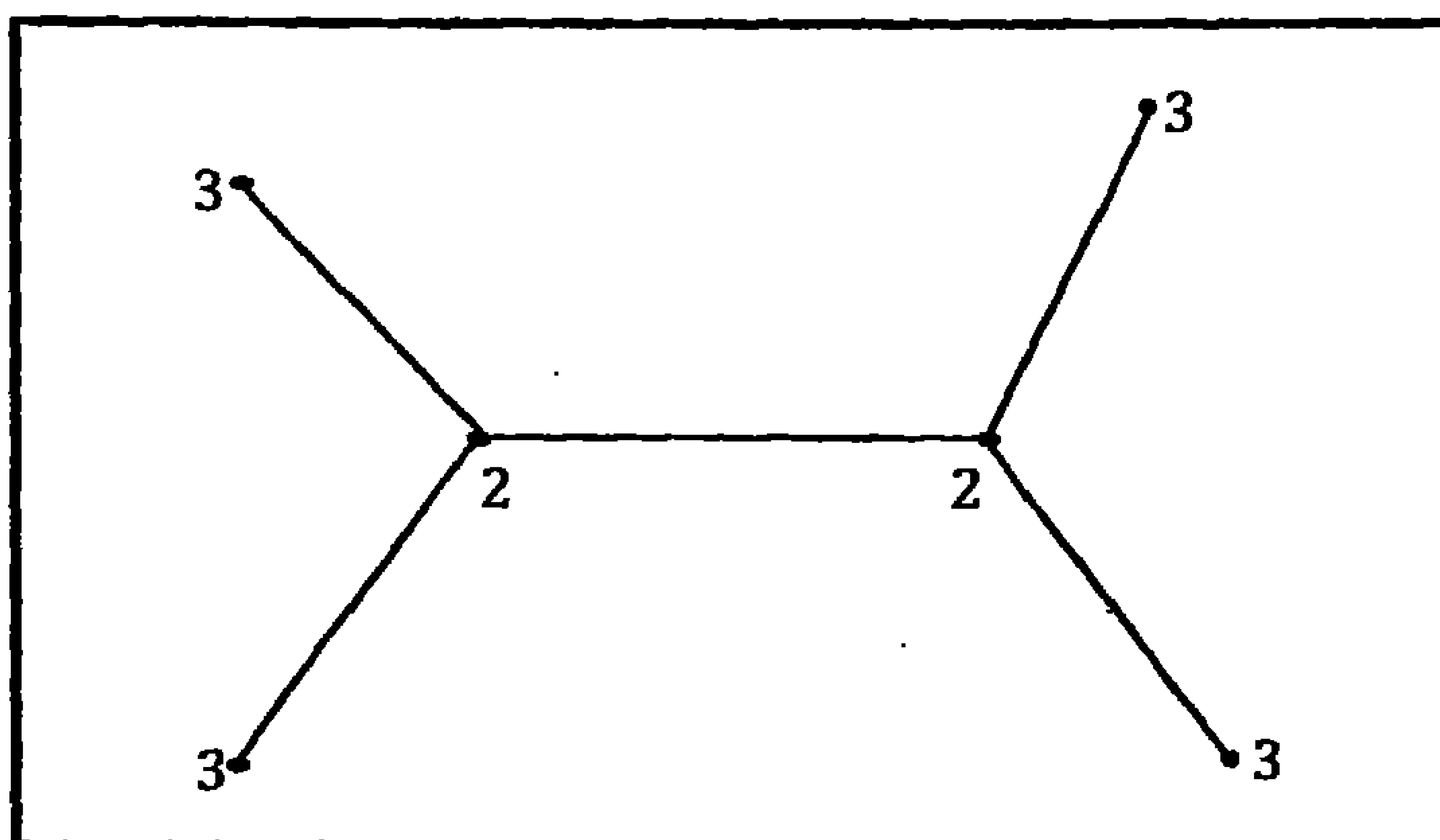


وبالتالي الشجرة لها مركز واحد فقط.

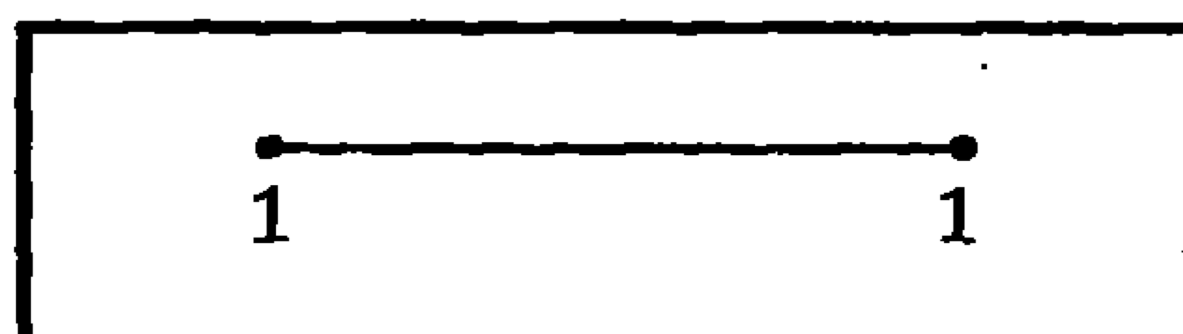
مثال: في المخطط التالي يمثل شجرة وبجانب كلاً من رؤوسه الإختلاف المركزي:



الخطوة الأولى: نحذف الرؤوس التي لها الإختلاف المركزي يساوي 5 فنحصل على:



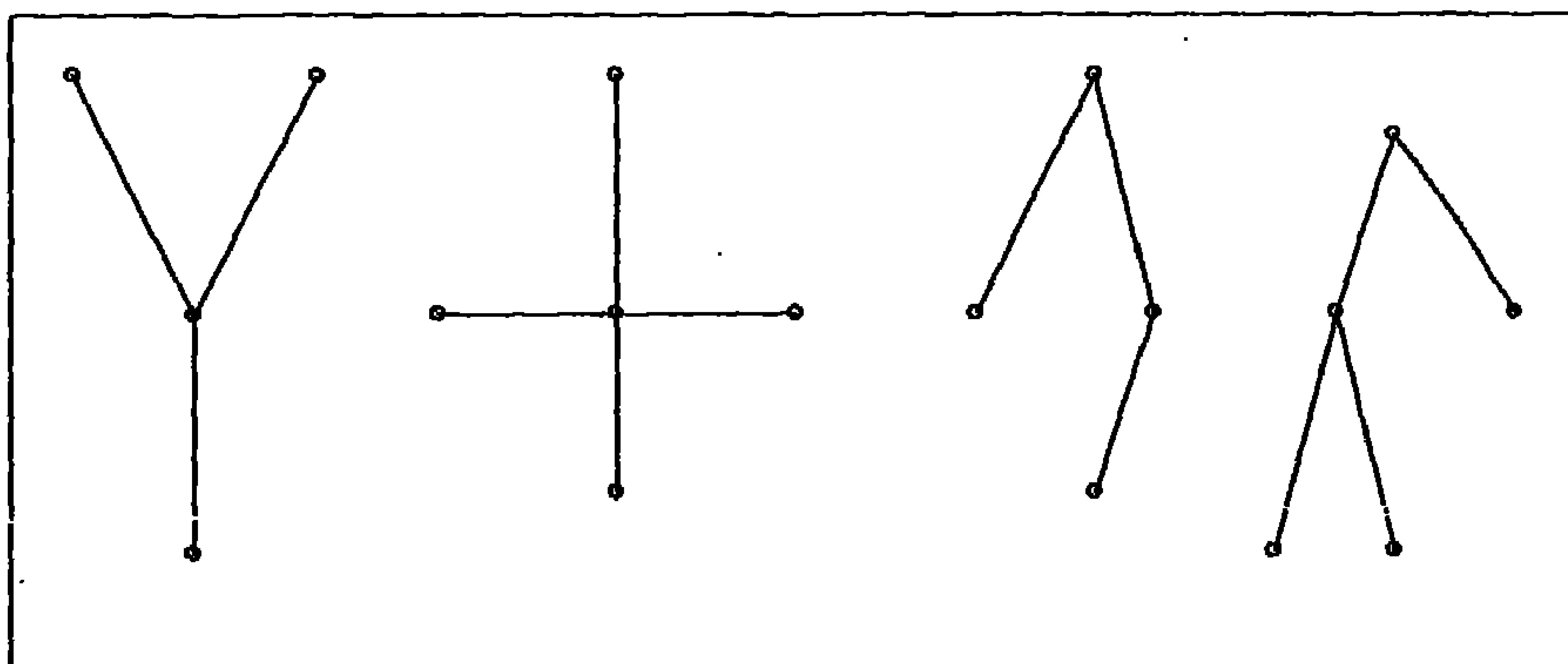
الخطوة الثانية: نحذف الرؤوس التي لها الإختلاف المركزي يساوي 3 فنحصل على:



وبالتالي فالشجرة تملك مركزين.

تعريف (8.9.5): إذا كان المخطط G مخطط غير مترابط ويحتوي على عدة مكونات كلا منها يمثل شجرة فإن G تسمى غابة Forest .

مثال: المخطط التالي يمثل غابة ولها أربع مركبات:



نظرية (8.9.6): إذا كانت G غابة عدد رؤوسها n وعدد مركباتها k فإن عدد أضلاع G هو n-k .

البرهان:

إذا كانت عدد رؤوس المركبة i هو n_i فإن بإستخدام نظرية (8.9.2) يكون عدد أضلاع المركبة i هو n_i-1 وبالتالي تكون عدد أضلاع المخطط G هي مجموع أضلاع مكونات المخطط وتساوي:

$$= \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k$$

(8-10) الأشجار ذات الجذور Rooted Trees

لتكن $T=(V, E)$ شجرة والنقطة r هي أحد رؤوس المخطط نسميها جذر root وبالتالي المخطط T يسمى شجرة ذات جذر وبالتالي:

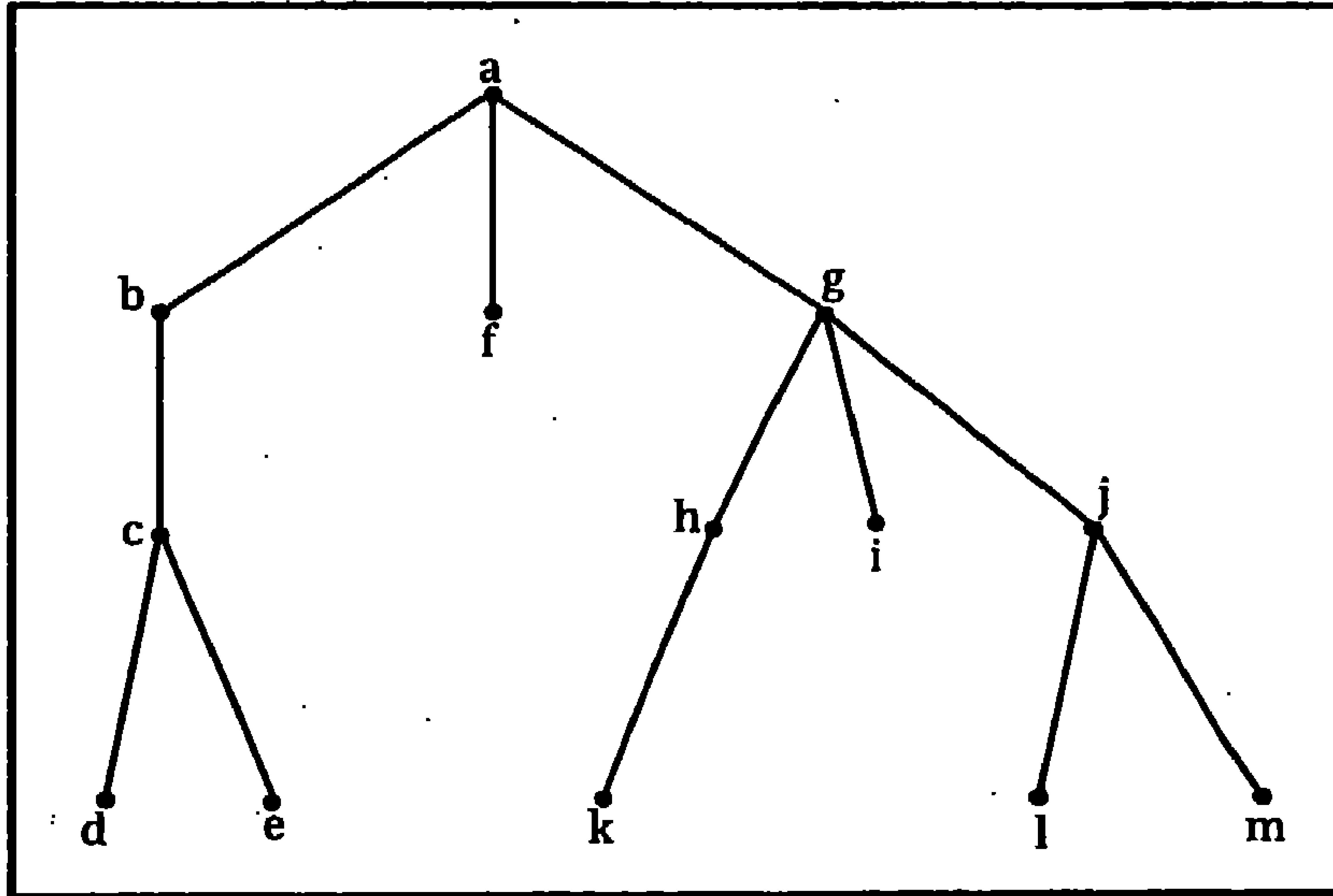
1. هذا المخطط يعتبر مخطط متجهة Directed graph من أعلى إلى أسفل والجذر r يمثل نقطة بداية المخطط ويرسم في أعلى المخطط وجميع الرؤوس الأخرى تكون أسفل منه.
2. إذا كانت النقطة x هي أحد رؤوس الشجرة بحيث أن x لا تمثل جذر للشجرة وكانت درجة x تساوي 1 أي أن deg(x)=1 فإن النقطة x تسمى ورقة Leave أو نقطة طرفية Terminal point أما جميع الرؤوس التي لا تمثل جذر ولا أوراق فإنها تسمى نقطة داخلية internal point و يمكن الوصول من نقطة داخلية إلى نقطة داخلية أخرى عن طريق مسار واحد فقط.
3. إذا كانت النقطة x هي أحد رؤوس الشجرة بحيث أن x لا تمثل جذر للشجرة فإننا نعرف مستوى الرأس x بأنه طول المسار الوحيد الذي يربط x مع r ونعرف مستوى الجذر r بأنه يساوي 0 ونعرف إرتفاع الشجرة T على إنه العدد الأكبر بين جميع مستويات رؤوس الشجرة T .
4. إذا كانت الرأس x لها المستوى i والرأس y لها المستوى j وكانت i<j وكان يوجد مسار من x إلى y فإننا نسمي الرأس y تابع successor vertex للرأس x ونسمي x رأس سابق predecessor vertex للرأس y وإذا كانت i+1=j فإننا نسمي الرأس y تابع مباشر للرأس x ونسمي x رأس سابق مباشر للرأس y وبالتالي فالجذر r من الممكن أن

يكون له رأس تابع ولكن غير ممكن أن يكون له رأس سابق بينما الورقة x يكون لها رأس سابق وغير ممكن أن يكون لها رأس تابع وباقي الرؤوس غير الجذر والأوراق أي الرؤوس الداخلية internal vertices تملك رأس سابق ورأس تابع .

5. إذا إذا كانت النقطة v هي أحد رؤوس الشجرة بحيث أن v لا تمثل جذر للشجرة فإننا نعرف أب (والد) v (the parent of v) هي الرأس الوحيدة u بحيث يوجد مسار مباشر من u إلى v وفي هذه الحالة نسمي الرأس v أبن (a child of u) ل u . والرؤوس التي يكون لها نفس الأب تسمى أخوة siblings . بينما أسلاف ancestors الرأس x هي جميع الرؤوس غير نقطة الجذر r والتي تكون موجودة في المسار من الرأس x إلى الجذر r أي إنها جميع الرؤوس بإستثناء الجذر r والتي تمثل والد x والرؤوس التي تمثل والد الوالد ل x وهكذا ... ونعرف أحفاد descendants الرأس x بأنها جميع الرؤوس التي تكون الرأس x لها تمثل سلف.

6. إذا كانت النقطة x هي أحد رؤوس الشجرة بحيث أن x لا تمثل جذر للشجرة T فإننا نكون الشجرة الجزئية subtree التي يكون لها الجذر x وجميع الرؤوس التي تكون أحفاد للرأس x والأضلاع الواقعة على هذه الرؤوس.

مثال: في الشجرة ذات الجذر التالية:



إحسب:

1. جذر الشجرة.
2. أوراق الشجرة.
3. الرؤوس الداخلية للشجرة.
4. مستوى الرأس a.
5. مستوى الرؤوس {b, f, g} .
6. مستوى الرؤوس {c, h, i, j}.
7. مستوى الرؤوس {d, e, k, l, m}.
8. إرتفاع الشجرة.
9. رأس تابع مباشر للرأس b .
10. رأس سابق مباشر للرأس c .
11. إبن للرأس b .
12. أب للرأس c .
13. أبناء الرأس g.
14. أحفاد الرأس b.
15. أسلاف الرأس e.
16. الشجرة الجزئية التي لها الجذر g .

الحل:

1. الرأس a هي جذر الشجرة.
2. الرؤوس d, e, f, k, l, m تمثل أوراق الشجرة.
3. الرؤس b, c, g, h, j تمثل رؤوس داخلية للشجرة.
4. مستوى الرأس a يساوي 0 .
5. مستوى الرؤوس {b, f, g} يساوي 1 .
6. مستوى الرؤوس {c, h, i, j} يساوي 2.

7. مستوى الرؤوس {d, e, k, l, m} يساوي 3.

8. إرتفاع الشجرة يساوي 3.

9 و10. الرأس c هو رأس تابع مباشر للرأس b والرأس b هو رأس سابق مباشر للرأس c.

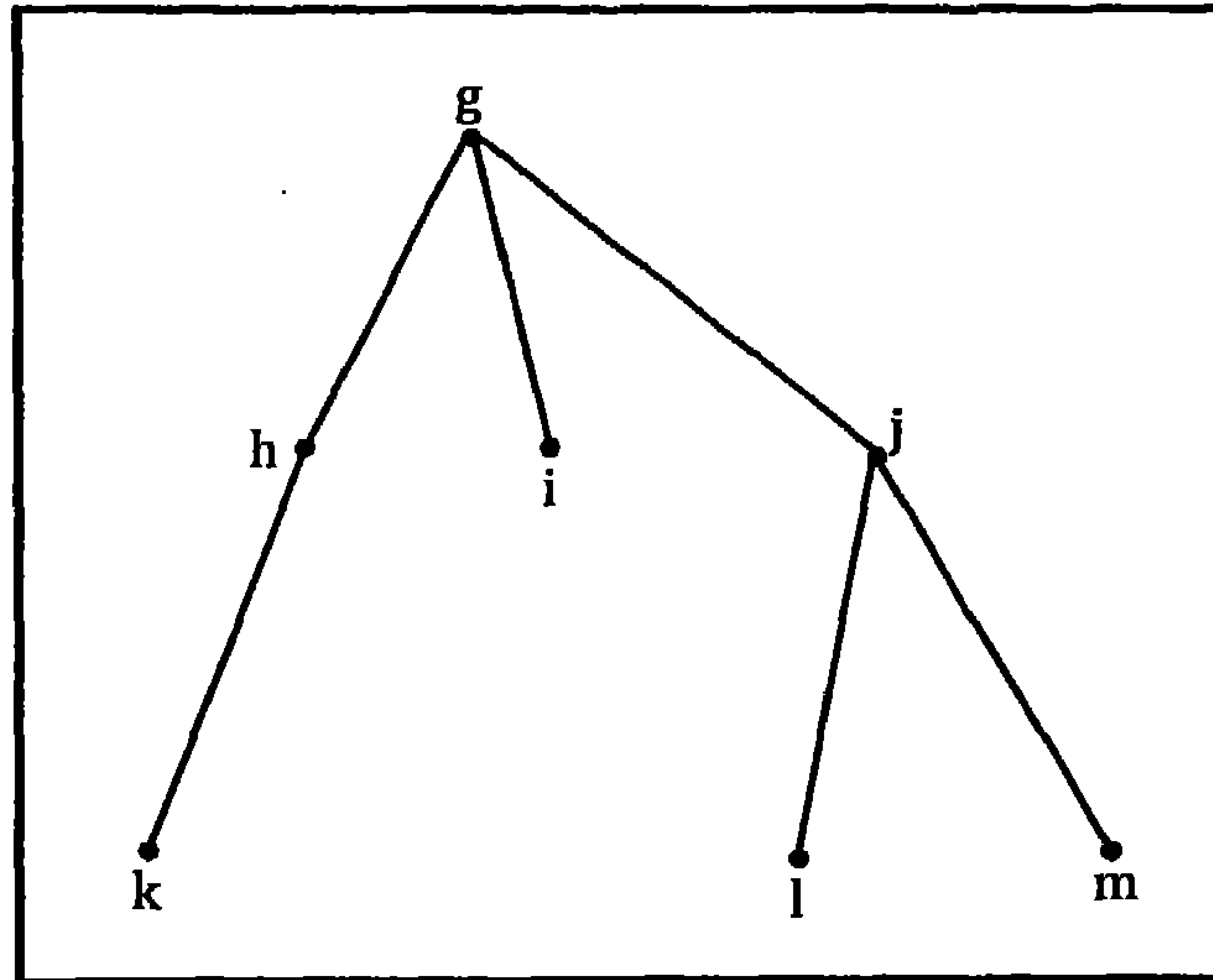
11و12. الرأس c هو إبن للرأس b والرأس b هو أب للرأس c .

13. أبناء الرأس g هي الرؤوس h, i, j .

14. أحفاد الرأس b هي الرؤوس c, d, e .

15. أسلاف الرأس e هي الرؤوس c, b .

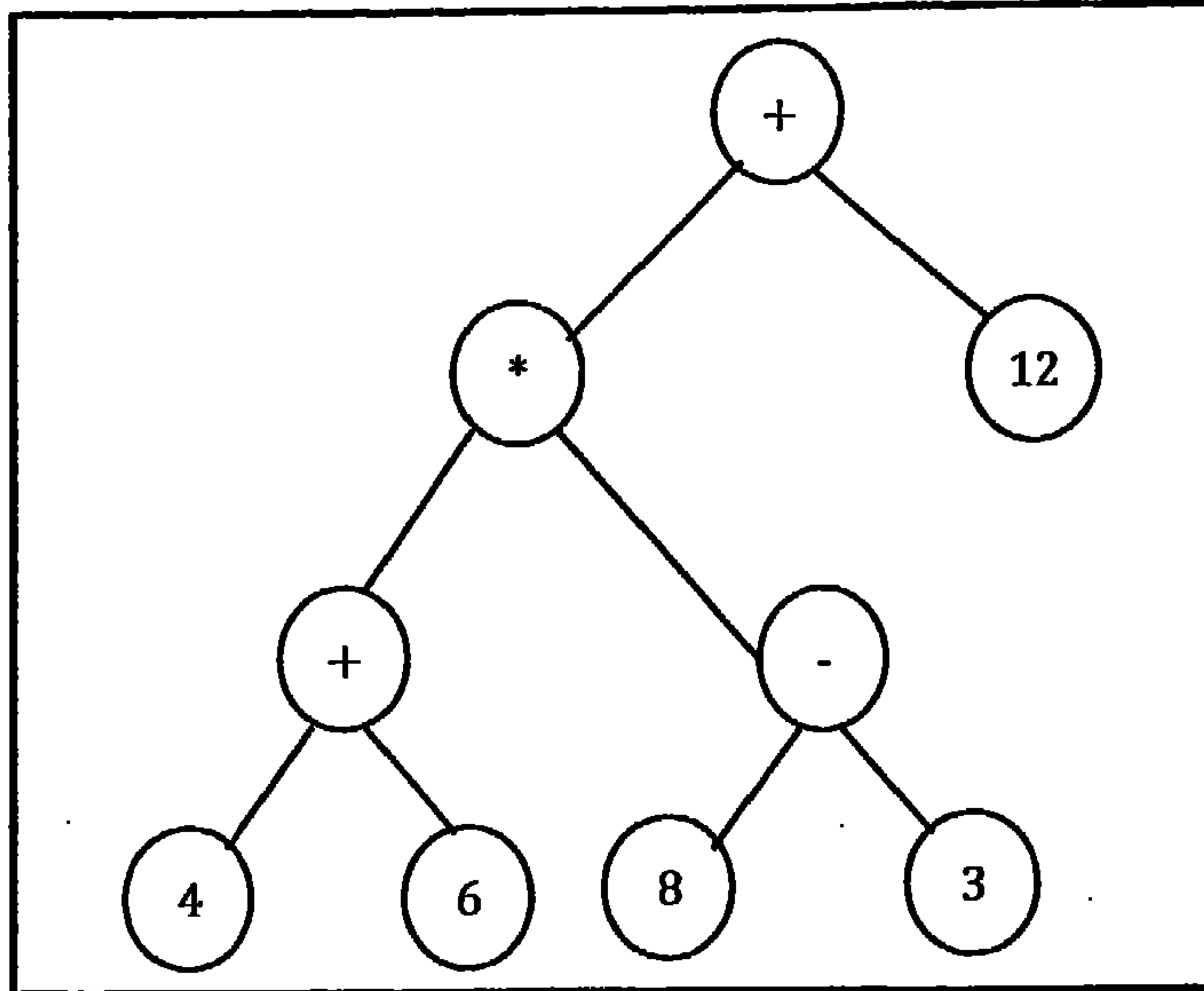
16. الشجرة الجزئية التي لها الجذر g هي الشجرة التالية:



مثال: عبر عن التعبير الرياضي التالي بإستخدام مخطط الشجرة ذات الجذر:

$(4 + 6) * (8 - 3) + 12$

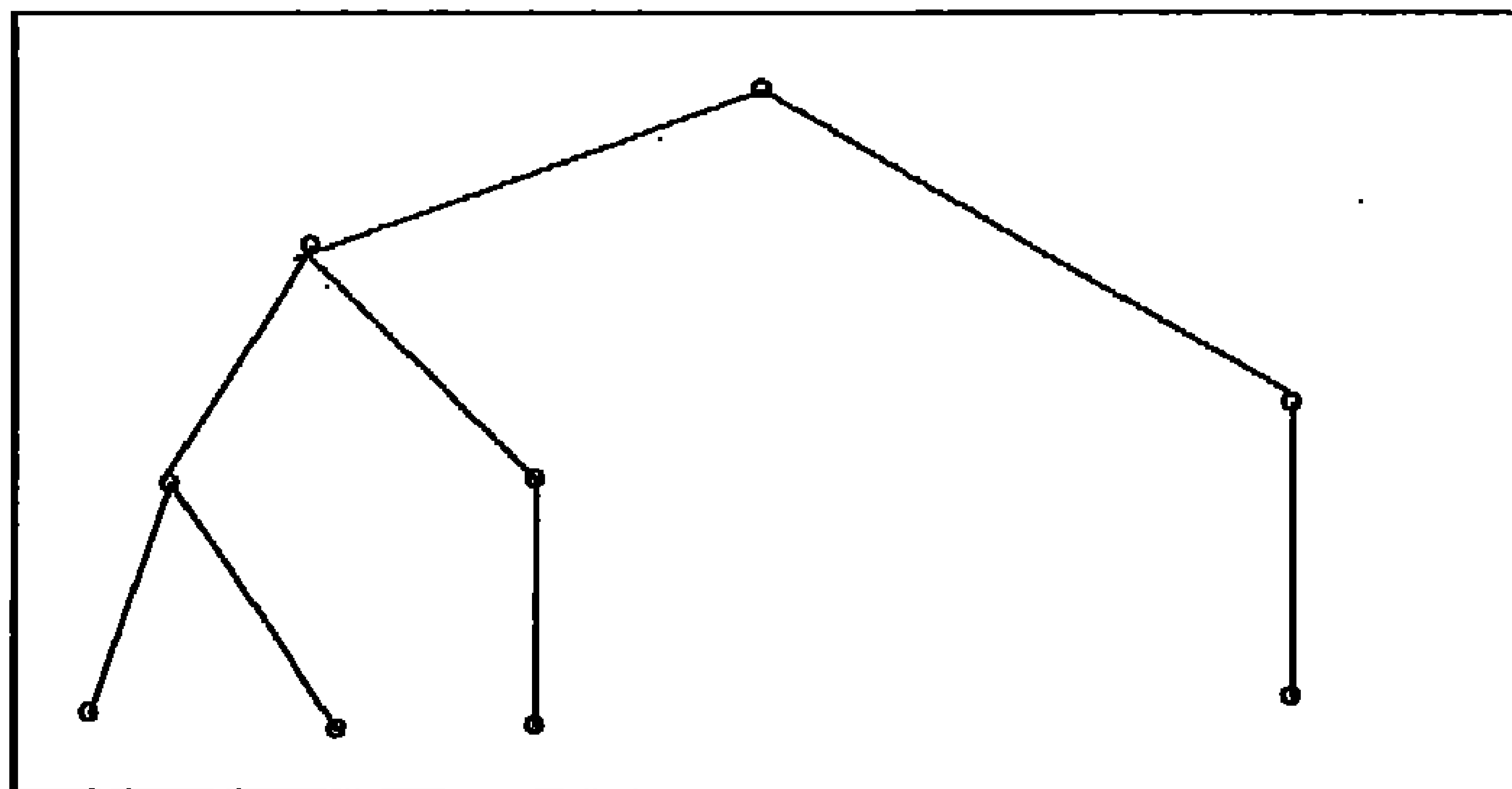
الحل:



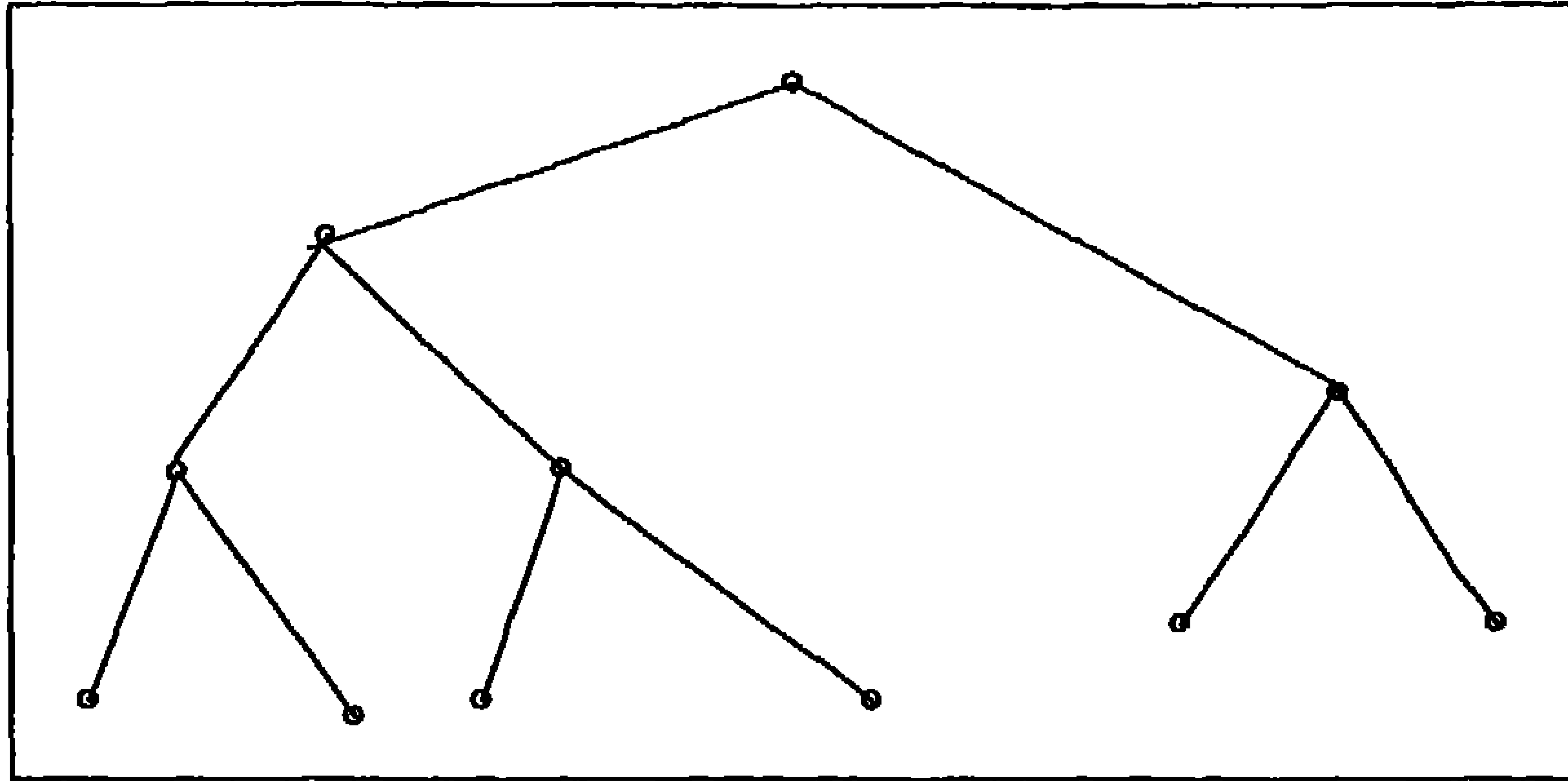
تعريف (8.10.1):

- الشجرة الثنائية Binary tree هي شجرة ذات جذر بحيث كل رأس فيها يخرج منه على الأكثر طفلان (أي أن عدد الرؤوس التابعة المباشرة كل رأس من رؤوس الشجرة يكون أقل أو يساوي 2).
- الشجرة الثنائية المنتظمة Full Binary tree هي شجرة ثنائية بحيث يكون فيها كل رأس داخلي للشجرة تخرج منه بالضبط طفلان أحداهما طفل أيسر والأخر طفل أيمن (أي أن عدد الرؤوس التابعة المباشرة كل رأس داخلي من رؤوس الشجرة يكون بالضبط يساوي 2).

مثال: المخطط التالي يمثل شجرة ثنائية:



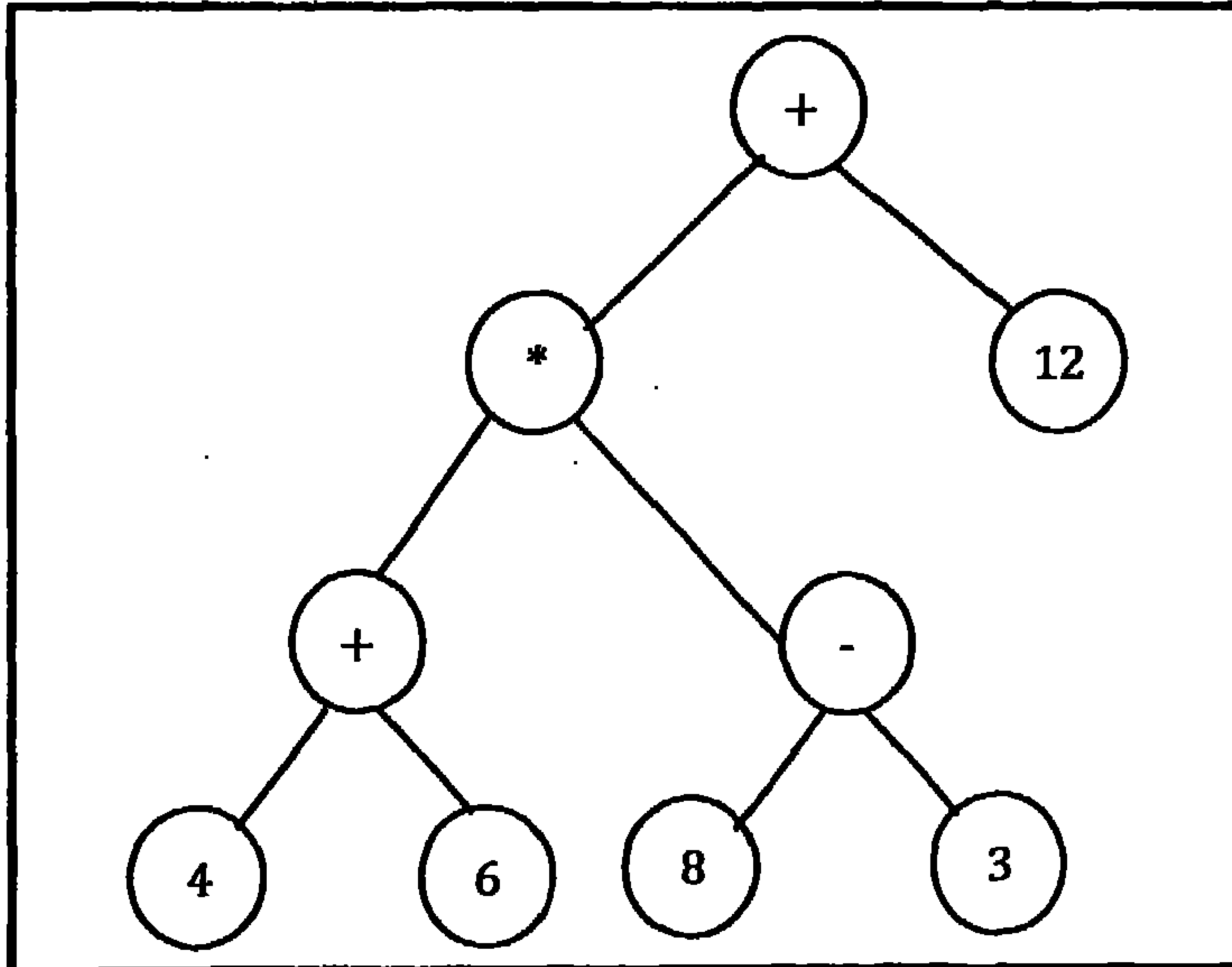
مثال: المخطط التالي يمثل شجرة ثنائية منتظمة:



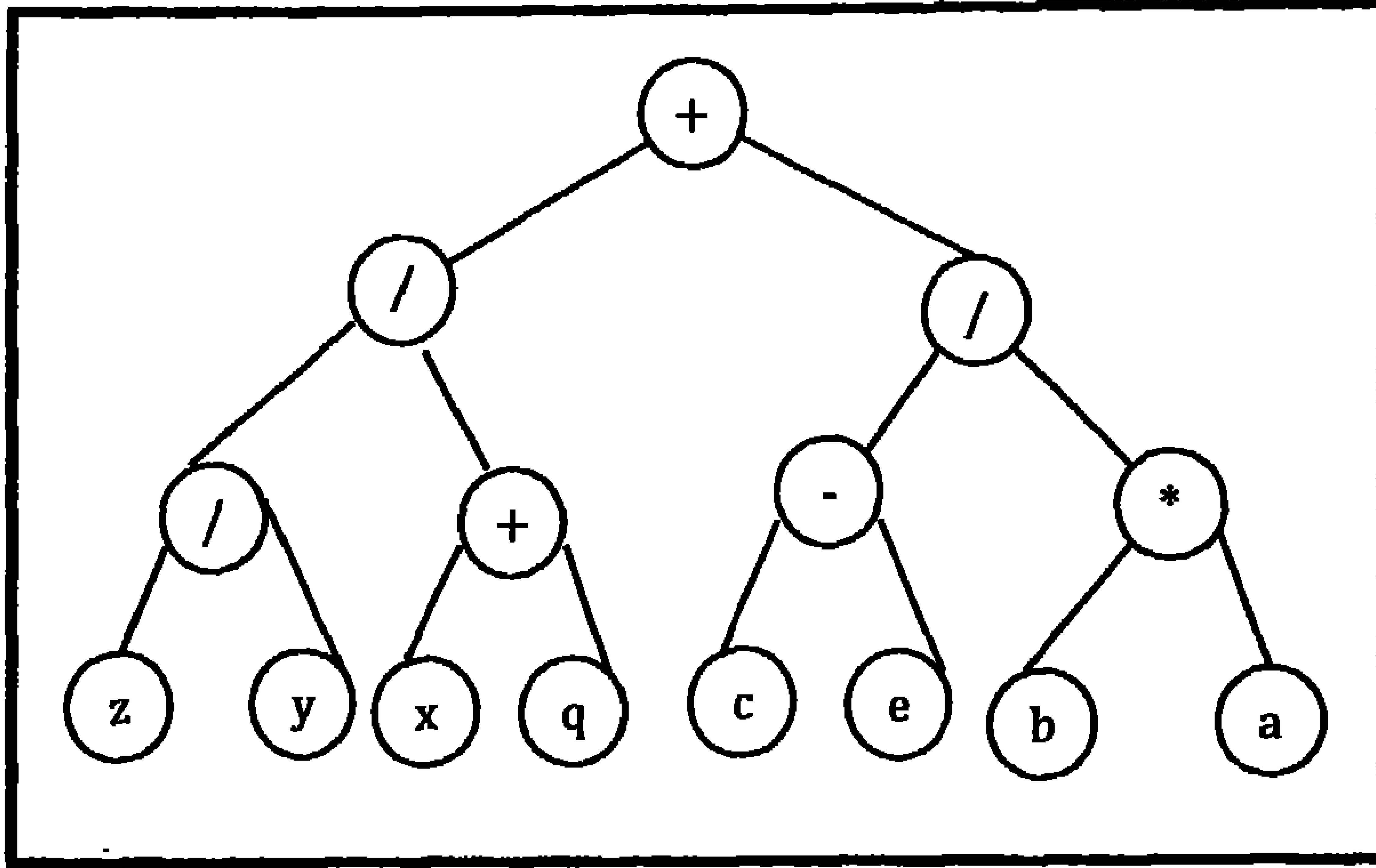
مثال: عبر عن التعبير الرياضي التالي بإستخدام مخطط الشجرة الثنائية:

$(4+6)*(8-3)+12$

الحل:



مثال: بإستخدام التعبير الرياضي عبر عن المخطط التالي:



الحل:

$((a * b)/(c - e)) + ((q + x)/(z/y))$

نظرية (8.10.2): إذا كان المخطط $T=(V, E)$ يمثل شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد n رأس فإن n يجب أن تكون عدد فردي.

البرهان:

إذا كانت T تمثل شجرة ثنائية منتظمة فإن المخطط T يحتوي على رأس واحد زوجي (الجذر) وباقي الرؤوس تكون فردية وعددها يساوي n-1 .

وبما أن عدد الرؤوس الفردية في أي مخطط يكون عدد زوجي (نظرية 8.1.4) فإن العدد n-1 يجب أن يكون عدد زوجي وبالتالي n تكون عدد فردي.

نظرية (8.10.3): إذا كان المخطط $T=(V, E)$ يمثل شجرة ثنائية منتظمة ولها n رأس فإن:

1. أقل ارتفاع للشجرة T يساوي $\lceil Log_2(n+1) - 1 \rceil$.
2. أكبر ارتفاع للشجرة T يساوي $\frac{n-1}{2}$.

حيث الدالة $\lceil x \rceil$ هي دالة الجزء الصحيح التي تعطي أصغر عدد طبيعي يكون أكبر أو يساوي x و Log_2 هي الدالة اللوغارتمية للأساس 2 .

البرهان:

أولاً: في الشجرة الثنائية المنتظمة T يوجد رأس واحد في المستوى 0 وهو الجذر ويوجد على الأكثر رأسين في المستوى 1 ويوجد على الأكثر أربع رؤوس في المستوى 2 و هكذا

يوجد على الأكثر 2^k رأس في المستوى k و بالتالي أكبر عدد من الرؤوس في الشجرة الثنائية المنتظمة T التي إرتفاعها يساوي k هو:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k \geq n \quad \text{(1)}$$

ولكن:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = \frac{2^{k+1}-1}{2-1} \quad \text{(2)}$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$2^{k+1} - 1 \geq n$$

إذن:

$$2^{k+1} \geq n + 1$$

وبأخذ لوغارتم الطرفين نحصل على:

$$k + 1 \geq \text{Log}_2(n + 1)$$

إذن:

$$k \geq \lceil \text{Log}_2(n + 1) - 1 \rceil$$

وهذا يعني أن أقل إرتفاع للشجرة T يساوي $\lceil \text{Log}_2(n + 1) - 1 \rceil$.

ثانياً: إذا أردنا رسم شجرة ثنائية منتظمة من n رأس بحيث يكون إرتفاعها أكبر ما يمكن فإننا يجب أن نضع رأس واحدة في المستوى 0 وهي الجذر ومن ثم يتبقى عندنا عدد n-1 من الرؤوس نقسمها بحيث تعطينا أكبر إرتفاع للشجرة وهذا يحدث عندما نضع رأسين فقط في كل مستوى من الرؤوس n-1 وبالتالي يكون إرتفاع الشجرة يساوي $\frac{n-1}{2}$.

ملاحظة: لحساب

$$\text{Log}_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

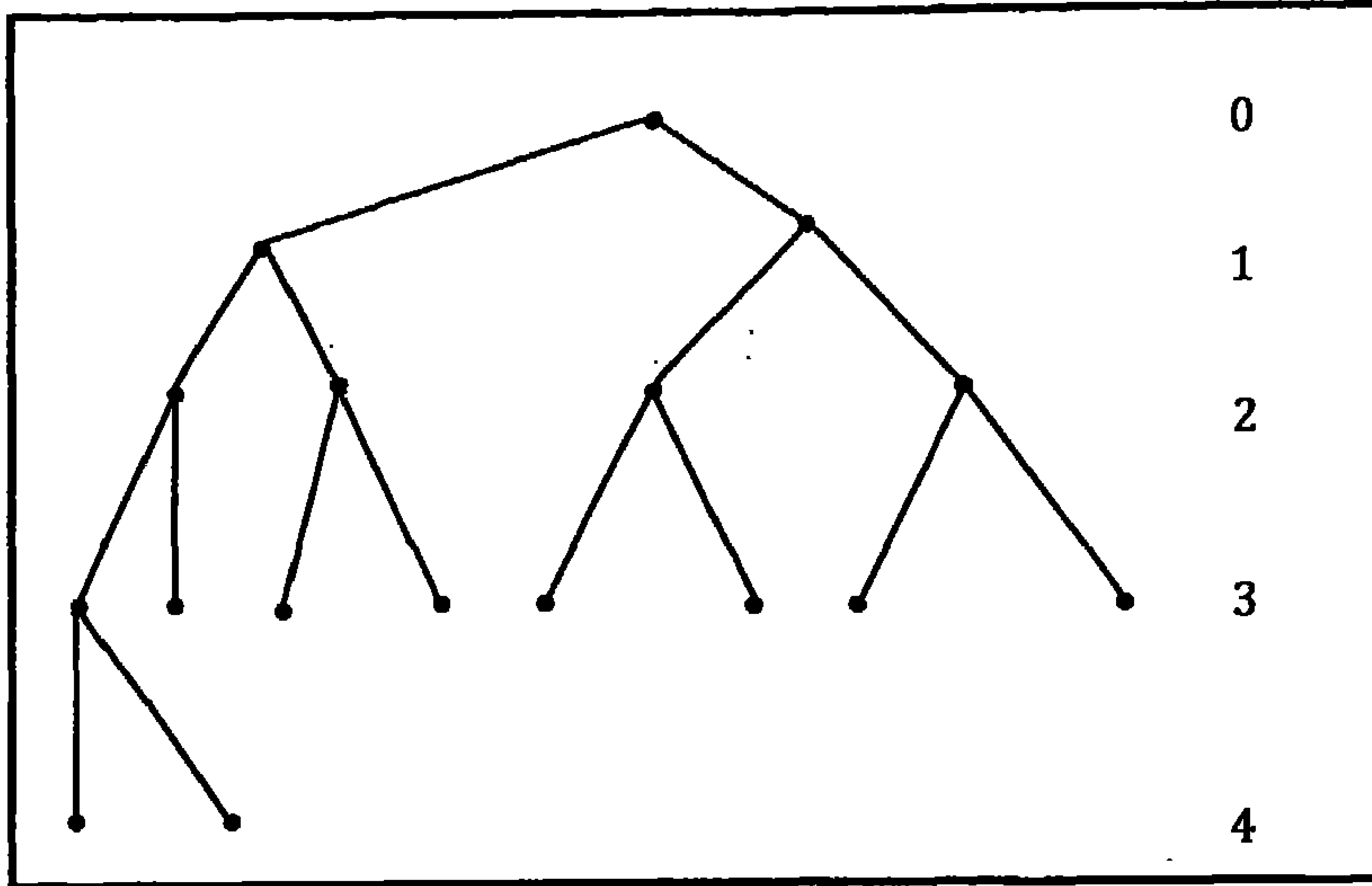
مثال: إرسم شجرة ثنائية منتظمة لها 17 رأس بحيث يكون إرتفاع الشجرة أقل ما يمكن.

الحل:

الشجرة الثنائية المنتظمة T ذات n رأس يكون لها أقل إرتفاع ممكن يساوي:

$$\lceil \text{Log}_2(n + 1) - 1 \rceil = \lceil \text{Log}_2(18) - 1 \rceil = \lceil 4.1699 - 1 \rceil = \lceil 3.1699 \rceil = 4$$

وبالتالي نقسم الرؤوس 17 على المستويات كما يلي:



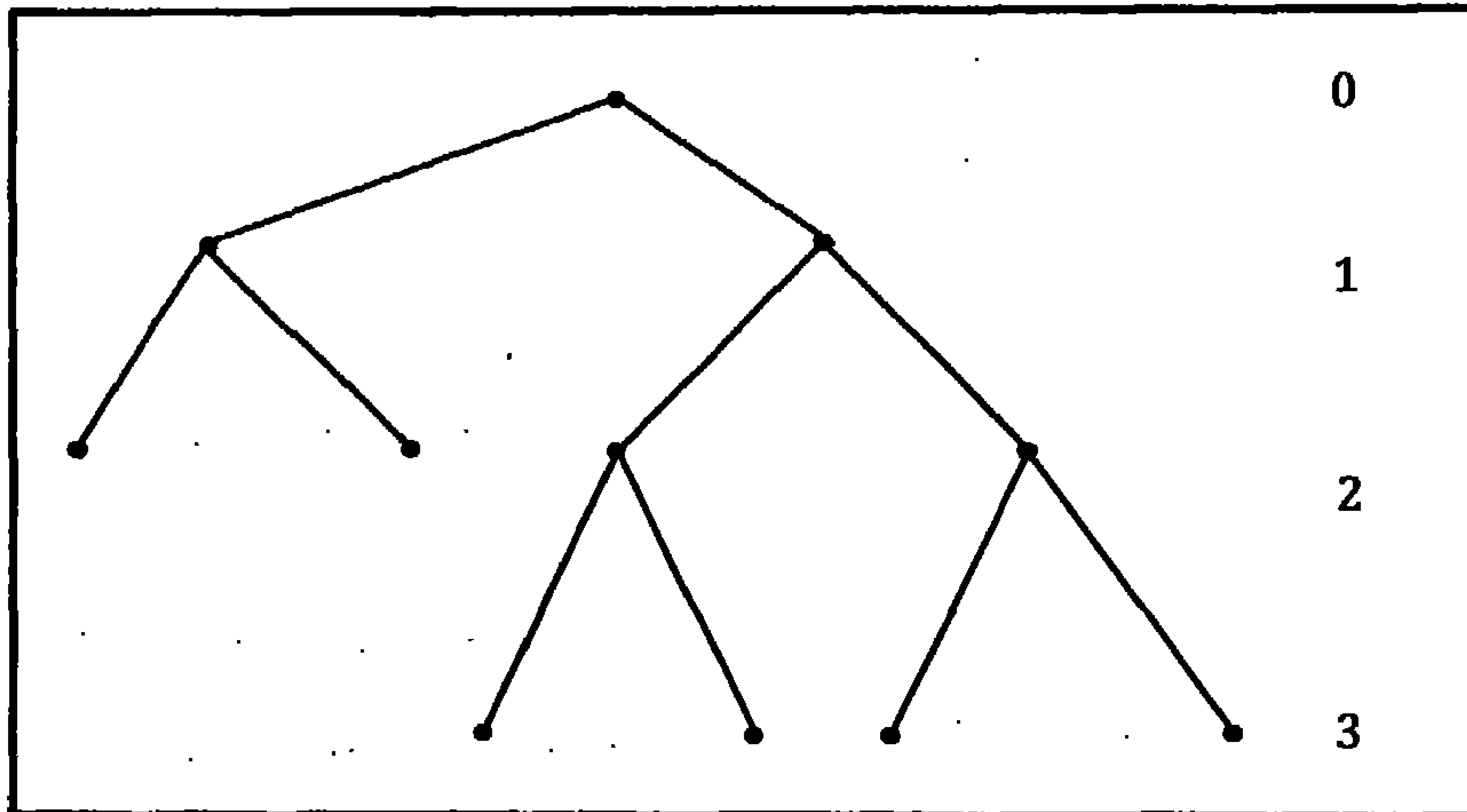
مثال: إرسم شجرة ثنائية منتظمة لها 11 رأس بحيث يكون إرتفاع الشجرة أقل ما يمكن.

الحل:

الشجرة الثنائية T ذات n رأس يكون لها أقل إرتفاع ممكن يساوي:

$$\lceil Log_2(n+1)-1\rceil = \lceil Log_2(12)-1\rceil = \lceil 3.58-1\rceil = \lceil 2.58\rceil = 3$$

وبالتالي نقسم الرؤوس 11 على المستويات كما يلي:



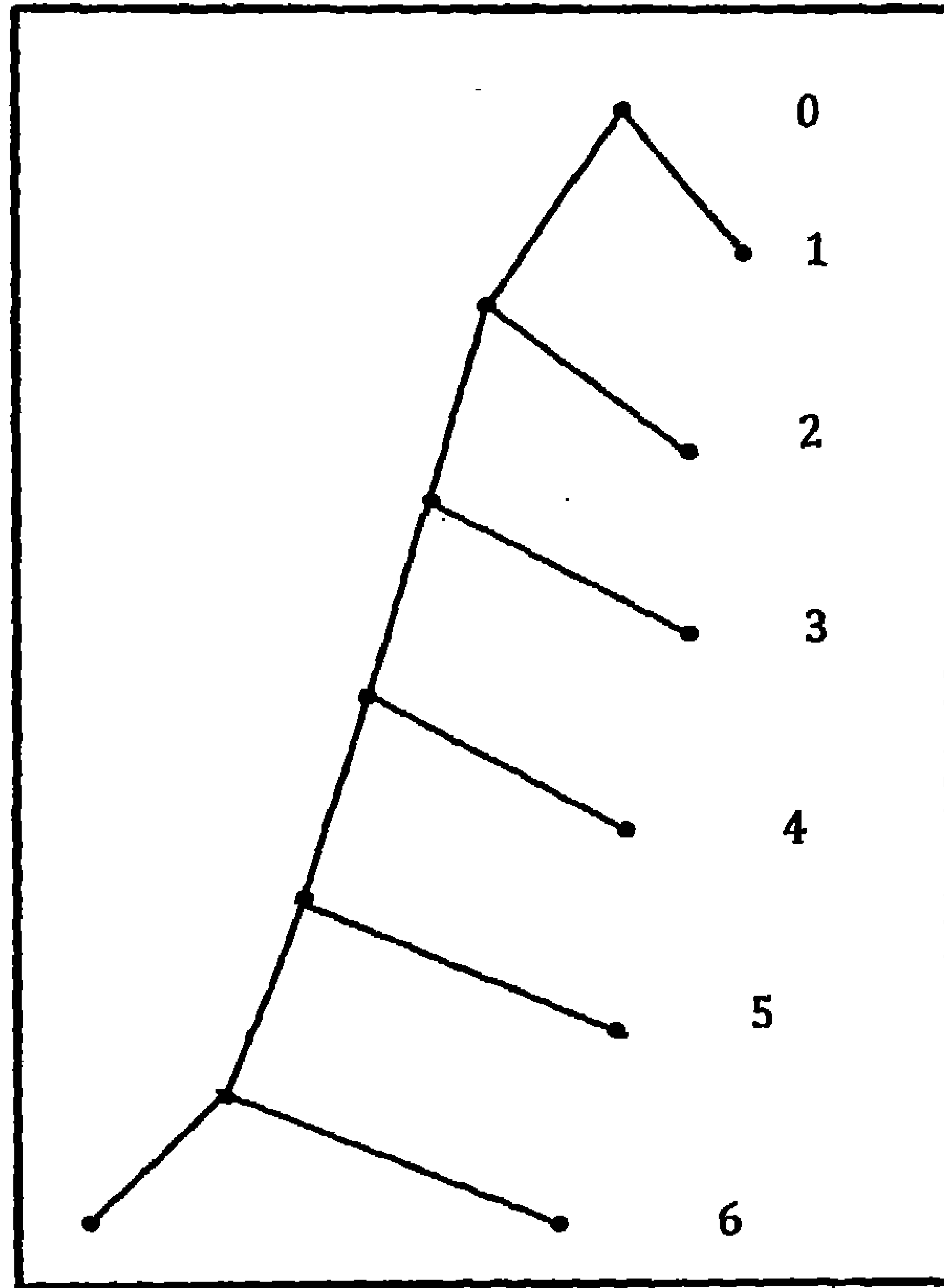
مثال: إرسم شجرة ثنائية منتظمة لها 13 رأس بحيث يكون إرتفاع الشجرة أكبر ما يمكن.

الحل:

الشجرة الثنائية المنتظمة T ذات n رأس يكون لها أكبر إرتفاع ممكن يساوي

$\frac{n-1}{2} = 6$

وبالتالي نقسم الرؤوس 13 على المستويات كما يلي:



نظرية (8.10.4): إذا كان المخطط T=(V, E) يمثل شجرة ثنائيـة منتظمـة ولهـا عـدد i رأس داخلي فإن:

1. عدد رؤوس الشجرة T هو $n = 2i + 1$.
2. عدد الرؤوس المعلقة (الأوراق) للشجرة T هو $l = i + 1$.

البرهان:

كل رأس في الشجرة T ما عدا الجذر هي إبن لرأس داخلي وكل رأس داخلي تملك بالضبط عدد 2 من الرؤوس الأبناء وبالتالي يكون لدينا عدد 2i من الرؤوس بالإضافة إلى الجذر وبالتالي فالعدد الكلي لرؤوس الشجرة T هو:

$n = 2i + 1$ .... (1)

وبما أن كل رأس في T أما أن تكون ورقة وأما أن تكون رأس داخلي وبالتالي:

$n = l + i$ .... (2)

فمن (1) و (2) نحصل على:

$l = i + 1$

مثال: إذا كانت T=(V, E) شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد 10 رؤوس داخلية فأحسب :

1. عدد رؤوس الشجرة T .
2. عدد أوراق الشجرة T .

الحل:

عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T يساوي i=10 وبالتالي:

1. عدد رؤوس الشجرة T هو:

$n = 2i + 1 = 2(10) + 1 = 21$

2. عدد أوراق الشجرة T هي:

$l = i + 1 = 10 + 1 = 11$

نظرية (8.10.5): إذا كان المخطط T=(V, E) يمثل شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد n رأس فإن

1. عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T هو $i = \frac{n-1}{2}$.
2. عدد الرؤوس المعلقة (الأوراق) للشجرة T هو $l = \frac{n+1}{2}$.

البرهان:

إذا كان n عدد رؤوس T و i عدد الرؤوس الداخلية ل T و l عدد أوراق T .

فمن نظرية (8.10.4) يكون لدينا:

$n = 2i + 1$ .... (1)

وبما أن كل رأس في T أما أن تكون ورقة وأما أن تكون رأس داخلي وبالتالي:

$n = l + i$ .... (2)

فمن (1) و (2) نحصل على:

$l = i + 1$ .... (3)

فمن (1) نحصل على:

$i = \frac{n-1}{2}$ .... (4)

فمن (3) و (4) نحصل على:

$$l = \frac{n+1}{2}$$

مثال: إذا كانت T=(V, E) شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد رؤوس T هي 13 رأس فإحسب:

1. عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T.
2. عدد أوراق الشجرة T .

الحل:

عدد رؤوس T يساوي n=13 وبالتالي:

1. عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T هو:

$$i = \frac{n-1}{2} = \frac{13-1}{2} = 6$$

2. عدد أوراق الشجرة T هي:

$$l = \frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$$

نظرية (8.10.6): إذا كان المخطط T=(V, E) يمثل شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد l رأس معلقة (ورقة) فإن:

1. عدد الرؤوس للشجرة T هو $n = 2l - 1$.
2. عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T هو $i = l - 1$.

البرهان:

إذا كان n عدد رؤوس T و i عدد الرؤوس الداخلية ل T و l عدد أوراق T.

فمن نظرية (8.10.5) يكون لدينا:

$$l = \frac{n+1}{2}$$

إذن:

$n = 2l - 1$..(1)

وبما أن كل رأس في T أما أن تكون ورقة وأما أن تكون رأس داخلي وبالتالي:

$n = l + i$ ....(2)

فمن (1) و (2) نحصل على:

$i = n - l = 2l - 1 - l = l - 1$

مثال: إذا كانت T=(V, E) شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد 15 من الرؤوس المعلقة (الأوراق). فإحسب :

1. عدد رؤوس الشجرة T .
2. عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T.

الحل:

عدد الرؤوس المعلقة (أوراق) للشجرة T يساوي l=15 وبالتالي:

1. عدد رؤوس الشجرة T هو:

$n = 2l - 1 = 2(15) - 1 = 29$

2. عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T هي:

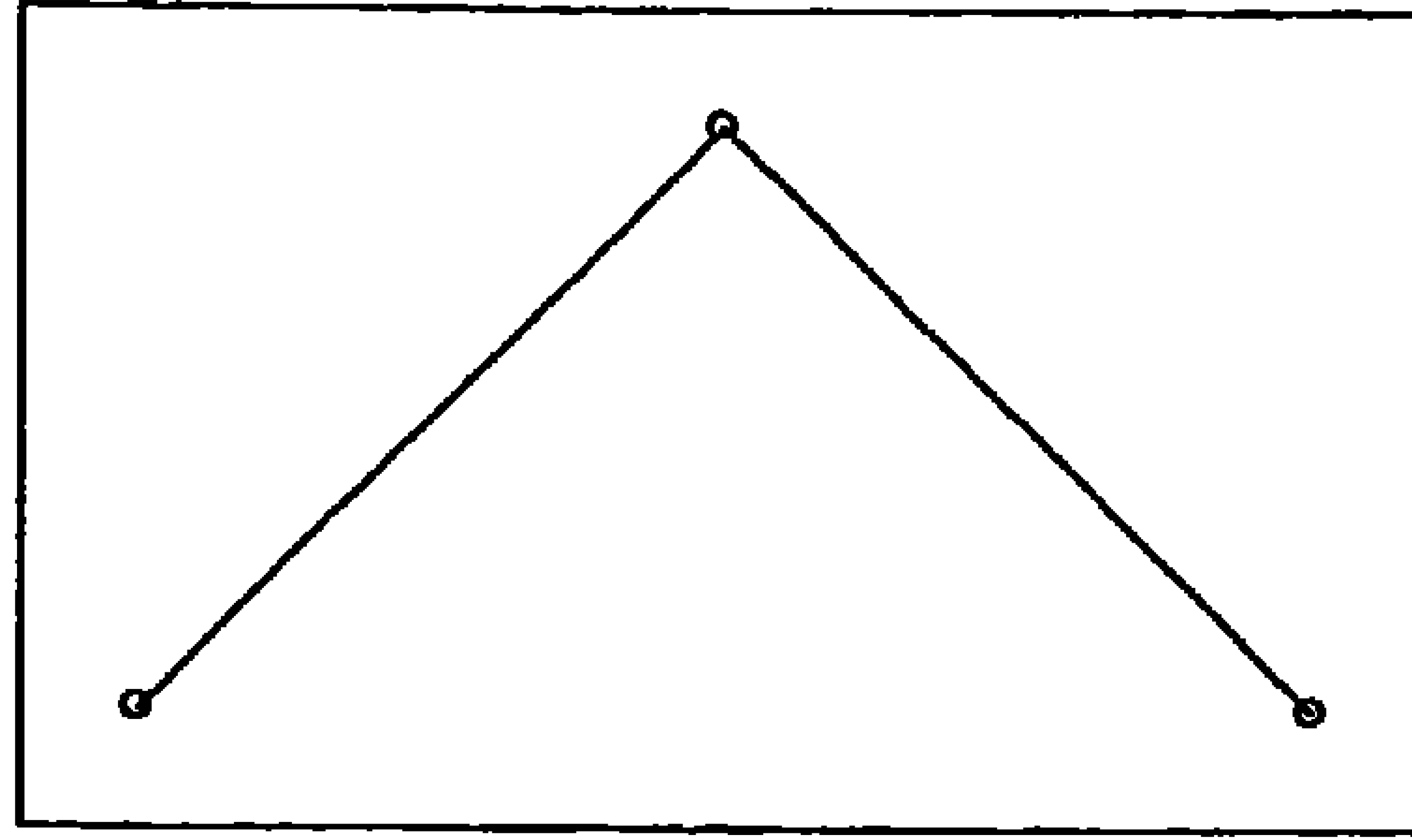
$i = l - 1 = 15 - 1 = 14$

نظرية (8.10.7): إذا كان المخطط T=(V, E) شجرة ثنائية ولها إرتفاع h فإن الشجرة T تملك على الأكثر 2^h ورقة.

البرهان:

بإستخدام الإستقراء الرياضي:

الخطوة الأولى: عندما n=1 فإن الشجرة الثنائية T تتكون من جذر وورقتين كما يلي:



وبالتالي فعدد أوراق الشجرة T يساوي 2 ولهم الإرتفاع h=1 .

الخطوة الثانية: نفرض صحة النظرية عندما يكـون إرتفـاع الشـجرة الثنائيـة T أقـل مـن h وتحاول إثبات صحة النظرية عندما يكون ارتفاع الشجرة T يساوي h ؟

ولأجل ذلك تحذف الرأس التي تمثل جذر الشجرة T فنحصل على شجرتين جـزئتين ثنائتين T_1, T_2 كلاً منهما له إرتفاع يساوي h-1 وهذا الإرتفاع بالتأكيـد يكـون أقـل مـن h وبالتالي فكلاً من الشجرتين الجزئتين T_1, T_2 يملك على الأكثر 2^{h-1} ورقة وبالتـالي فـإن الشجرة T تملك أوراق تكون على الأكثـر $2^{h-1} + 2^{h-1} = (2)(2^{h-1}) = 2^h$ ورقـة إذن النظرية صحيحة في حالة الارتفاع h .

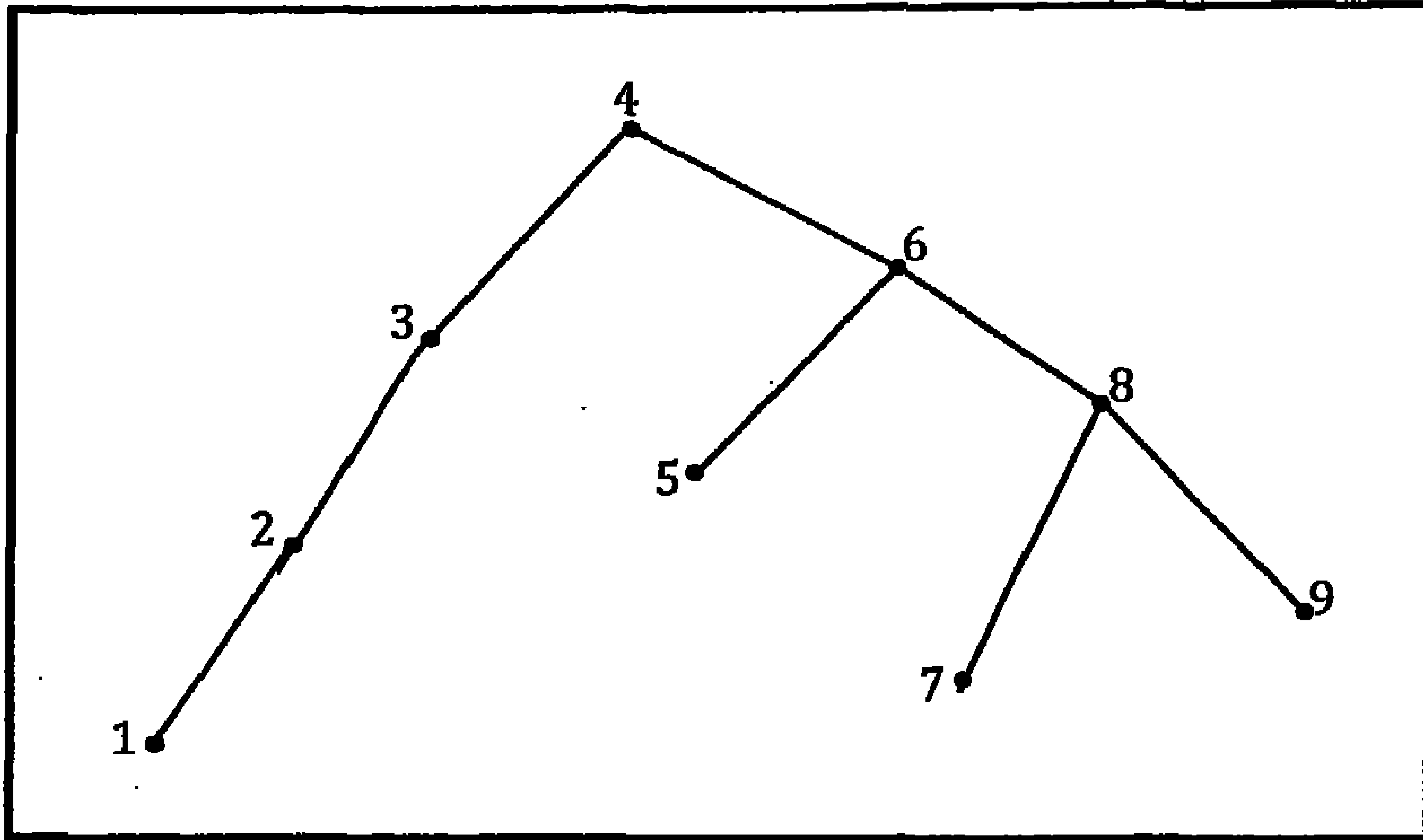
(8-11) الأشجار الثنائية المرتبة Ordered Binary Trees

تعريف (8.11.1): المخطط G=(V, E) يسمى شجرة ثنائية مرتبة إذا تحقق شرطين:

1. القيمة العددية للإبـن الأيسـر لأي رأس مـن رؤوس الشـجرة تكـون أقـل مـن القيمـة العددية لأب ذلك الرأس.
2. القيمة العددية للإبن الأيمن لأي رأس تكون أكبر من القيمة العددية لأب ذلك الرأس.

ملاحظة: في العادة نستخدم مخطط الشجرة الثنائية المرتبة في ترتيب قائمة تحتوي على مجموعة من الأعداد أو الحروف أو الأسماء بحيث إنه إذا قمنا ببحث من خلال رؤوس الشجرة من اليسار إلى اليمين لحصلنا على قائمة تكون مرتبة تصاعديا.

مثال: لتكن لدينا الشجرة الثنائية المرتبة التالية:



(8-11-2) بناء شجرة ثنائية مرتبة

إذا كان لدينا قائمة معطاة من حروف أو أعداد أو أسماء ونريد أن نرتبها على هيئة شجرة ثنائية مرتبة فإننا نتبع الخطوات التالية:

1. نأخذ أول عنصر من القائمة ونجعله جذر للشجرة وليكن r .
2. نأخذ ثاني عنصر من القائمة وليكن x ونقارنه مع الجذر r فإذا كانت $x<r$ فإن x يكون إبن أيسر للجذر r وأما إذا كانت $x>r$ فإن x يكون إبن أيمن للجذر r .
3. نأخذ ثالث عنصر من القائمة وليكن y ونقارنه أولا مع الجذر r فإذا كانت $y<r$ فإن y تقع ضمن عناصر الفرع الأيسر للشجرة وبالتالي يجب أن نقارن y مع عناصر الفرع الأيسر وتحديد موقع لـy وأما إذا كانت $y>r$ فإن y تقع ضمن الفرع الأيمن للشجرة وبالتالي يجب لأن نقارن قيمة y مع عناصر الفرع الأيمن وتحديد موقع صحيح لها.
4. نكرر الخطوة السابقة (3) على بقية عناصر القائمة.
5. نرسم مخطط الشجرة الثنائية المرتبة.

مثال: إذا كان لدينا القائمة العددية التالية:

$\{30, 20, 50, 25, 10, 40, 70, 60\}$

فكون شجرة ثنائية مرتبة لهذه القائمة المعطاة.

الحل:

الخطوة الأولى: نأخذ أول بيان من القائمة وهو 30 ليكون جذر الشجرة.

الخطوة الثانية: نأخذ ثاني بيان من القائمة وهو 20 ونقارنه مع الجذر 30 وبالتالي يكون 20 إبن أيسر للجذر 30 .

الخطوة الثالثة: نأخذ ثالث بيان من القائمة وهو 50 ونقارنه أولاً مع الجذر 30 وبالتالي فإن 50 تكون إبن أيمن للجذر 30.

الخطوة الرابعة: نأخذ رابع بيان من القائمة وهو 25 ونقارنه أولاً مع الجذر 30 وبالتالي فإن 25 تقع ضمن الفرع الأيسر للشجرة ثم نقارن 25 مع 20 وبالتالي فإن 25 تكون إبن أيمن ل20 .

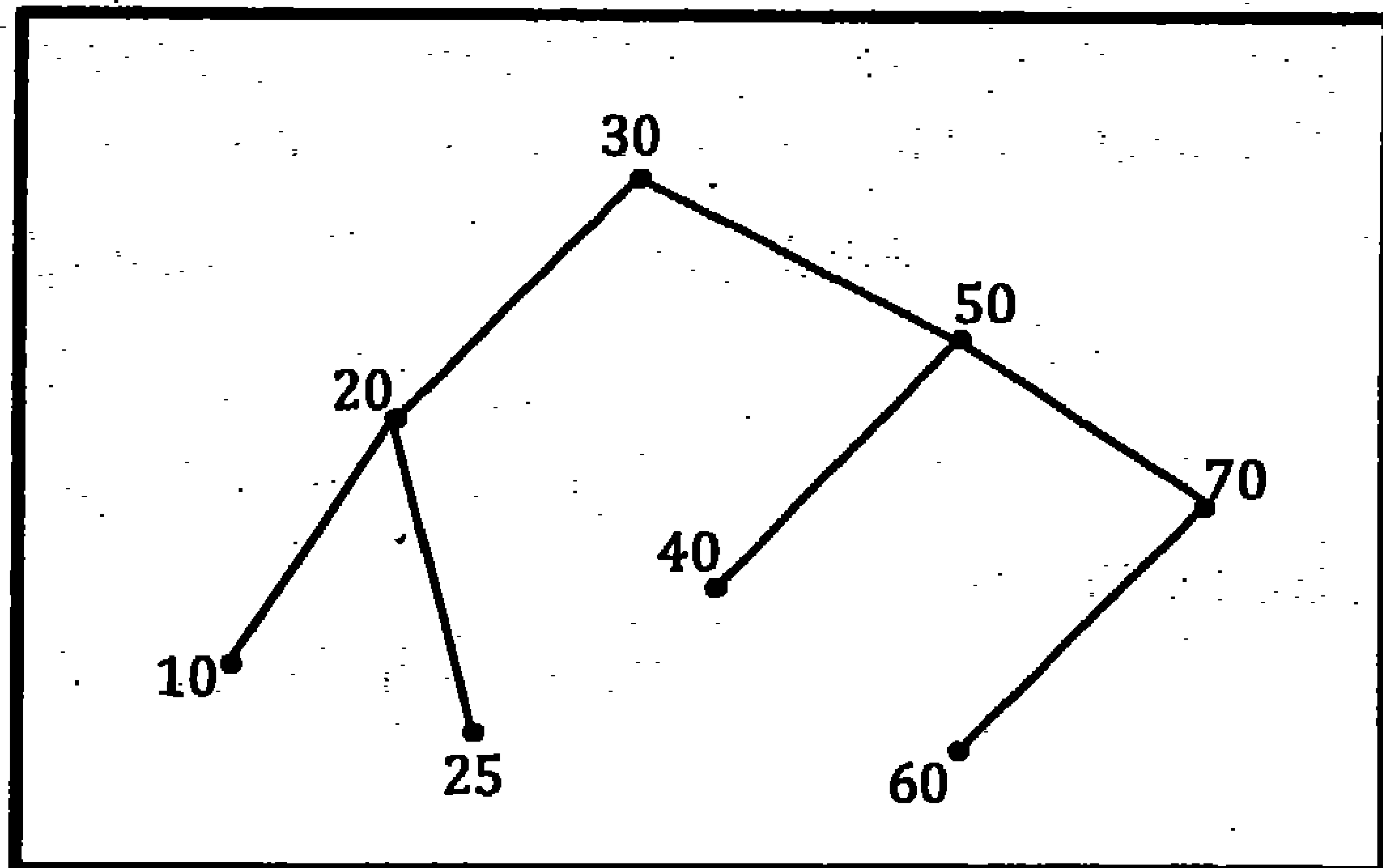
الخطوة الخامسة: نأخذ خامس بيان من القائمة وهو 10 ونقارنه اولاً مع الجذر 30 وبالتالي 10 تقع ضمن الفرع الأيسر للشجرة ثم نقارن 10 مع العنصر 20 من الفرع الأيسر وبالتالي 10 تكون إبن أيسر ل 20 .

الخطوة السادسة: نأخذ العدد 40 ونقارنه أولا مع الجذر 30 وبالتالي 40 تقع في الفرع الأيمن للشجرة ثم نقارن 40 مع العنصر 50 من الفرع الأيمن وبالتالي تكون 40 هي إبن أيسر ل50.

الخطوة السابعة: نأخذ العدد 70 من القائمة ونقارنه مع الجذر 30 وبالتالي يكون 70 ضمن الفرع الأيمن من الشجرة ثم نقارن 70 مع 50 وبالتالي يكون 70 إبن أيمن ل 50 .

الخطوة الثامنة: نأخذ العدد 60 من القائمة ونقارنه مع الجذر 30 وبالتالي يكون 60 ضمن الفرع الأيمن من الشجرة ثم نقارن 60 مع 70 وبالتالي يكون 60 إبن أيسر ل 70 .

الخطوة التاسعة : نرسم مخطط الشجرة المرتبة كما يلي:



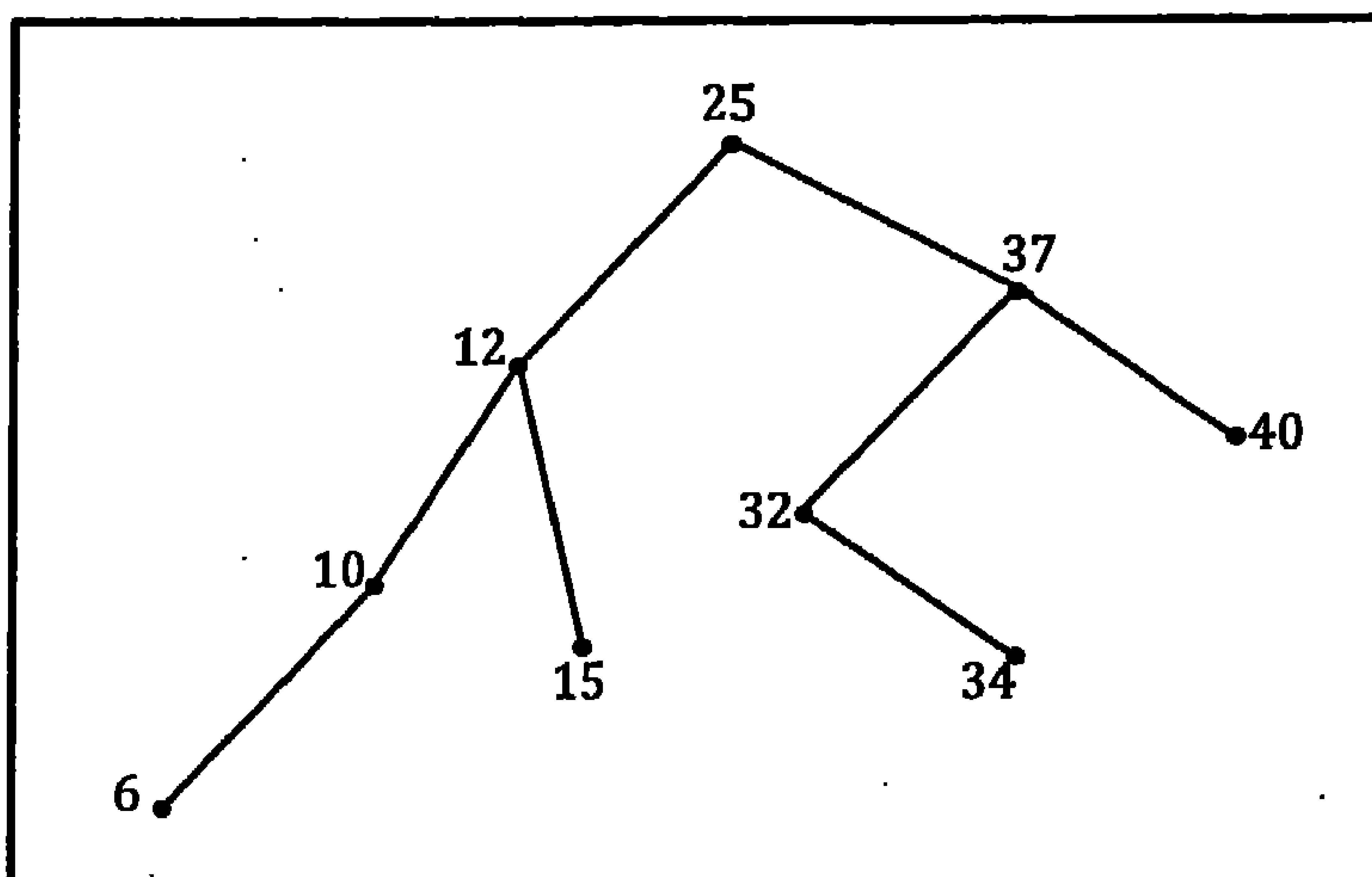
مثال: إذا كان لدينا القائمة العددية التالية:

{25, 37, 12, 40, 10, 15, 32, 6, 34}

فكون شجرة ثنائية مرتبة لهذه القائمة المعطاة.

الحل:

بإتباع نفس أسلوب المثال السابق فإننا سوف نحصل على الشجرة التالية:



(8-11-3) طرق البحث في الشجرة الثنائية المرتبة

إذا كان لدينا شجرة ثنائية جذرها P وفرعها الأيسر L وفرعها الأيمن R فإن هناك ثلاث طرق مشهورة للبحث في بيانات الشجرة الثنائية المرتبة وهم:

الطريقة الأولى: طريقة البحث بالترتيب السابق (PLR) Preorder traversal

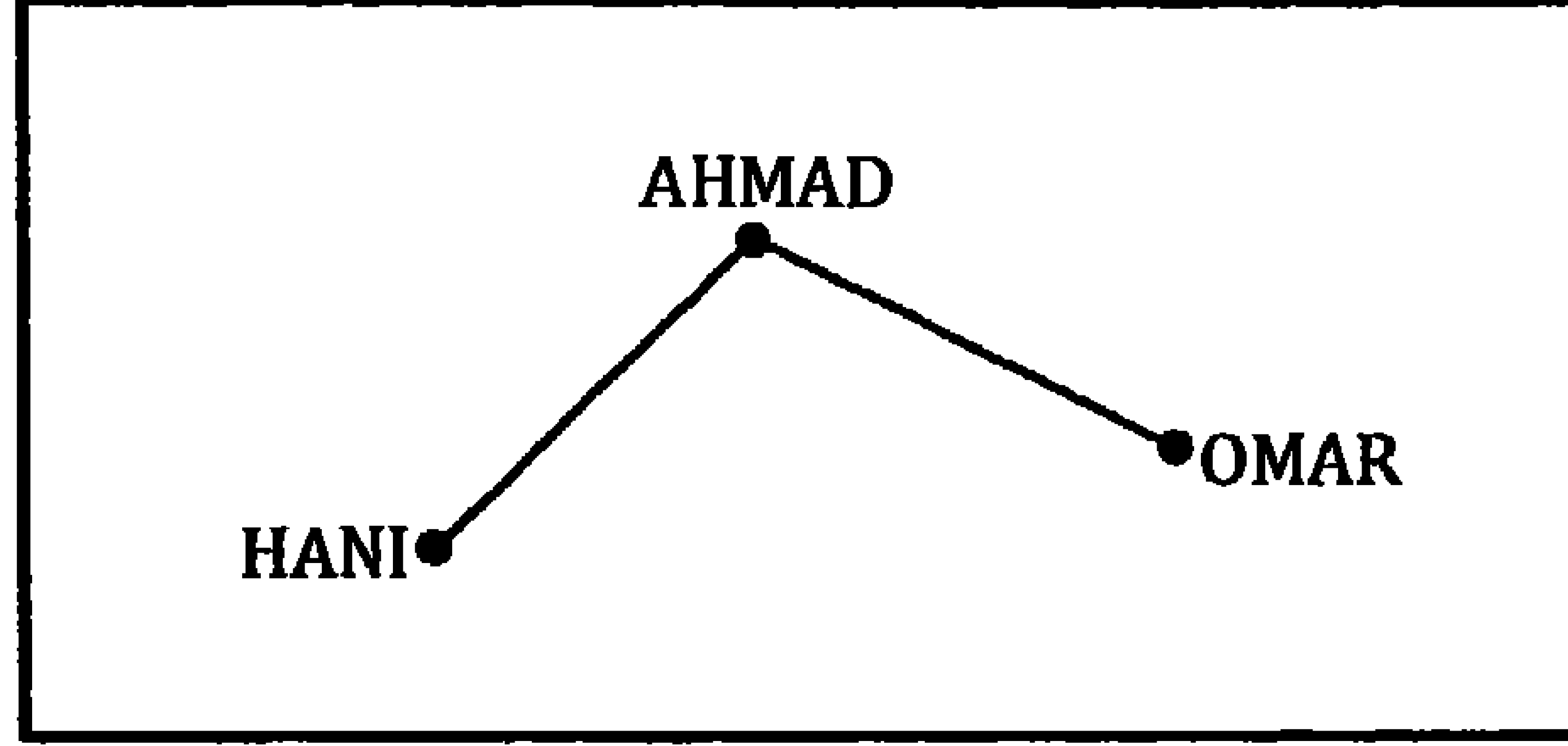
وهي تعتمد على الخطوات التالية:

أولاً: نبحث في بيان الجذر.

ثانياً: نبحث في بيان الفرع الأيسر للشجرة.

ثالثاً: نبحث في بيان الفرع الأيمن للشجرة.

مثال: باستخدام طريقة الترتيب السابق رتب بيانات مخطط الشجرة الثنائية التالية:



الحل:

فباستخدام طريقة الترتيب السابق نحصل على: أحمد- هاني – عمر .

الطريقة الثانية : طريقة البحث بالترتيب الوسطى (LPR) Inorder traversal

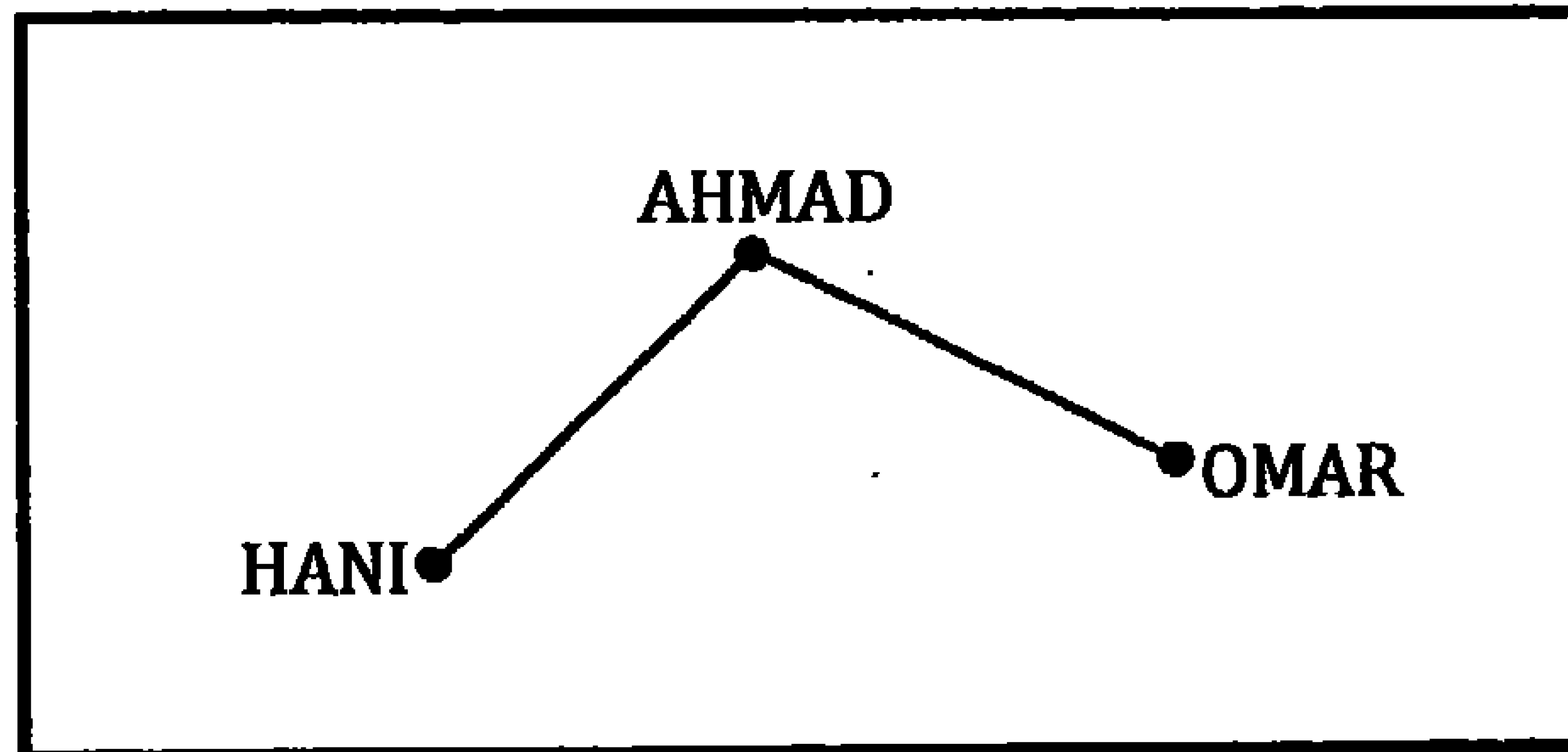
وهي تعتمد على الخطوات التالية:

أولاً: نبحث في بيان الفرع الأيسر للشجرة.

ثانياً: نبحث في بيان الجذر.

ثالثاً: نبحث في بيان الفرع الأيمن للشجرة.

مثال: بإستخدام طريقة الترتيب الوسطى رتب بيانات مخطط الشجرة الثنائية التالية:



الحل:

فبإستخدام طريقة الترتيب الوسطى نحصل على: هاني- أحمد – عمر.

الطريقة الثالثة : طريقة البحث بالترتيب اللاحق (LRP) Postorder traversal

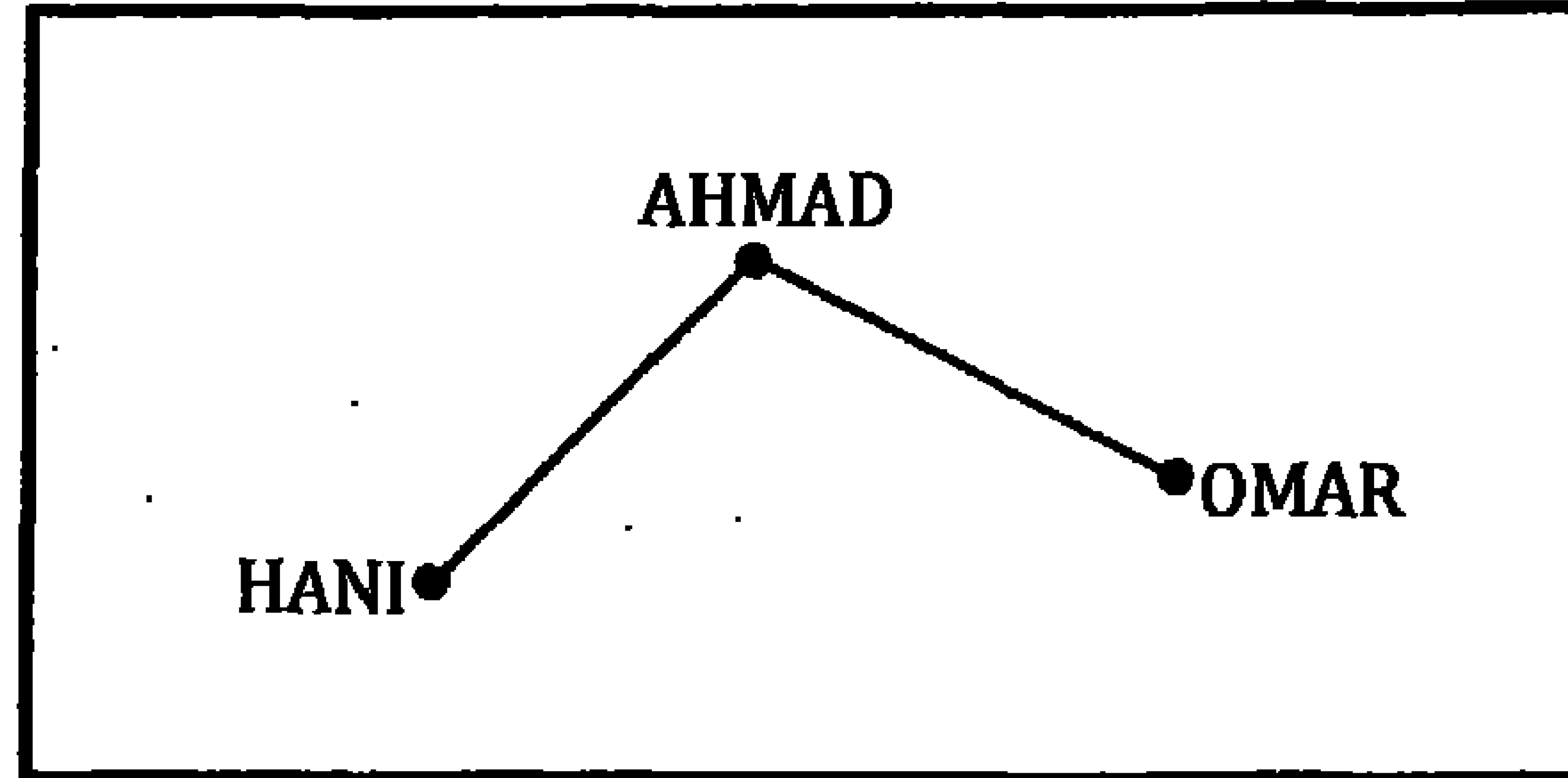
وهي تعتمد على الخطوات التالية:

أولاً: نبحث في بيان الفرع الأيسر للشجرة.

ثانياً: نبحث في بيان الفرع الأيمن للشجرة.

ثالثاً: نبحث في بيان الجذر.

مثال: بإستخدام طريقة الترتيب اللاحق رتب بيانات مخطط الشجرة الثنائية التالية:



الحل:

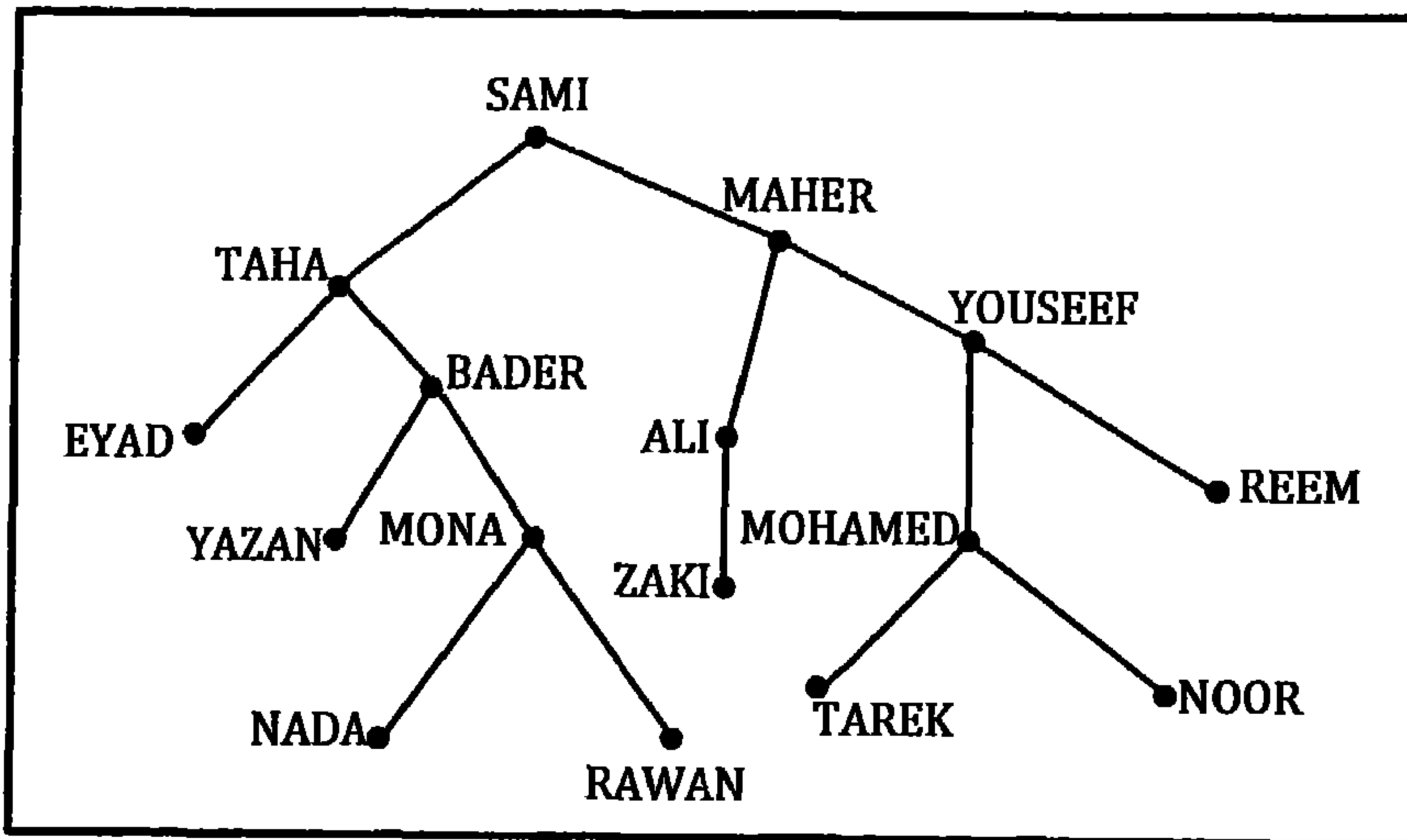
فبإستخدام طريقة الترتيب اللاحق نحصل على: هاني– عمر – أحمد.

مثال: رتب بيانات مخطط الشجرة الثنائية التالية:

أولاً: بإستخدام طريقة الترتيب السابق.

ثانياً: بإستخدام طريقة الترتيب الوسطى.

ثالثاً: بإستخدام طريقة الترتيب اللاحق.



الحل:

أولاً: بإستخدام طريقة الترتيب السابق نحصل على:

سامي – طه – إياد – بدر – يزن – منى – ندى – روان – ماهر – علي – زكي – يوسف – محمد – طارق – نور – ريم.

ثانياً: بإستخدام طريقة الترتيب الوسطى نحصل على:

إياد – طه – يزن – بدر – ندى – منى – روان – سامي – زكي – علي – ماهر – طارق – محمد – نور – يوسف – ريم.

ثالثاً: بإستخدام طريقة الترتيب اللاحق نحصل على:

إياد – يزن – ندى – روان – منى – بدر – طه – زكي – علي – طارق – نور – محمد – ريم – يوسف – ماهر – سامي.

تمارين

1. ليكن G مخطط حيث

$V = \{a, b, c, d\}, \qquad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

المعرف بالجدول التالي:

E	e_1	e_2	e_3	e_4
f(e)	[a, b]	[a, b]	[a, a]	[d, c]

أ. إرسم المخطط .

ب. إحسب درجات الرؤوس .

ج. هل يوجد أضلاع متكررة – عقد – رؤوس منفردة – رؤوس معلقة.

د. هل المخطط بسيط .

2. ليكن G مخطط حيث

$V = \{a, b, c, d, g, h\}, \qquad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

المعرف بالجدول التالي:

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
f(e)	[a, b]	[b, g]	[g, h]	[h, c]	[c, b]	[c, g]

أ. إرسم المخطط .

ب. إحسب درجات الرؤوس .

ج. هل يوجد أضلاع متكررة – عقد – رؤوس منفردة – رؤوس معلقة.

د. هل المخطط بسيط .

3. ليكن G مخطط حيث

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

المعرف بالجدول التالي:

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
f(e)	[5, 5]	[3, 4]	[3, 4]	[2, 3]	[1, 2]

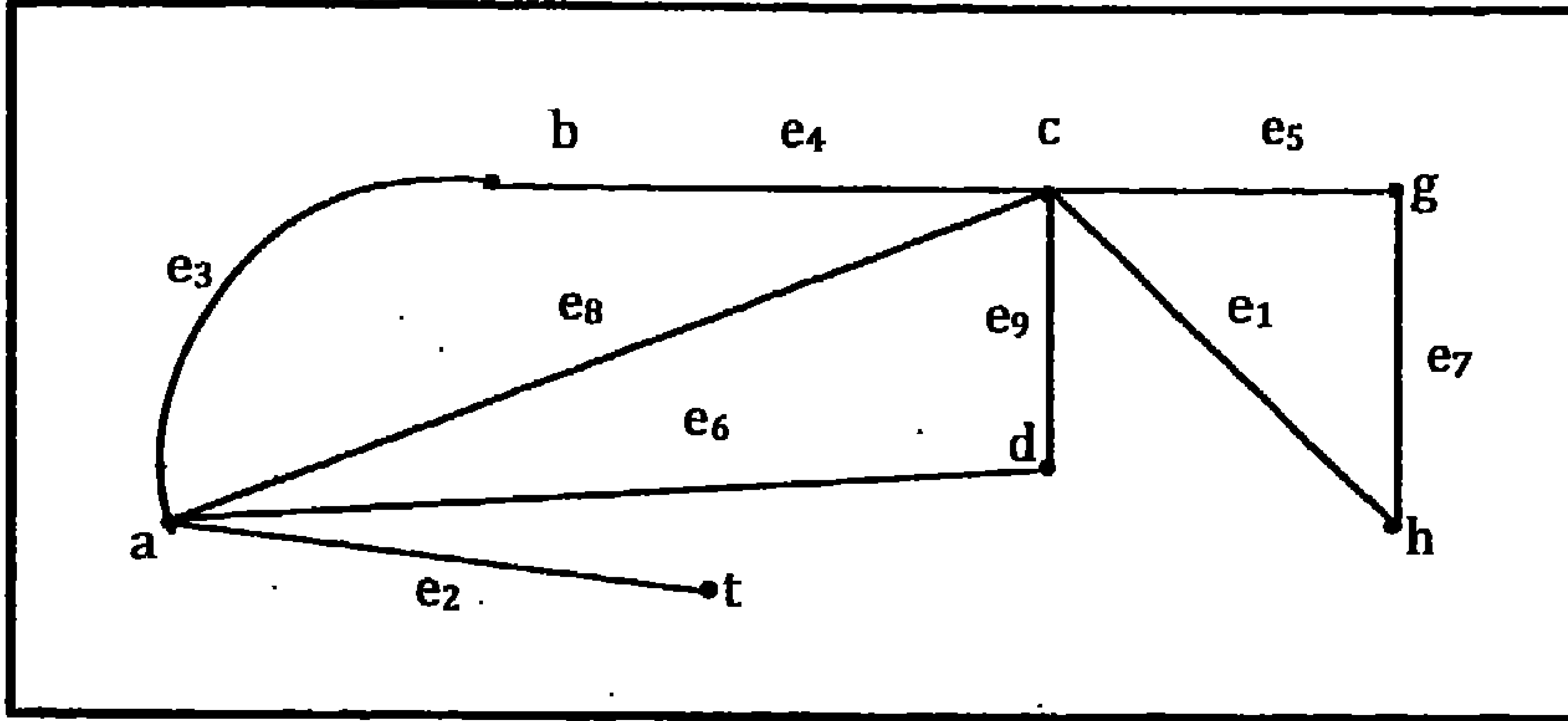
أ. إرسم المخطط .

ب. إحسب درجات الرؤوس .

ج. هل يوجد أضلاع متكررة – عقد – رؤوس منفردة – رؤوس معلقة.

د. هل المخطط بسيط .

4. ليكن لدينا المخطط



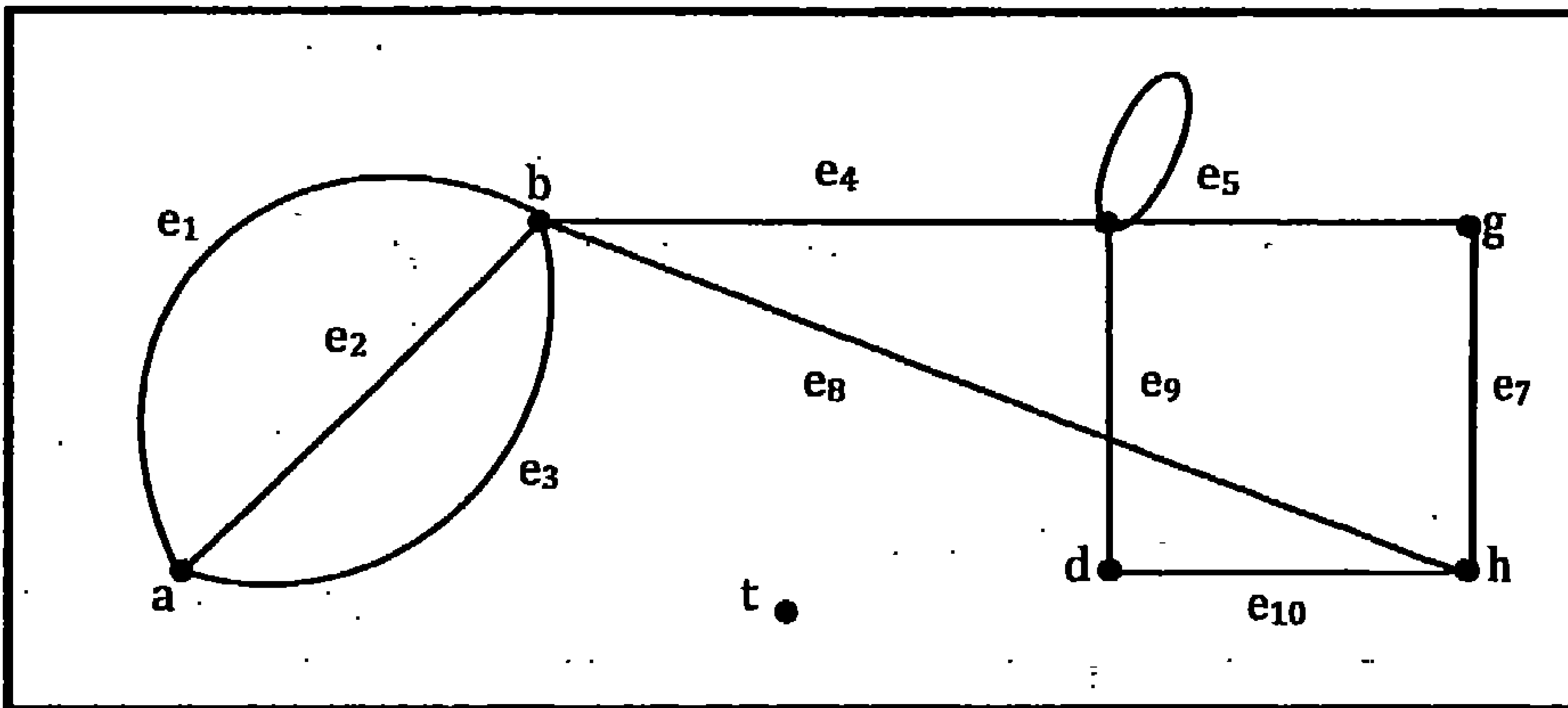
أ. أوصف المخطط عن طريق الجدول .

ب. إحسب درجات الرؤوس .

ج. هل يوجد أضلاع متكررة – عقد – رؤوس منفردة – رؤوس معلقة.

د. هل المخطط بسيط .

5. ليكن لدينا المخطط



أ. أوصف المخطط عن طريق الجدول .

ب. إحسب درجات الرؤوس .

ج. هل يوجد أضلاع متكررة – عقد – رؤوس منفردة – رؤوس معلقة.

د. هل المخطط بسيط .

6. هل يوجد مخطط بحيث تكون:

أ. درجات رؤوسه هي :4,3,3,2,5 وإذا كانت الإجابة نعم فأرسمه .

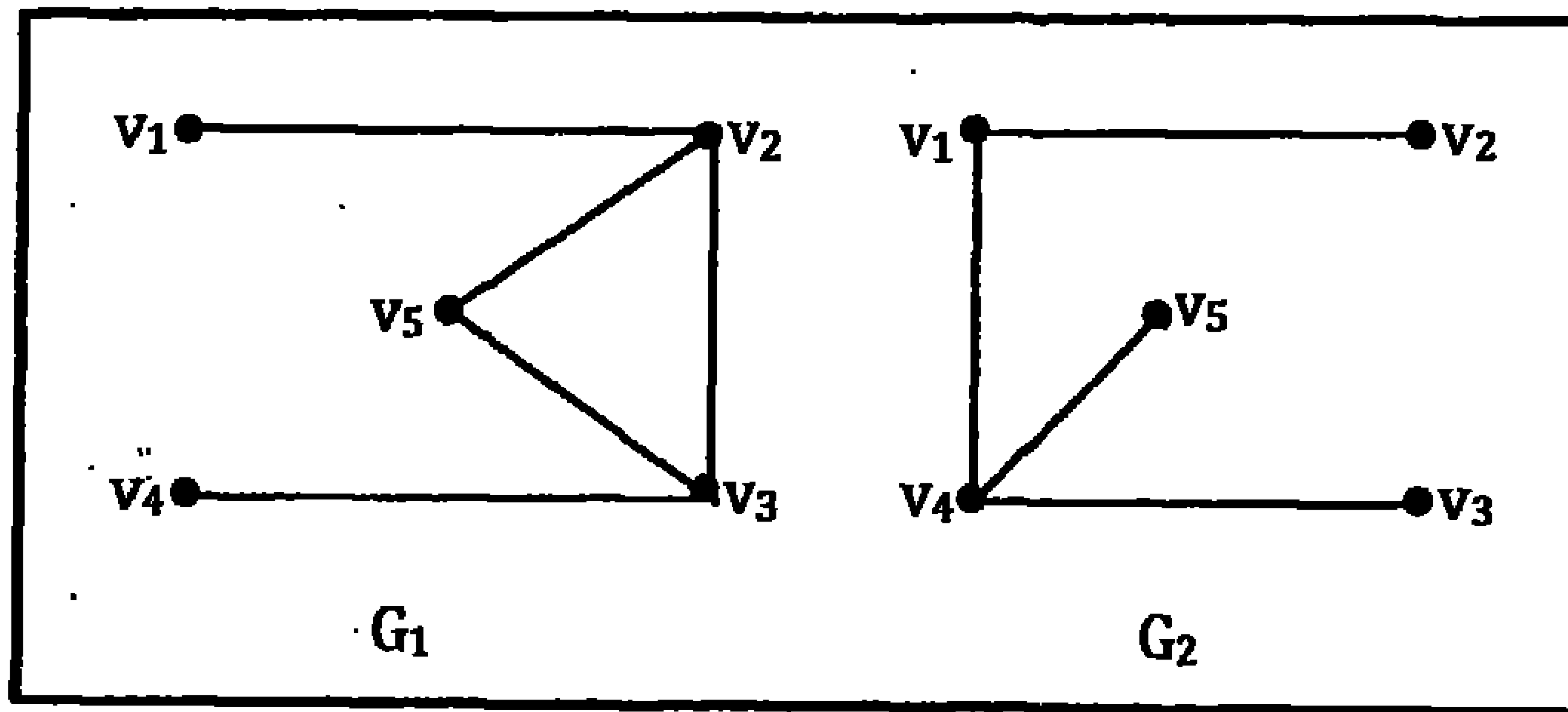
ب. درجات رؤوسه هي :4,3,3,2,6 وإذا كانت الإجابة نعم فأرسمه .

ج. درجات رؤوسه هي :3,3,0,5,5 وإذا كانت الإجابة نعم فأرسمه .

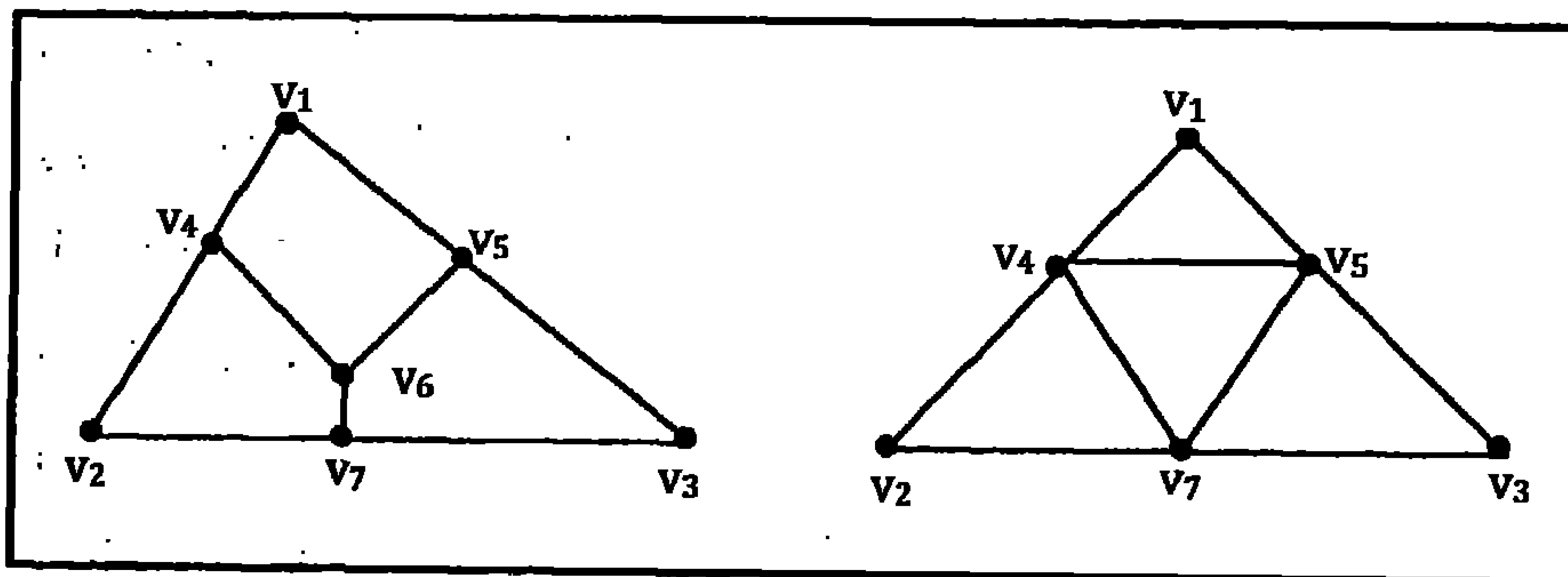
7. إرسم مخطط تكون عدد رؤوسه 14 بحيث تكون 8 من هذه الرؤوس زوجية والرؤوس الأخرى فردية .

8. هل يوجد مخطط ذو خمسة رؤوس وسبعة أضلاع ودرجات رؤوسه هي4,3,2,2,3 وإذا كانت الإجابة نعم فأرسمه .

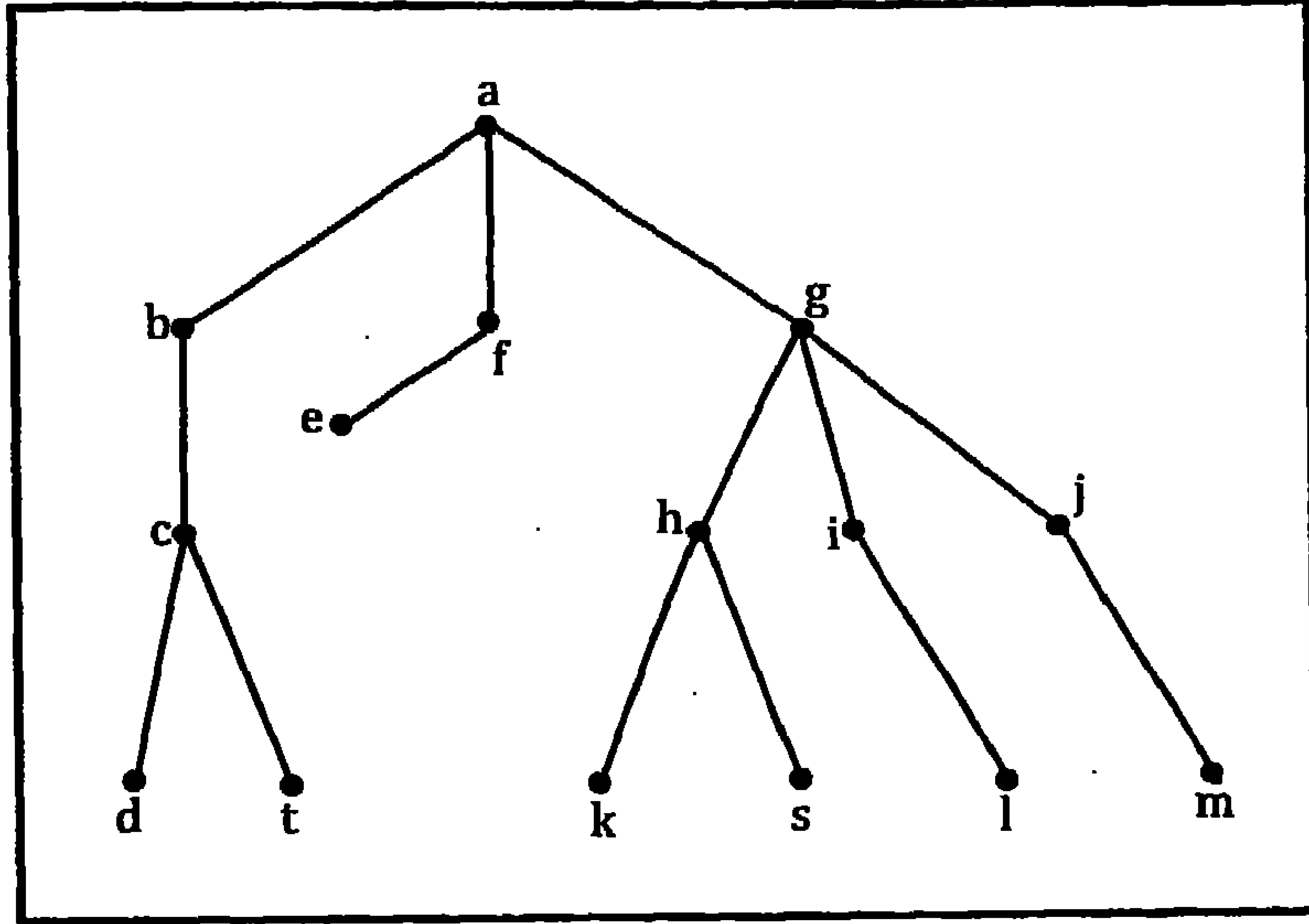
9. إحسب $G_1 \cup G_2$ و $G_1 \cap G_2$ للمخططتين G_1, G_2 التالين :



10. إحسب $G_1 \cup G_2$ و $G_1 \cap G_2$ للمخططتين G_1, G_2 التالين :



11. في الشجرة ذات الجذر التالية:



عين:

- جذر الشجرة.
- أوراق الشجرة.
- الرؤوس الداخلية للشجرة.
- مستوى الرؤوس {a, b, f, g, h, i, j, d, t } .
- إرتفاع الشجرة.
- رأس تابع مباشر للرأس h .
- و رأس سابق مباشر للرأس k .
- إبن للرأس b .
- أب للرأس s .
- أبناء الرأس g.
- أحفاد الرأس g.
- سلف الرأس d.
- الشجرة الجزئية التي لها الجذر g .

12. إرسم شجرة ثنائية منتظمة لها 21 رأس بحيث يكون إرتفاع الشجرة أقل ما يمكن.

13. إرسم شجرة ثنائية منتظمة لها 21 رأس بحيث يكون إرتفاع الشجرة أقل ما يمكن.

14. إذا كانت $T=(V, E)$ شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد 14 رؤوس داخلية فإحسب :

- عدد رؤوس الشجرة T .
- عدد أوراق الشجرة T .

15. إذا كانت $T=(V, E)$ شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد رؤوس T هي 15 رأس فإحسب :

- عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T.
- عدد أوراق الشجرة T .

16. إذا كانت $T=(V, E)$ شجرة ثنائية منتظمة ولها عدد 17 من الرؤوس المعلقة (الأوراق) فإحسب :

- عدد رؤوس الشجرة T .
- عدد الرؤوس الداخلية للشجرة T.

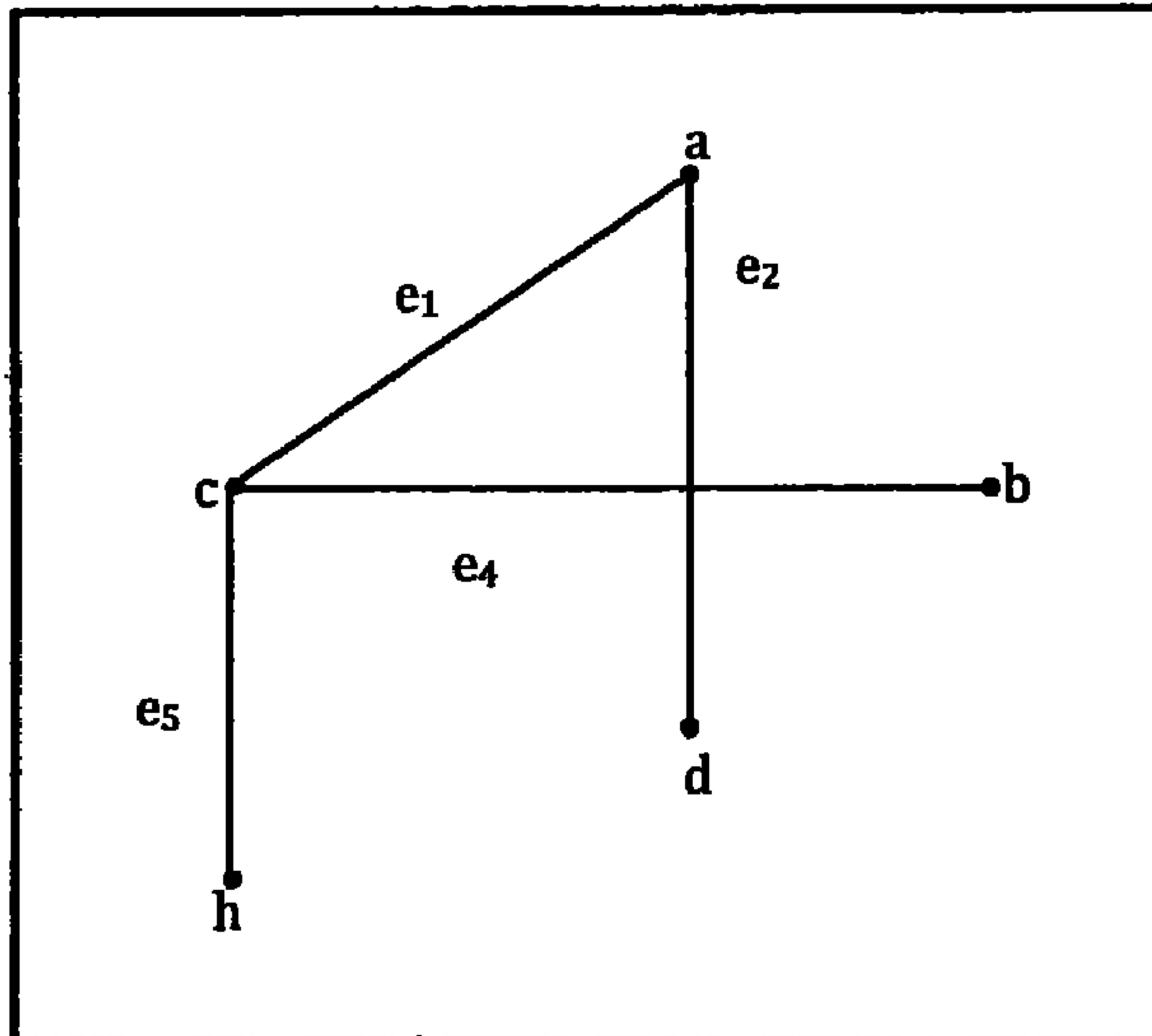
17. ليكن لدينا المخطط $G=(V, E)$

حيث : $V = \{a, b, c, d\}$ و $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

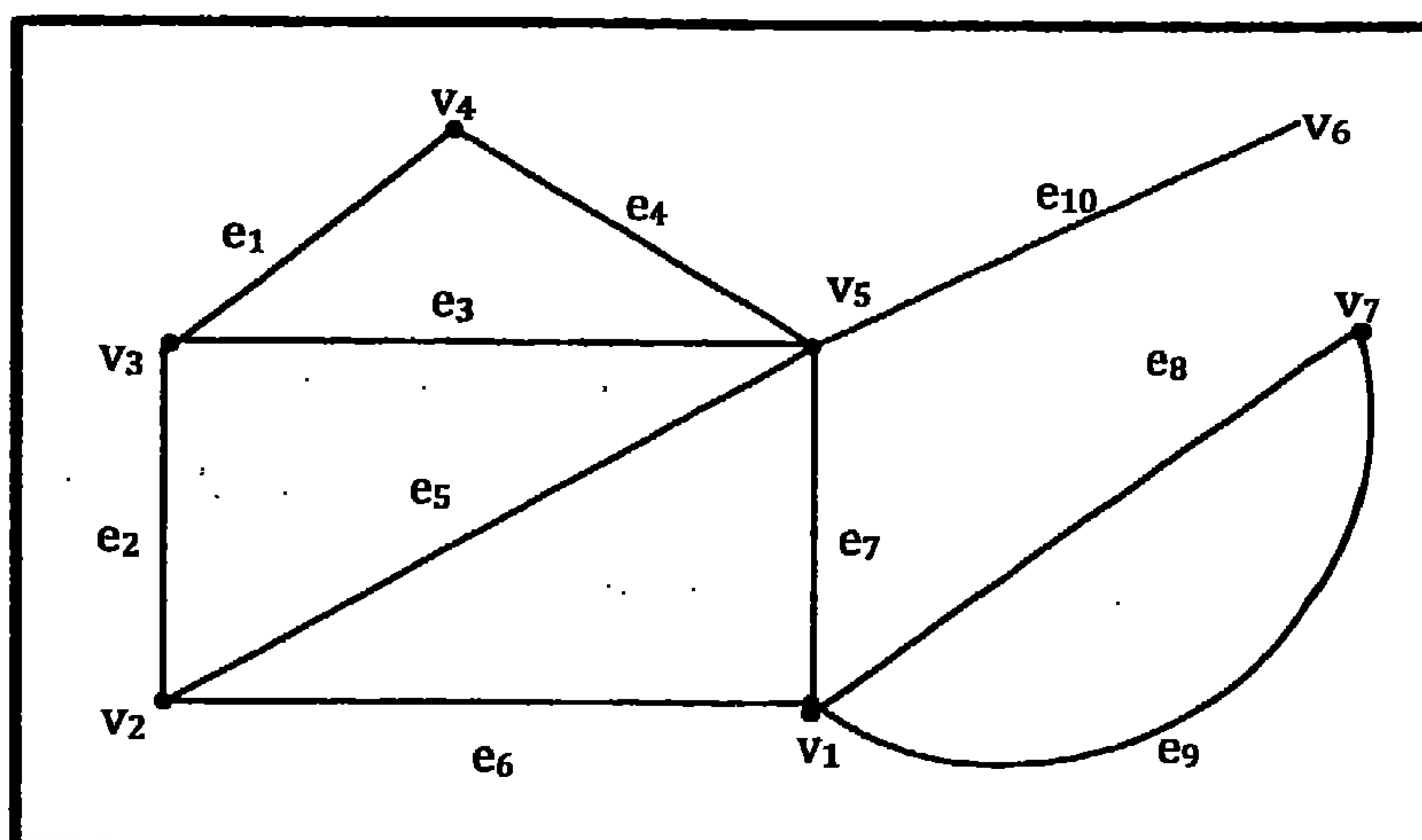
E	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
f(e)	[a, b]	[a, c]	[a, d]	[b, b]	[c, d]	[d, b]

إرسم مخطط هذا الجدول.

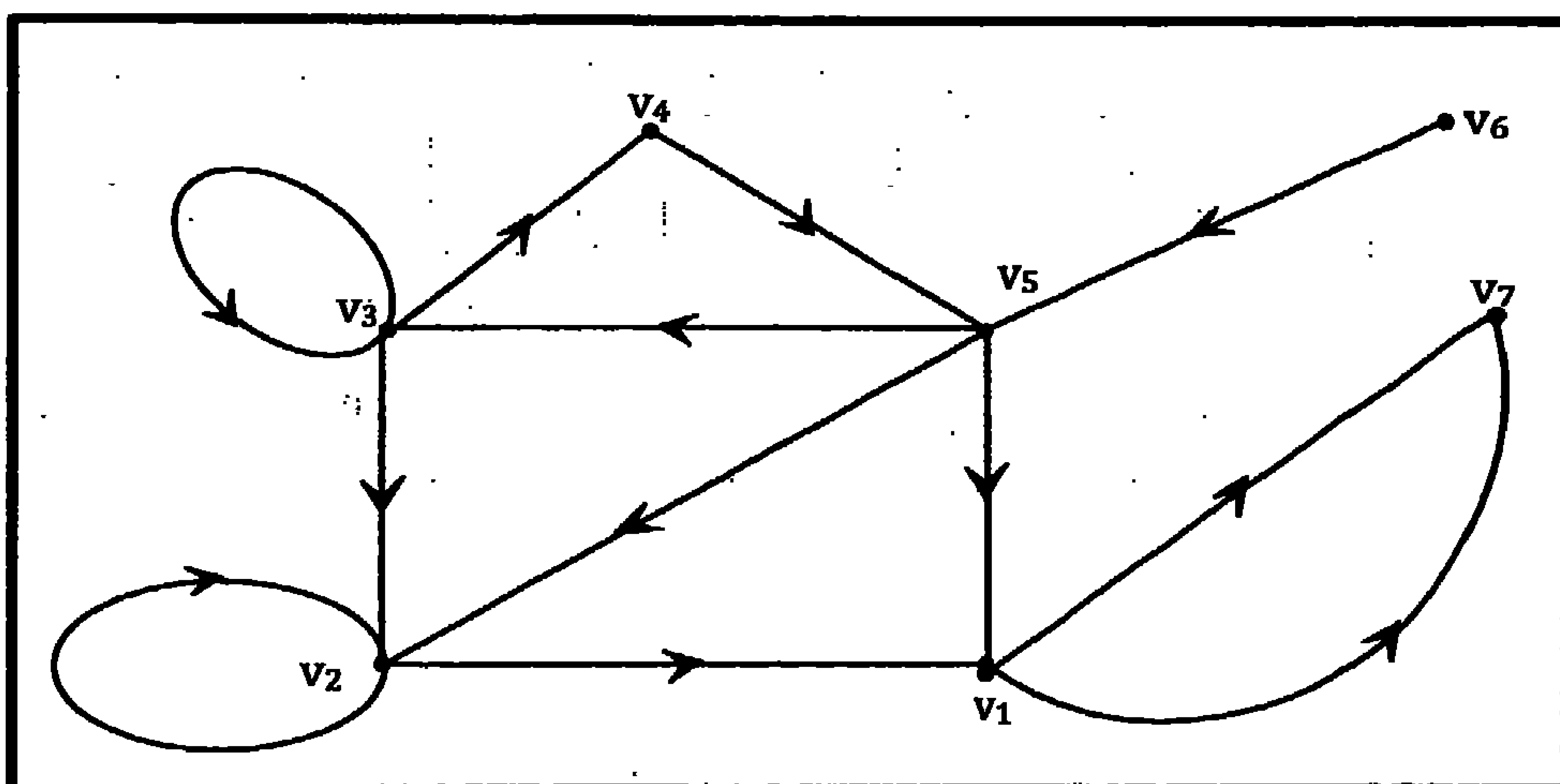
18. أوصف المخطط التالي بإستخدام الجدول ثم إحسب درجات رؤوس المخطط:



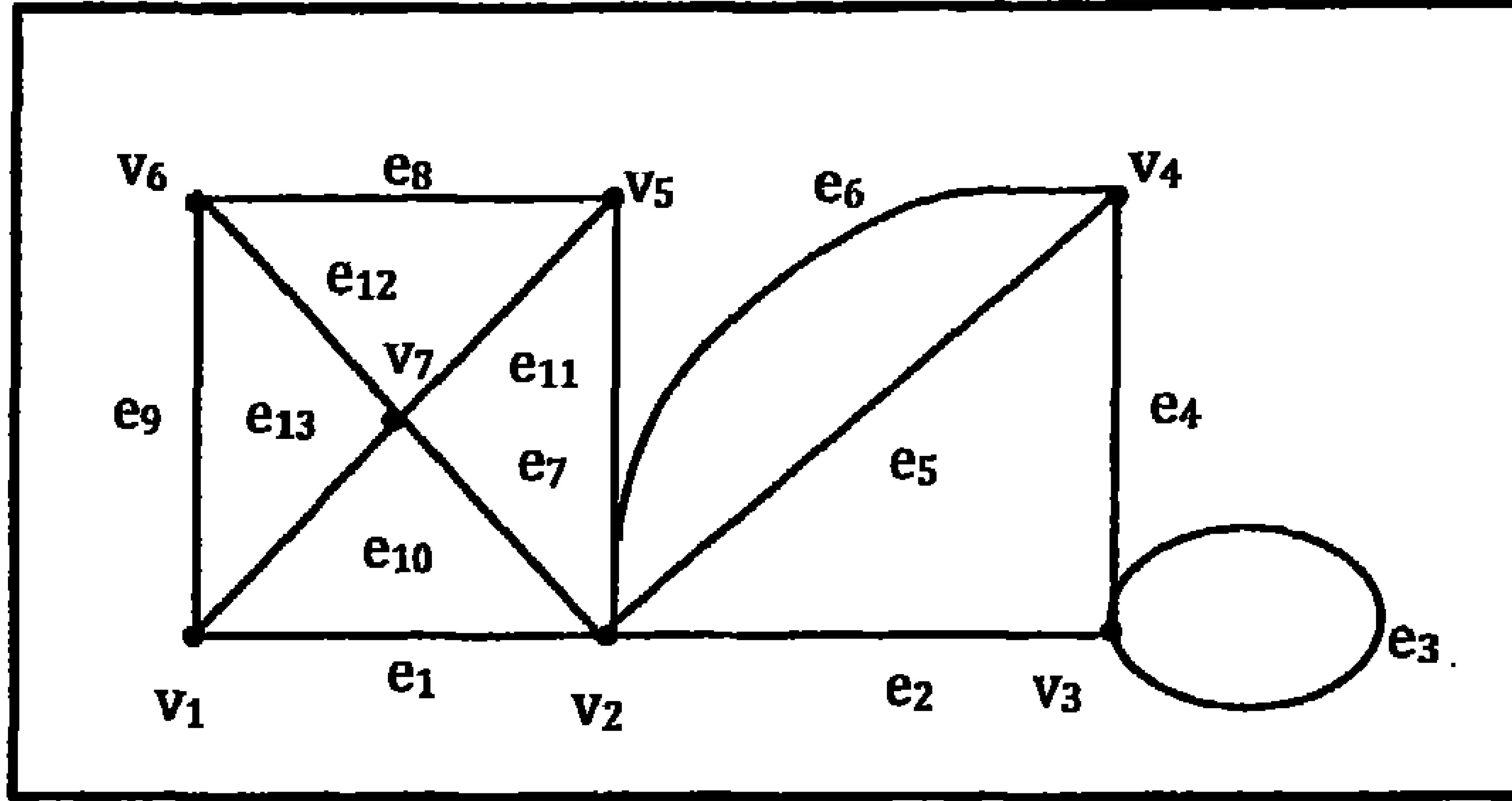
19. أوصف المخطط التالي بإستخدام الجدول ثم إحسب درجات رؤوس المخطط:



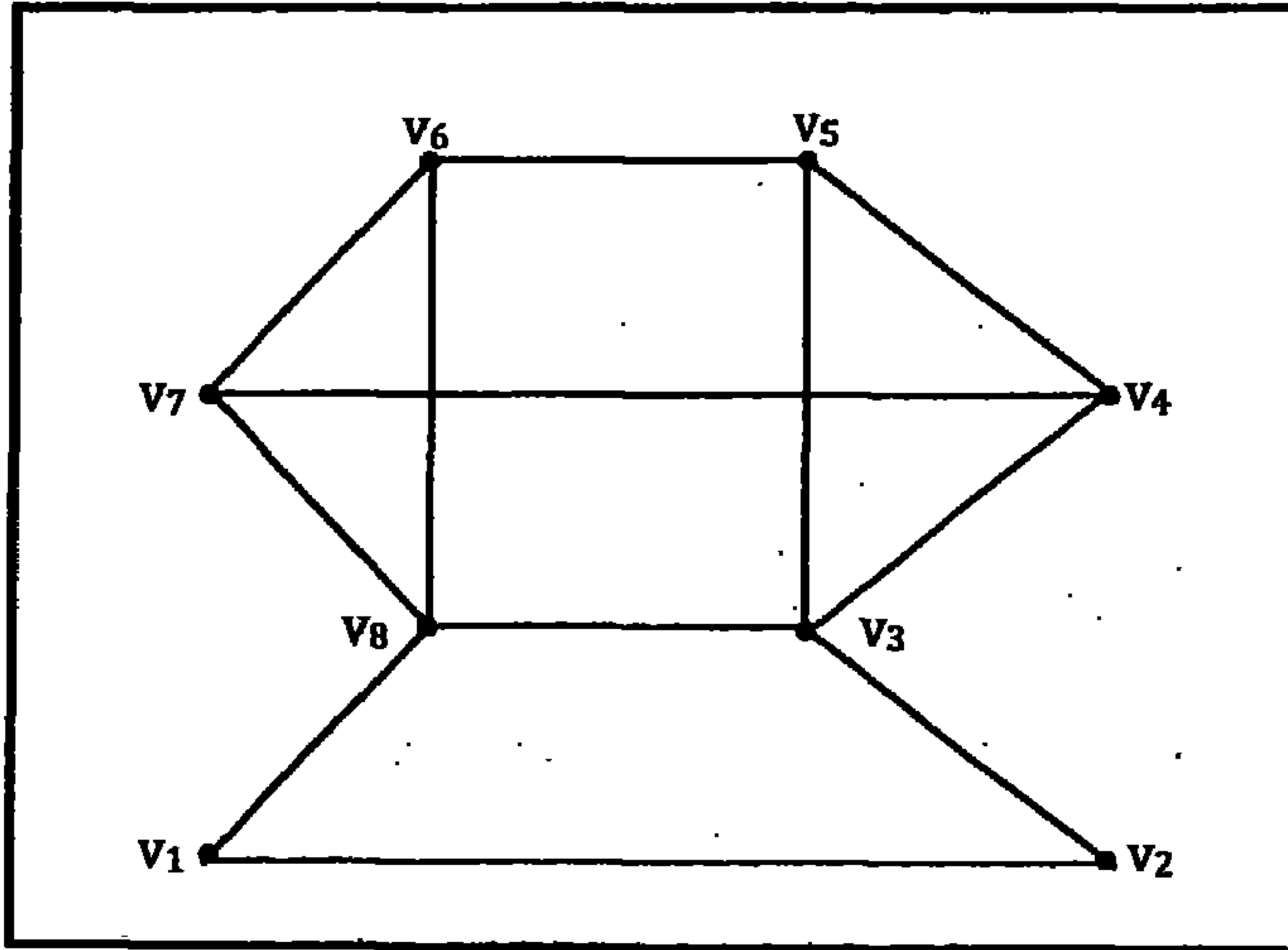
20. إحسب درجات المخطط التالي:



21. إحسب درجات المخطط التالي:



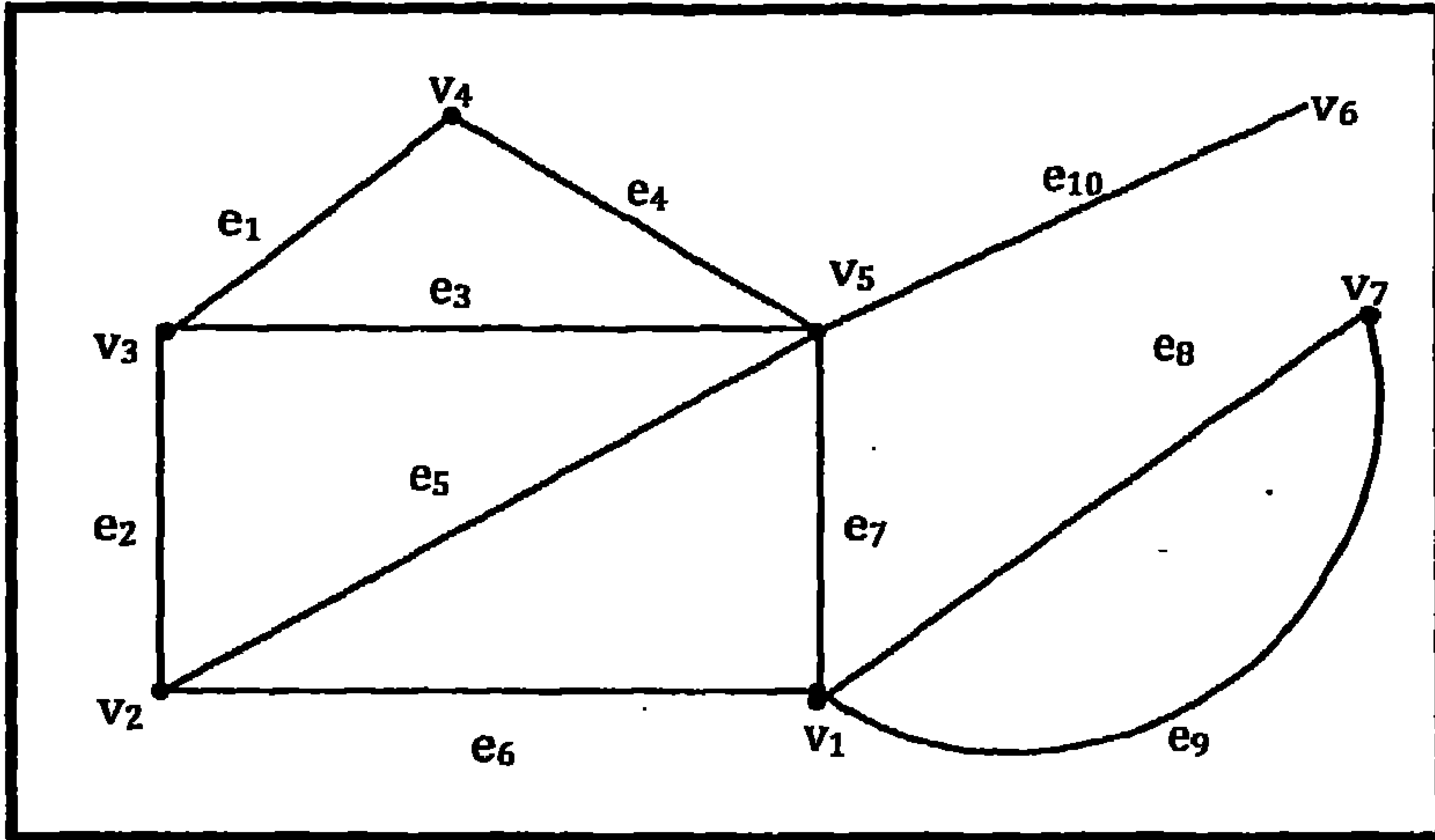
22. إحسب درجات الرؤوس للمخطط التالي ثم علق على النتائج.

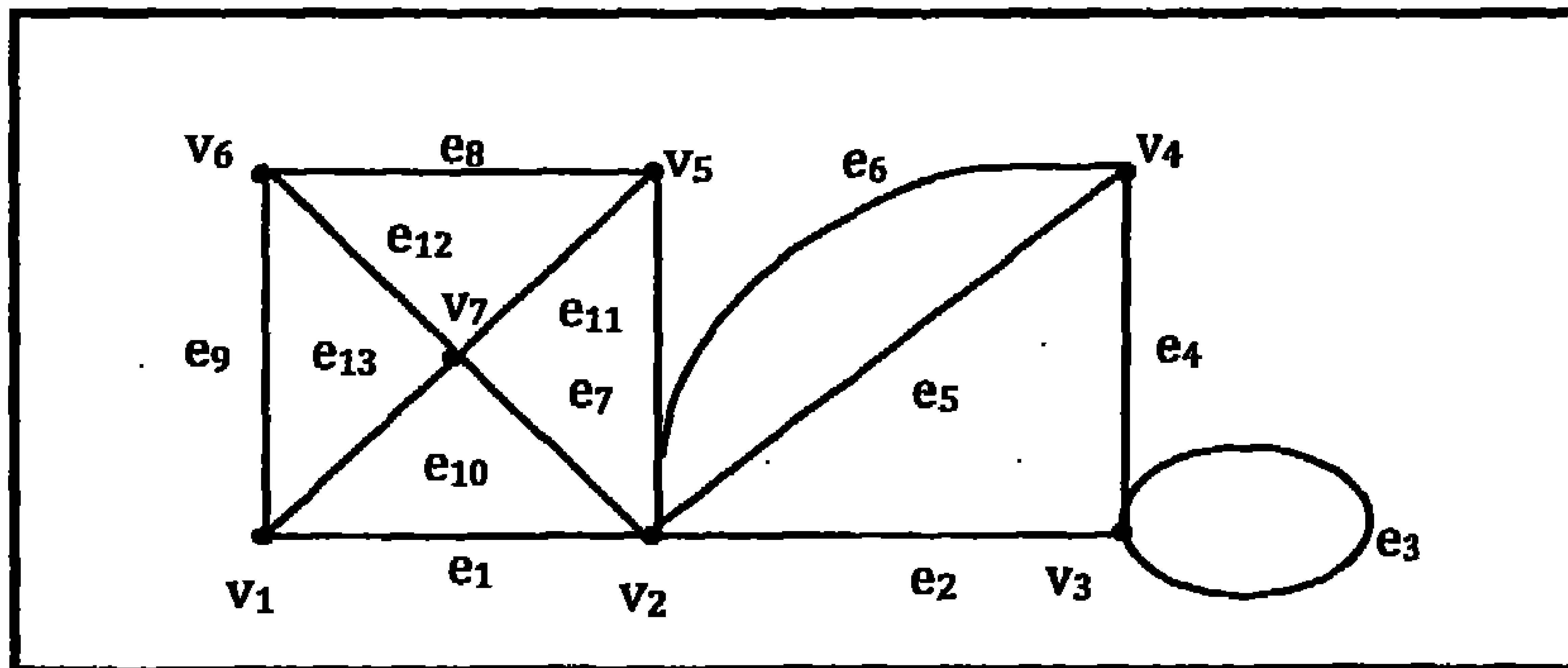


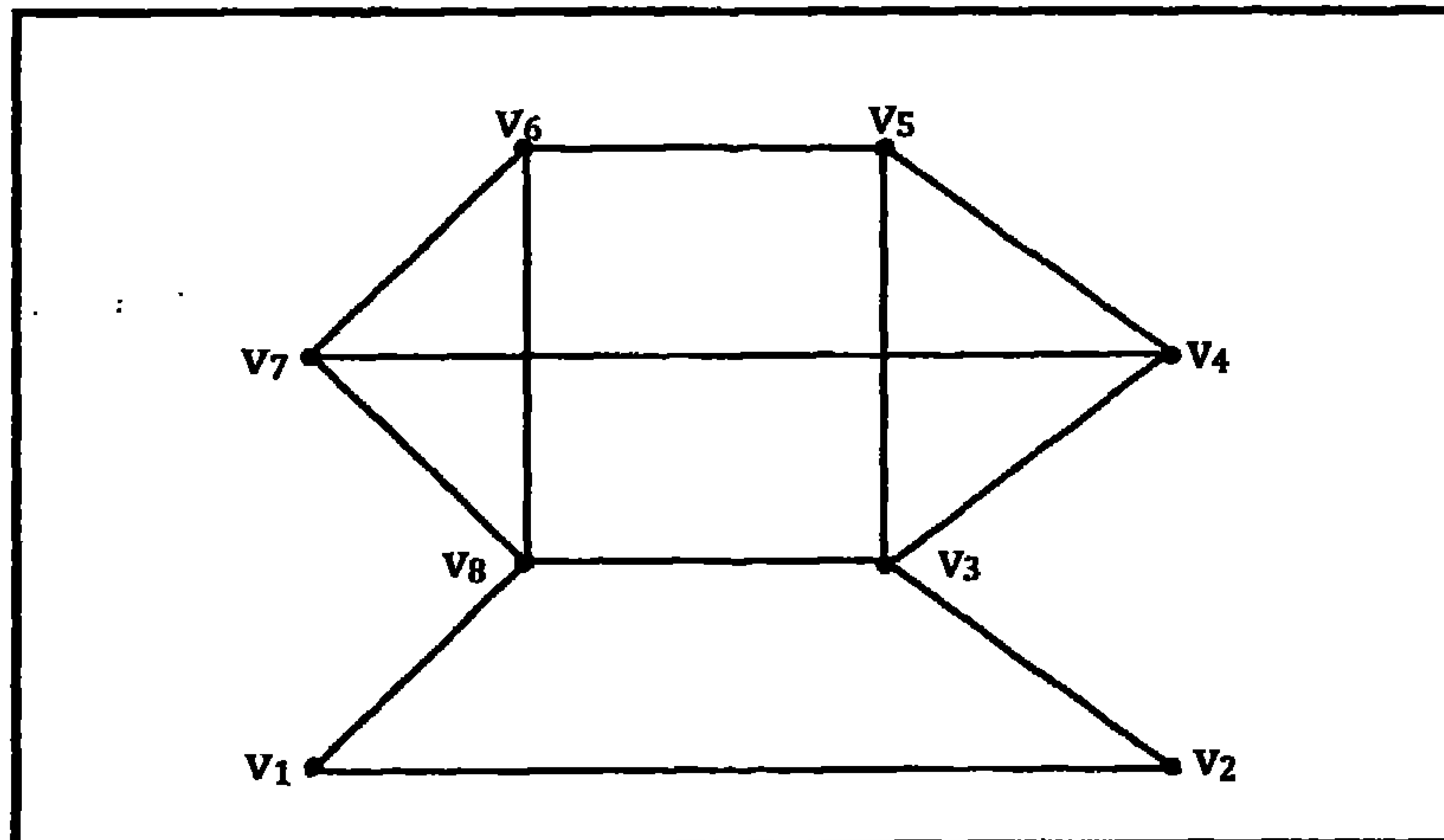
23. هل يوجد مخطط بحيث تكون درجات رؤوسه هي : 6 , 2 , 5 , 1 , 3 , 2 , 3 وإذا كانت الإجابة نعم فارسم المخطط.

24. هل يوجد مخطط بحيث تكون درجات رؤوسه هي : 5 , 2 , 5 , 1 , 3 , 2 , 3 وإذا كانت الإجابة نعم فارسم المخطط.

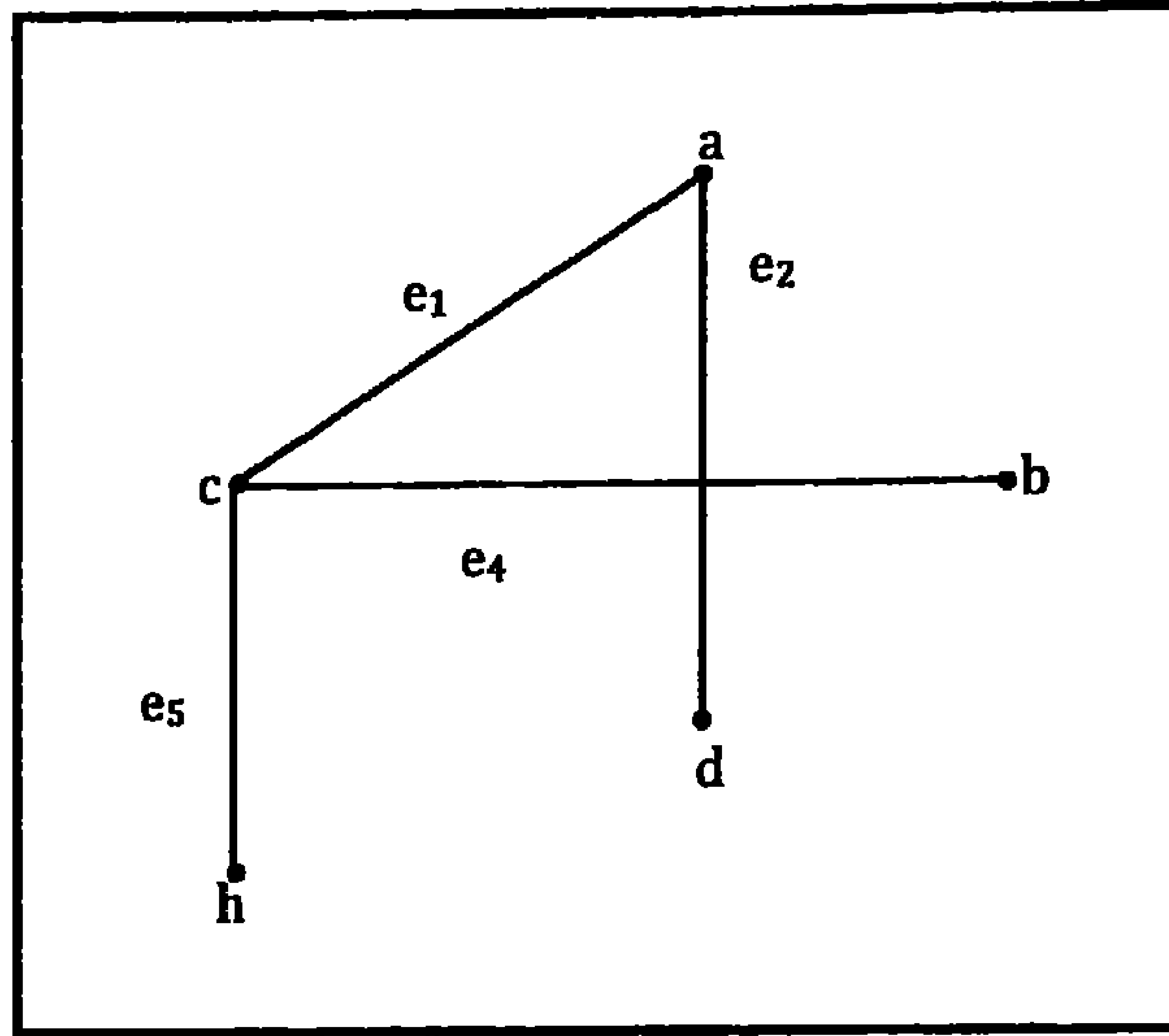
25. إحسب معامل إرتباط الرؤوس و معامل إرتباط الأضلاع في المخطط التالي:

- 

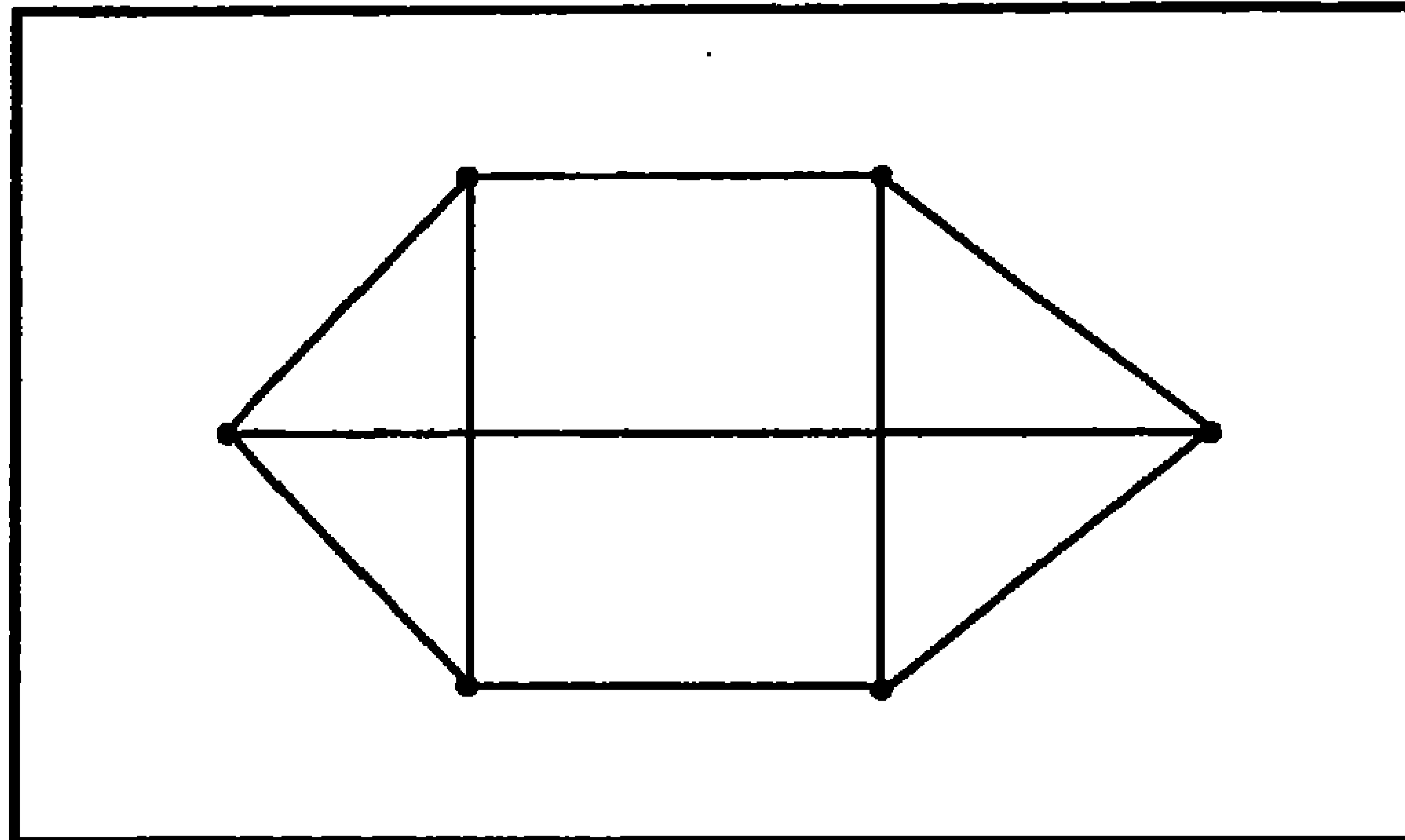
- 

- 

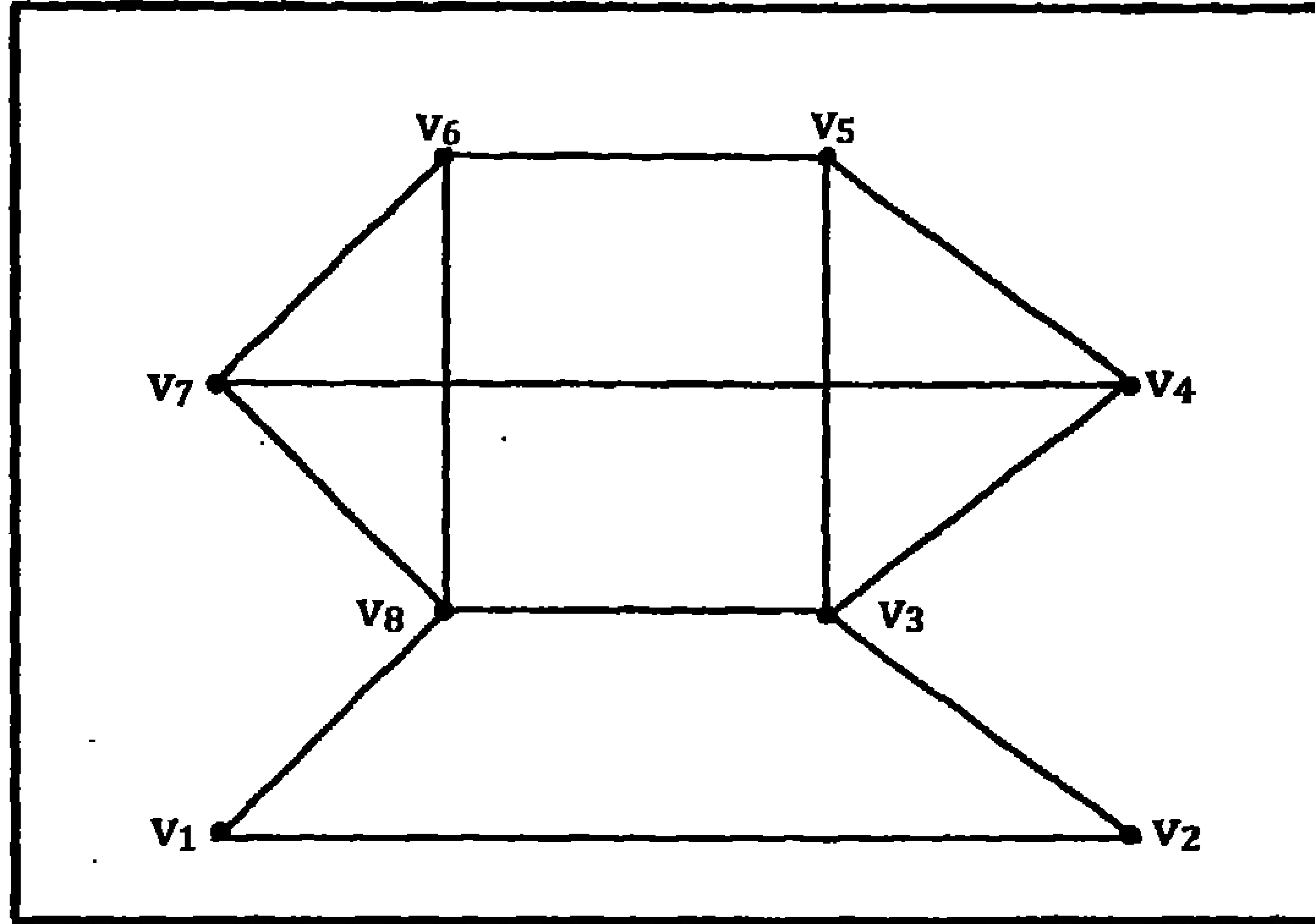
26. إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



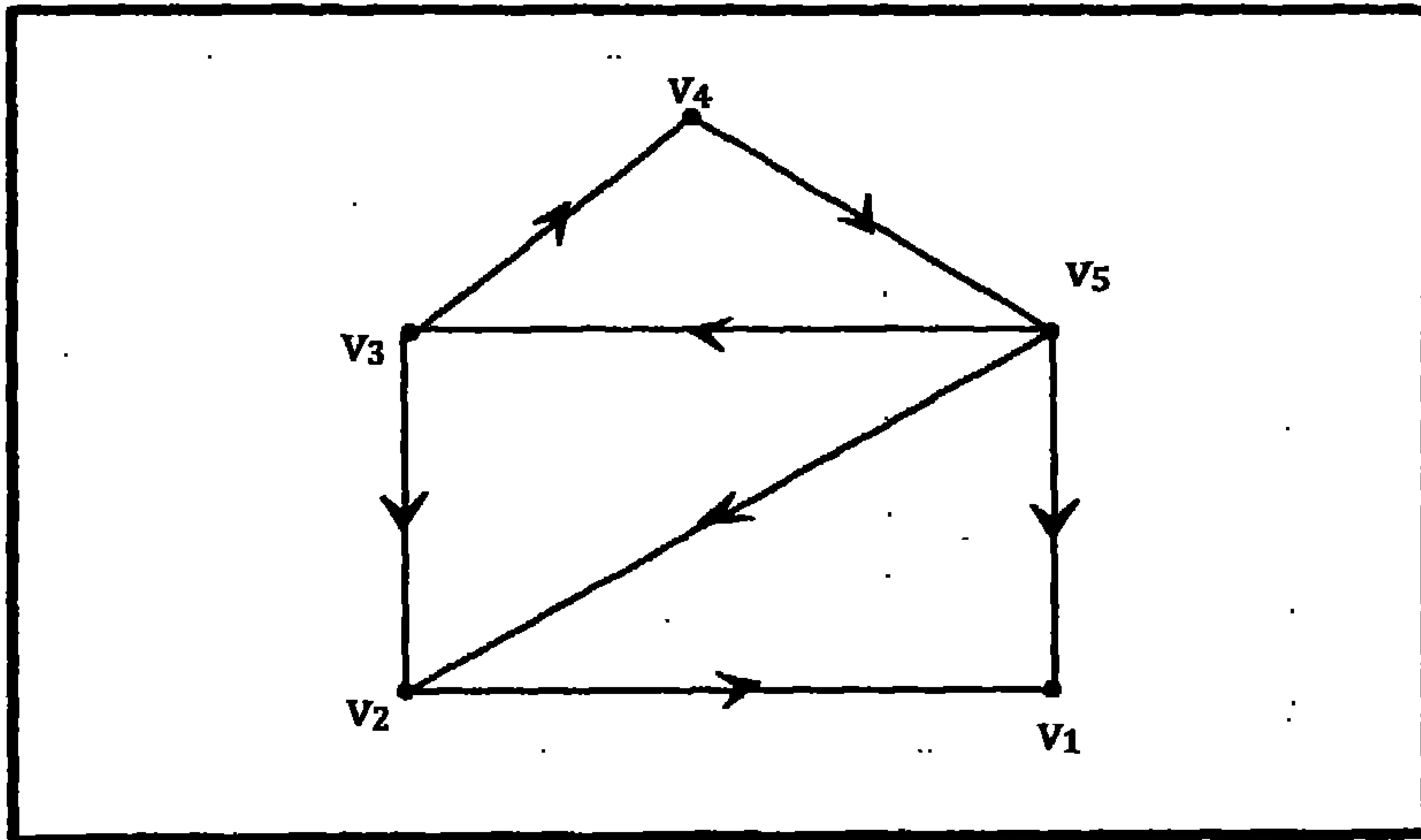
27. إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



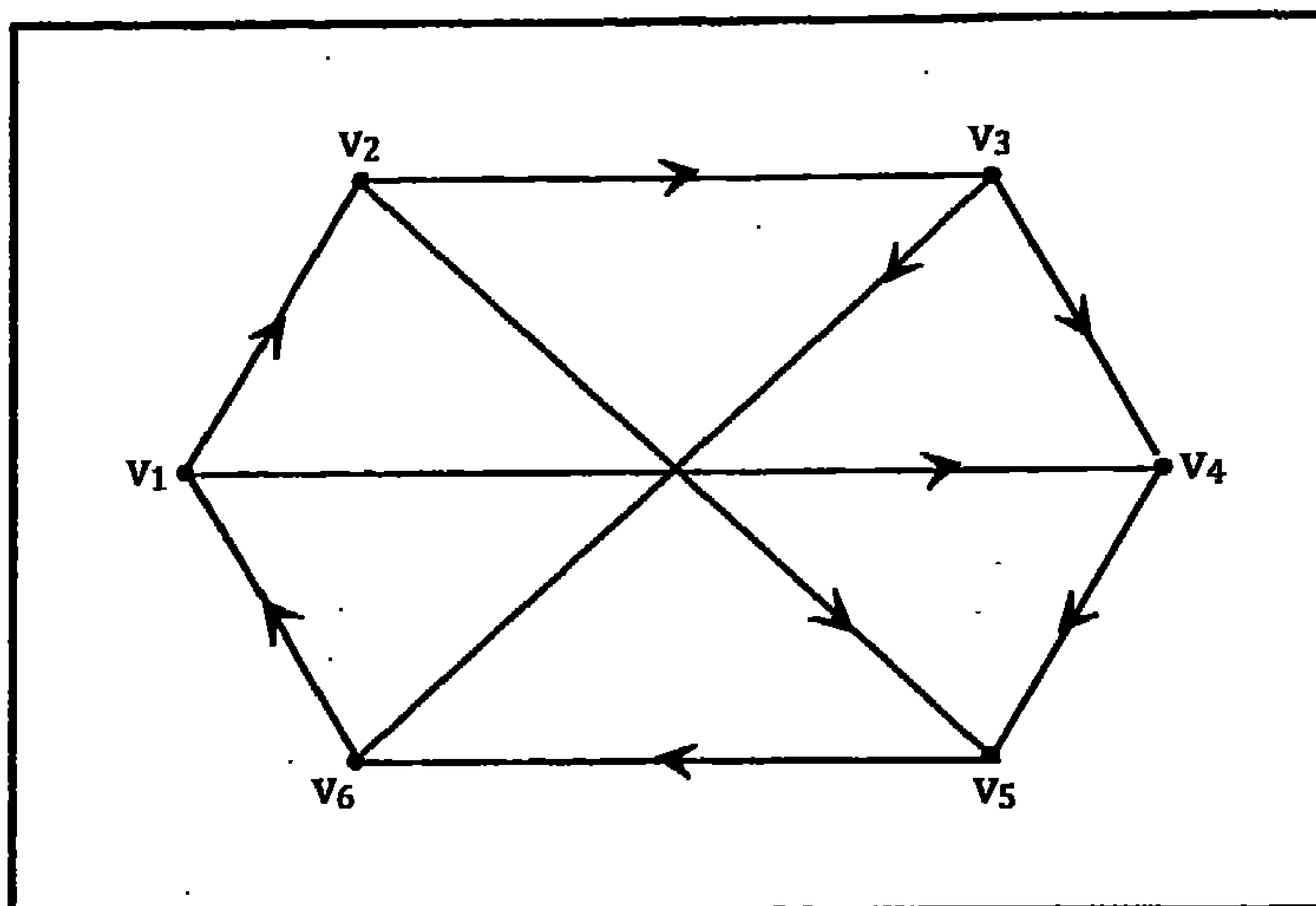
28. إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



29. إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:

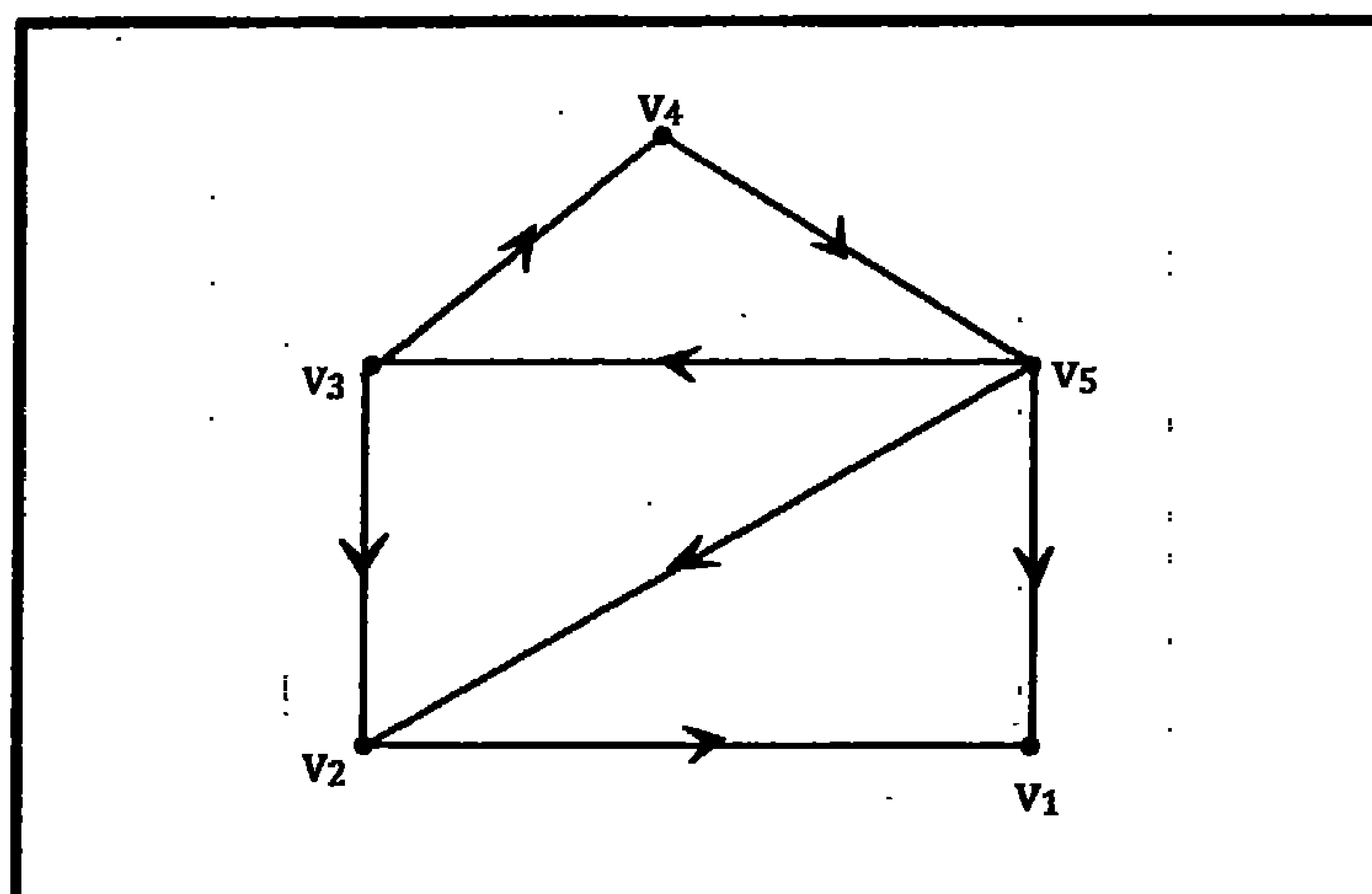


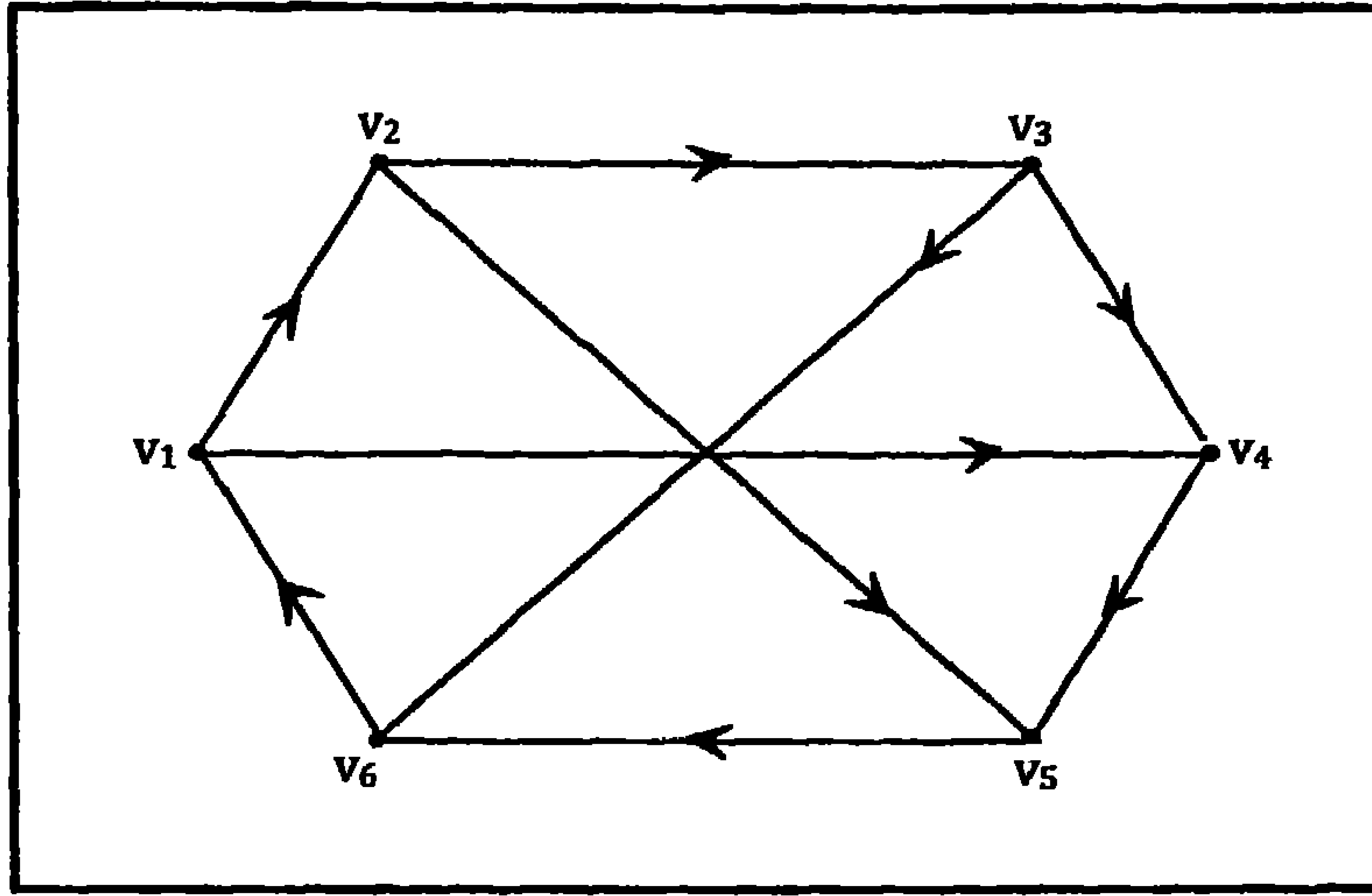
30. إحسب المسافة بين رؤوس المخطط ثم إحسب مركز وقطر و نصف قطر المخطط التالي:



31. هل المخطط التالي يحتوي على:

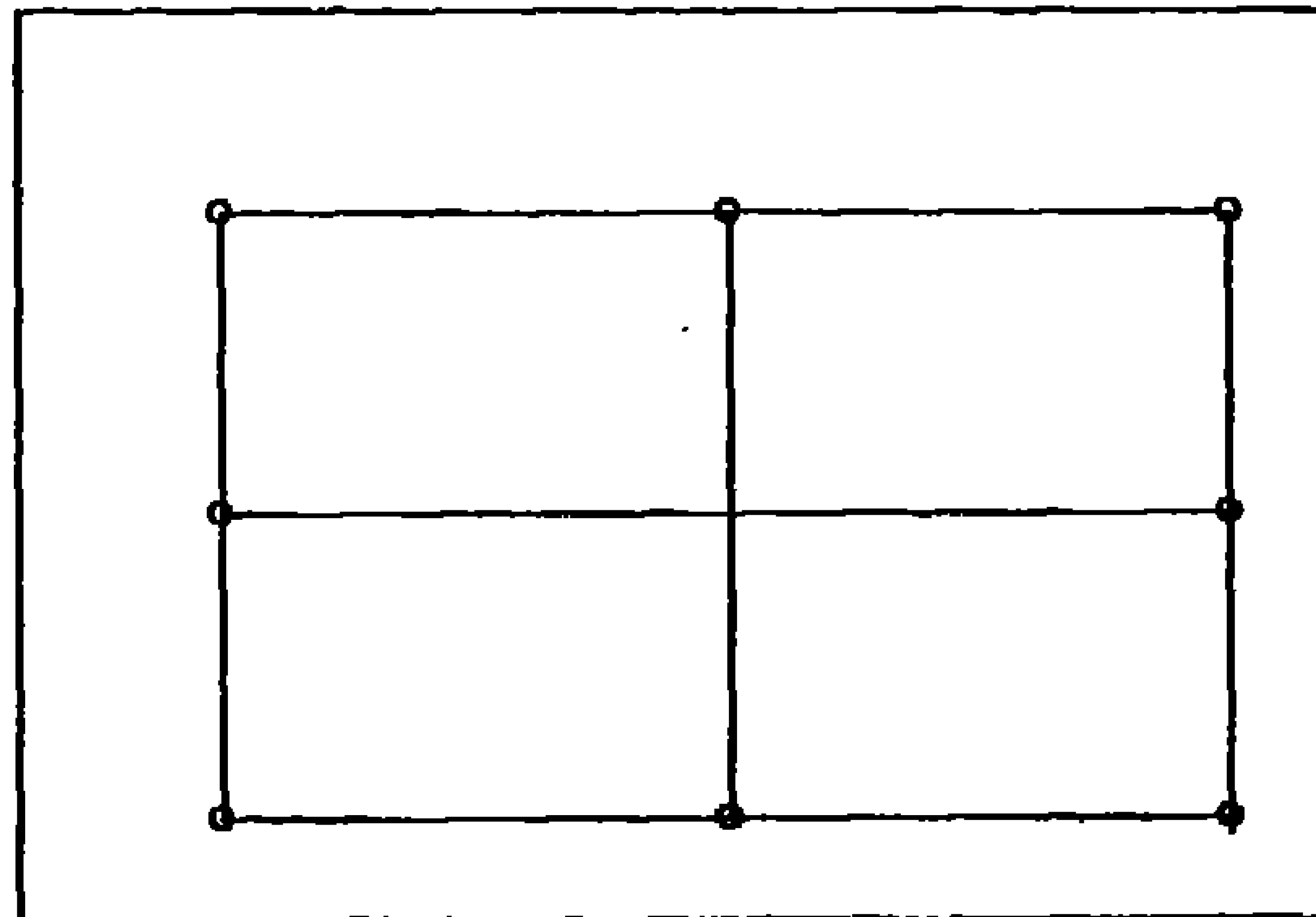
- مسار أويلر؟
- دارة أويلر؟

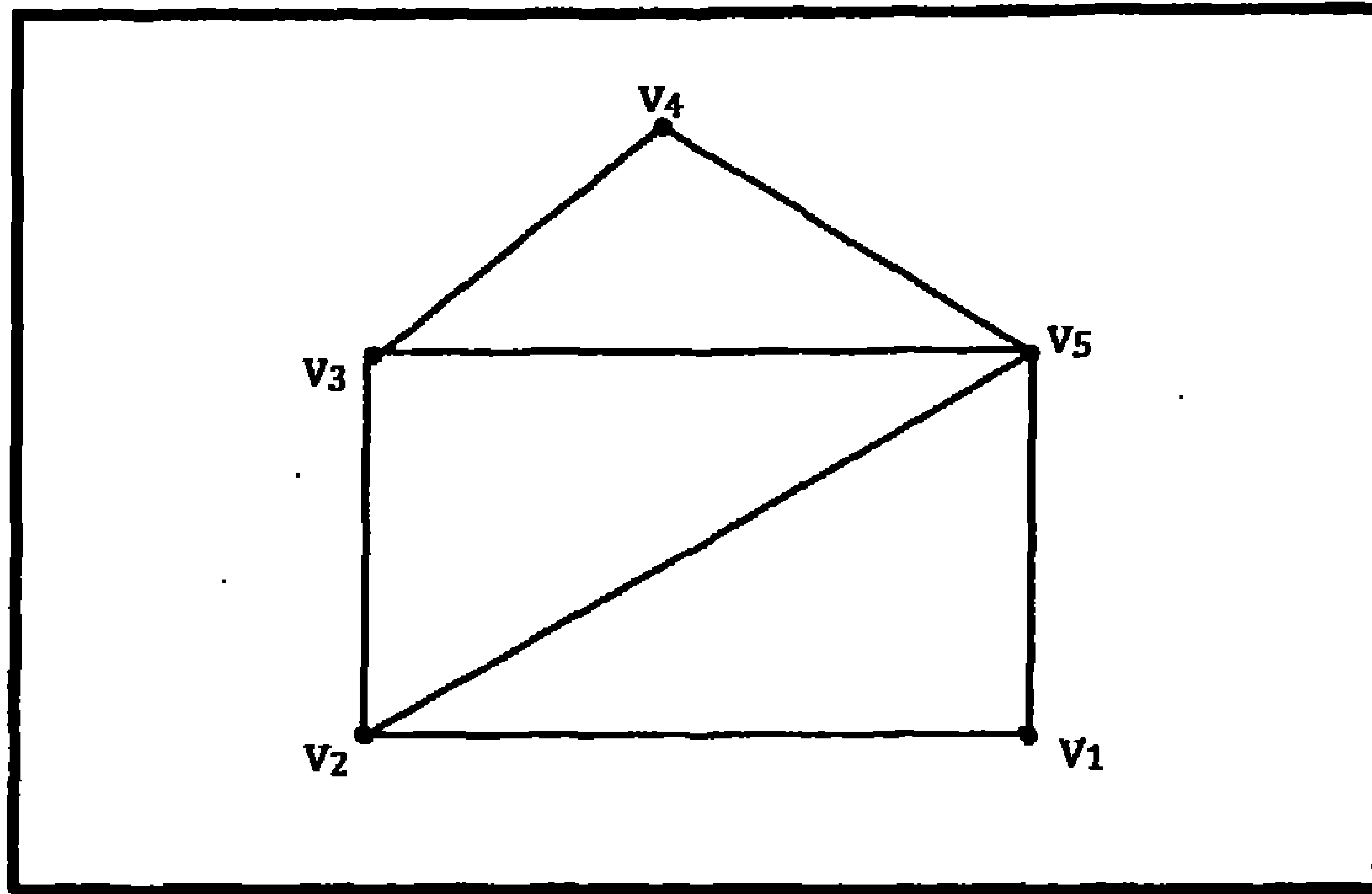


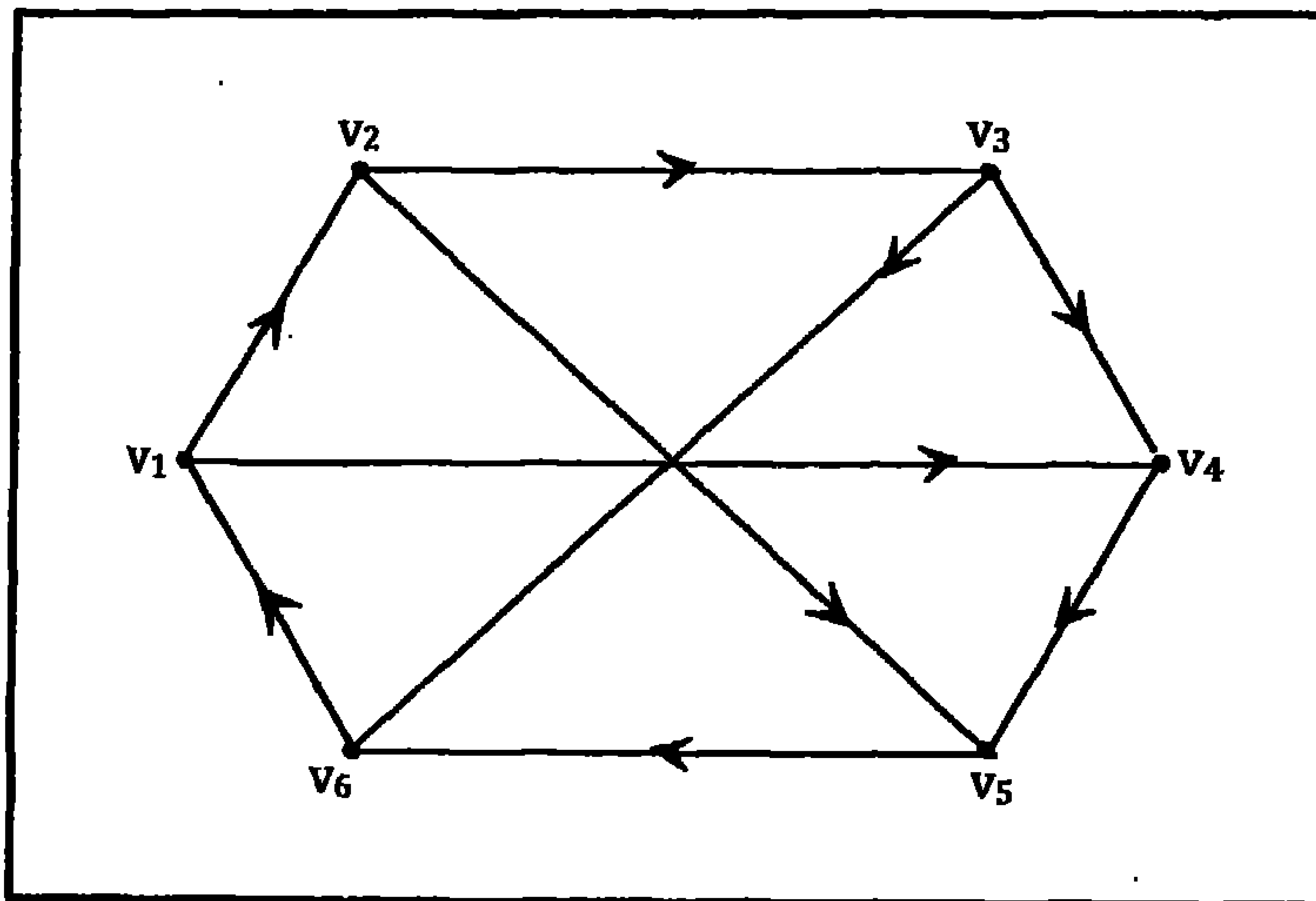


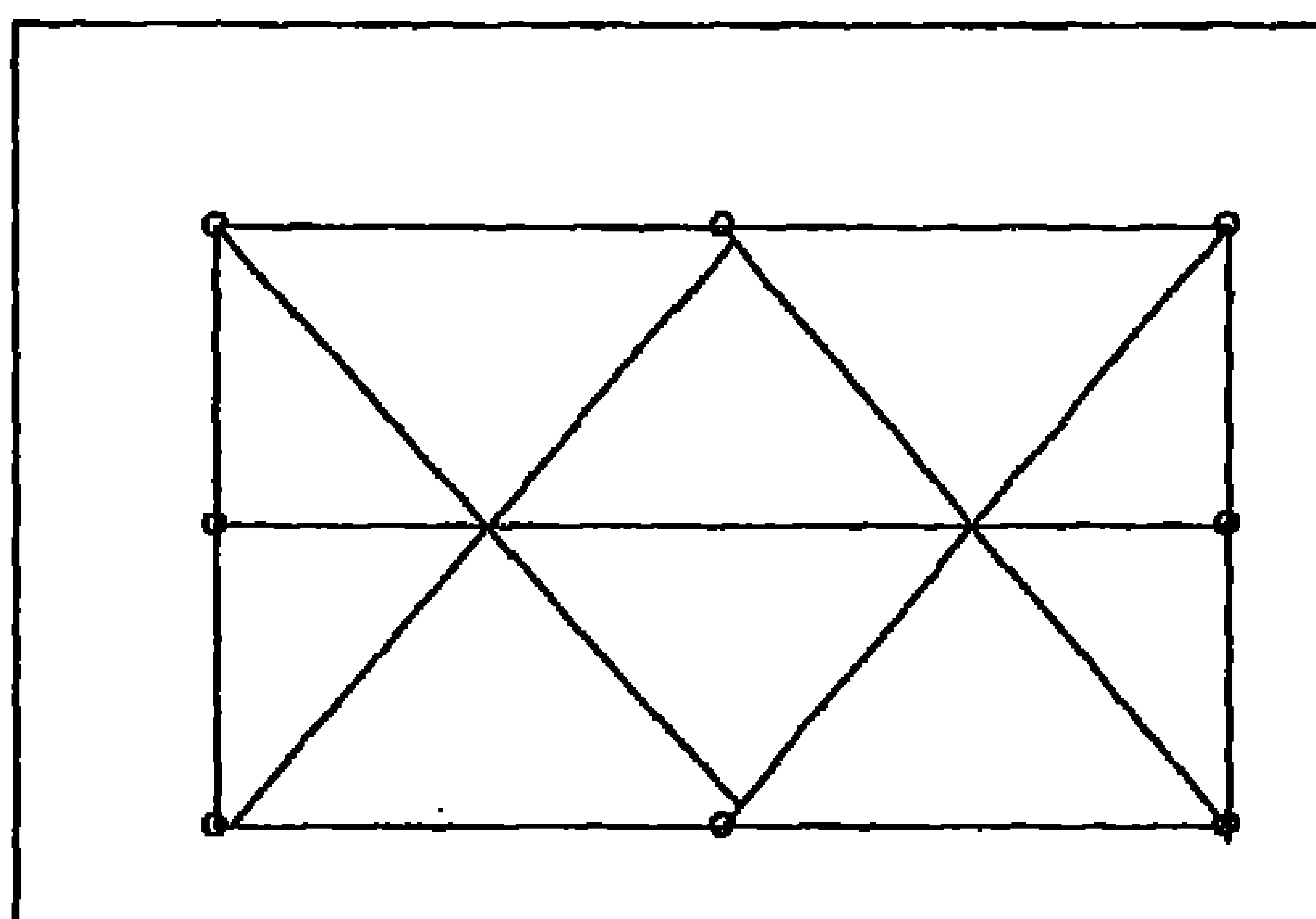
32. هل المخطط التالي يحتوي على:

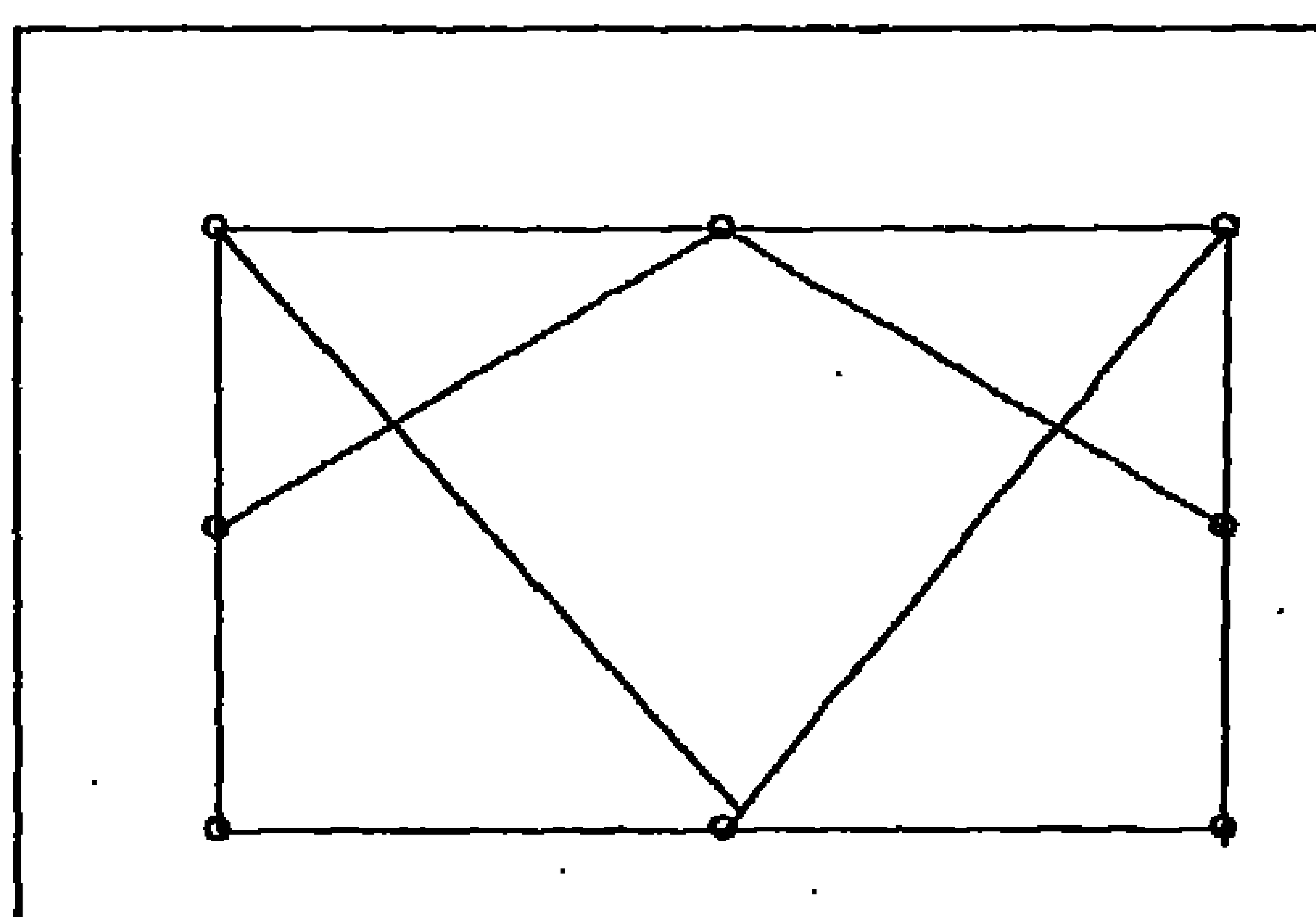
- مسار أويلر؟
- دارة أويلر؟
- مسار هاملتون؟
- دارة هاملتون؟

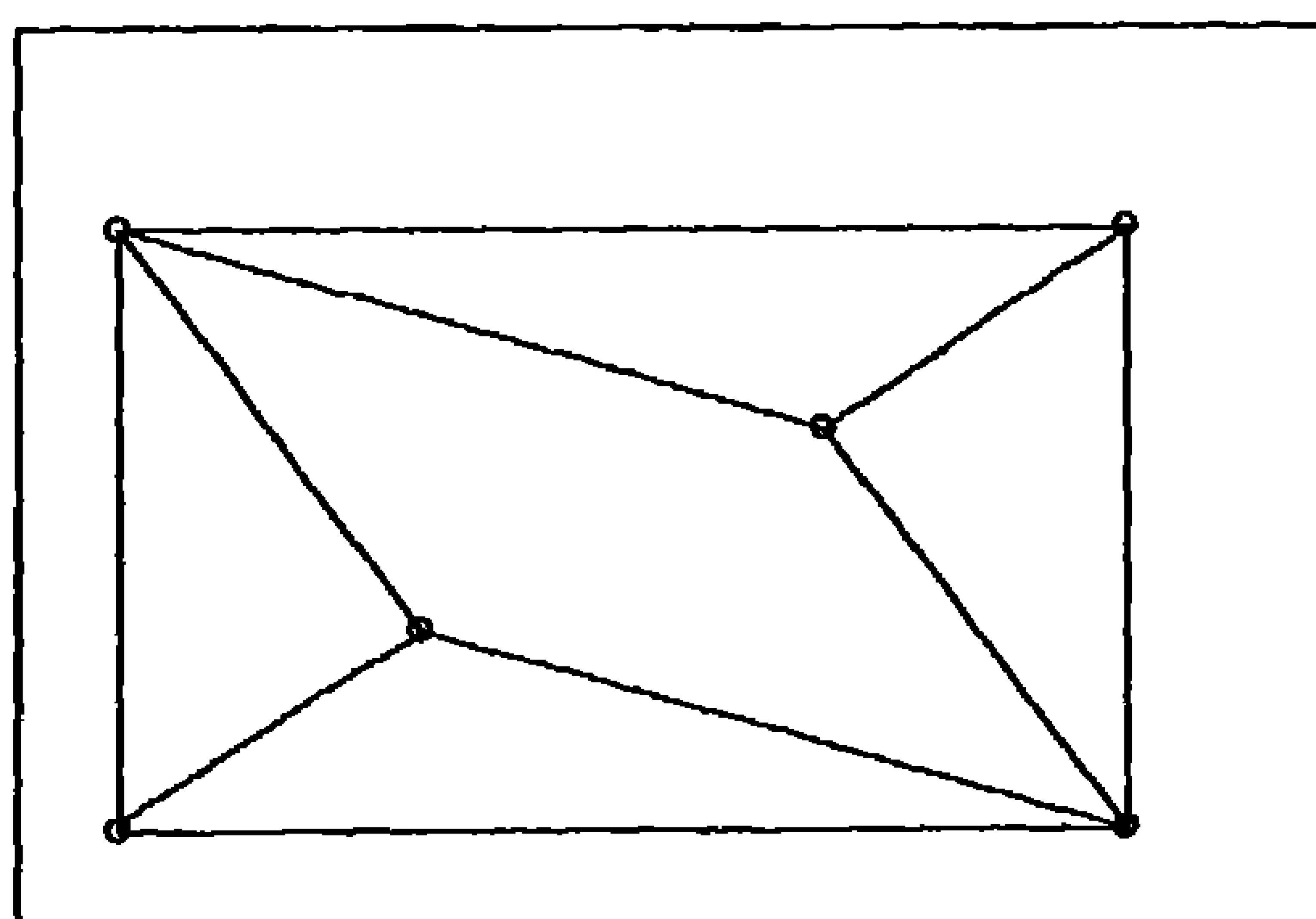



V4
V3
V5
V2
V1


V2
V3
V1
V4
V6
V5





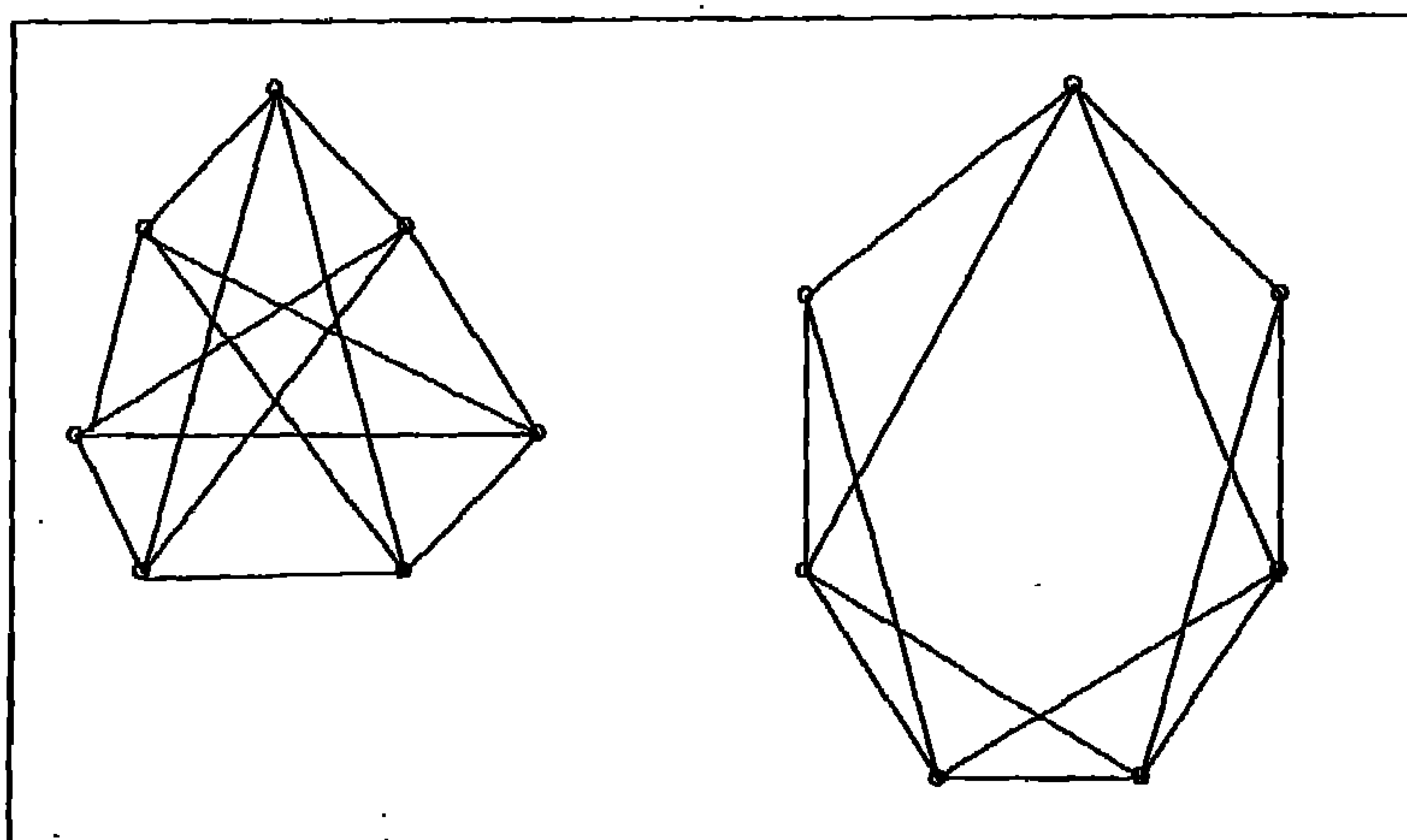


33. هل يمكن ترتيب قطع الدمينو التالية:

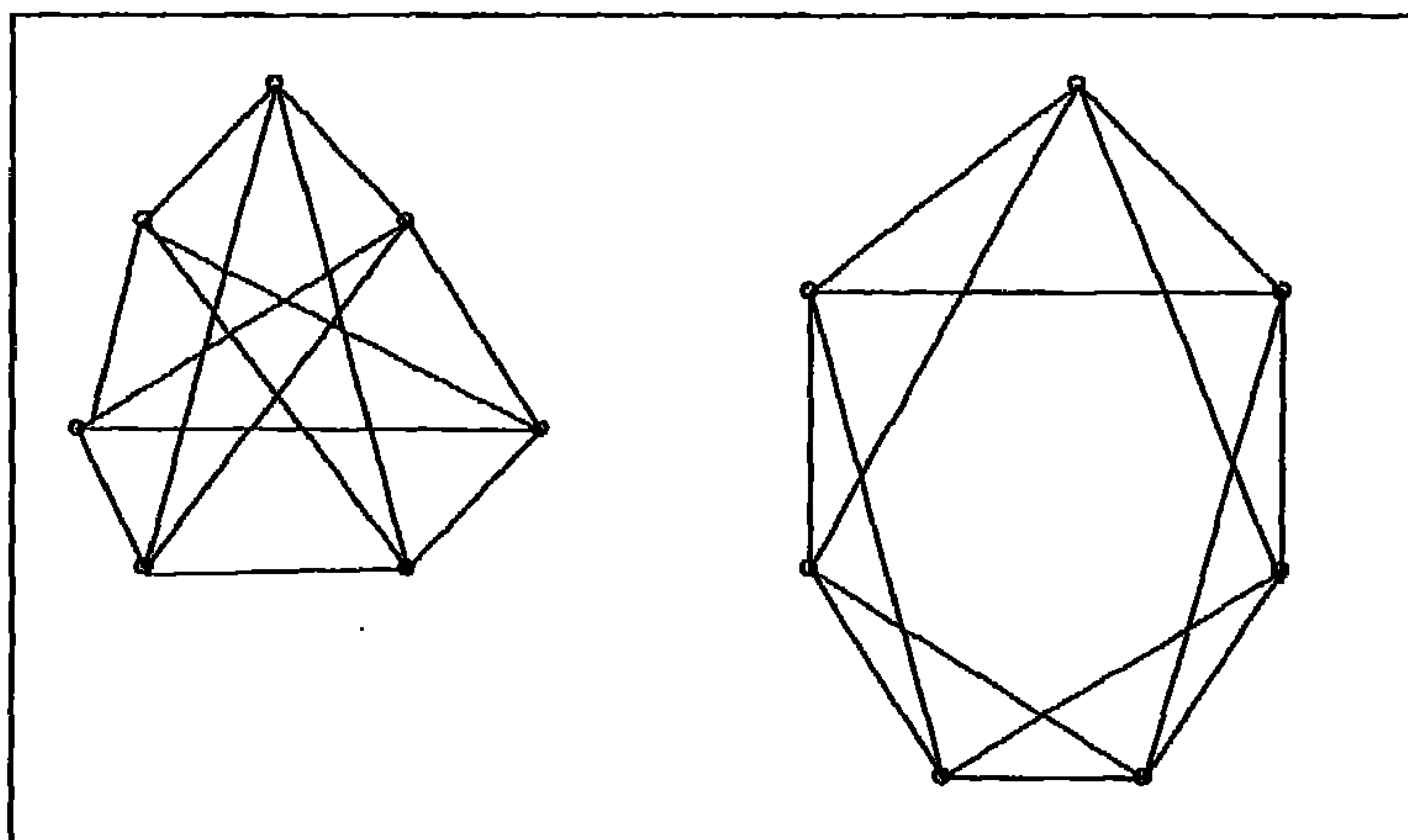
(1, 5), (6, 5), (6, 1), (5, 4), (2, 3), (4, 3), (2, 1), (4, 1), (4, 2)

- على شكل خط مستقيم بحيث يكون نهاية القطعة الأولى يساوي بداية القطعة الثانية التي تلية في الترتيب؟
- على شكل دائرة بحيث يكون نهاية القطعة الأولى يساوي بداية القطعة الثانية التي تلية في الترتيب؟

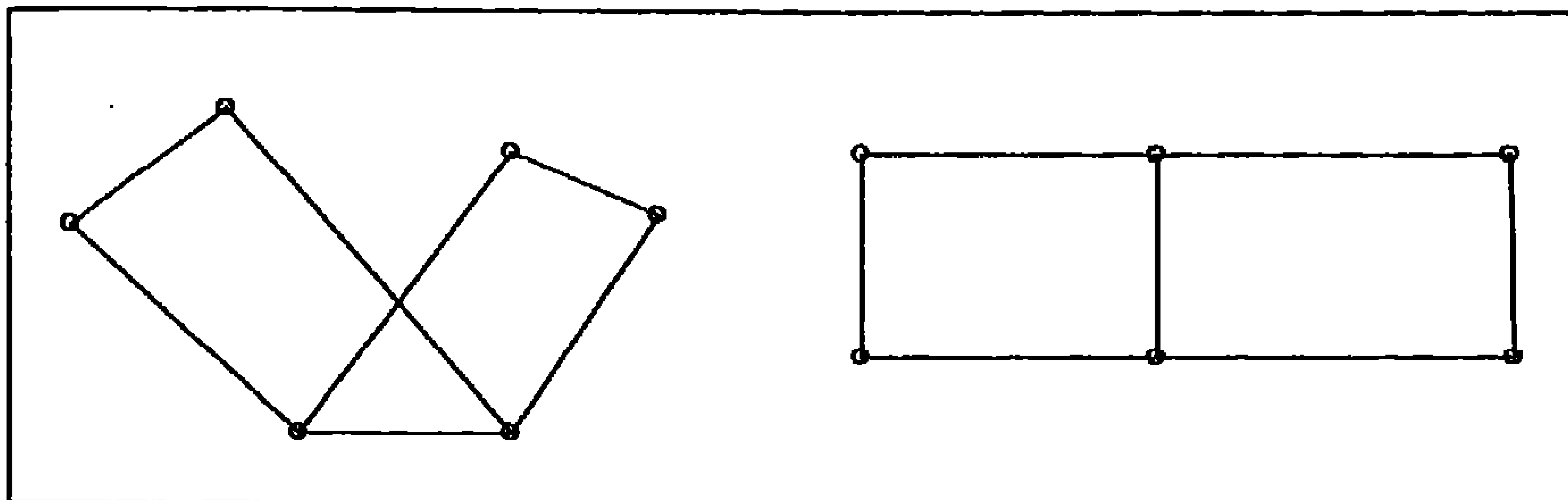
34. برهن أن المخططين التالين غير متشاكلين:



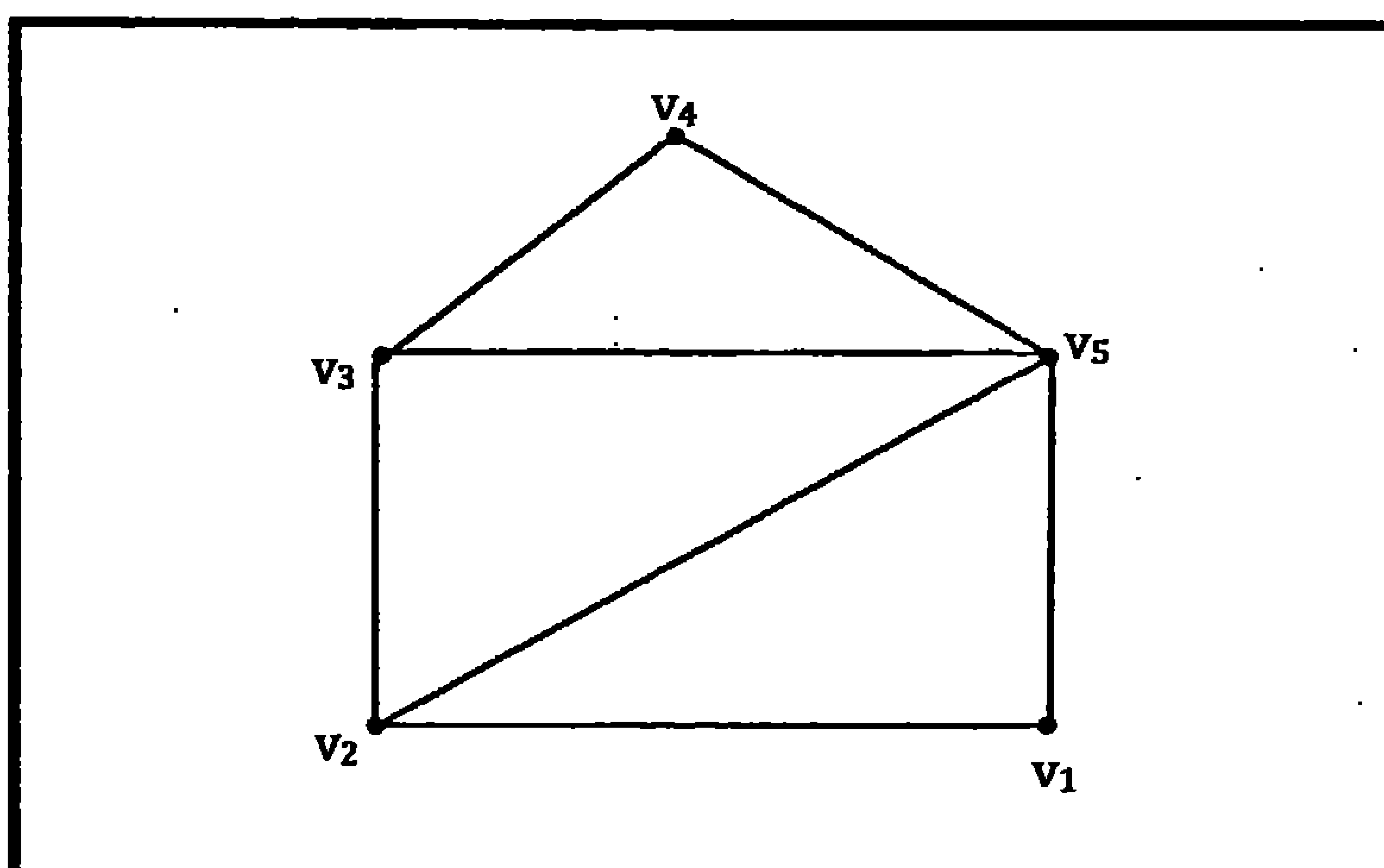
35. برهن أن المخططين التالين متشاكلين:

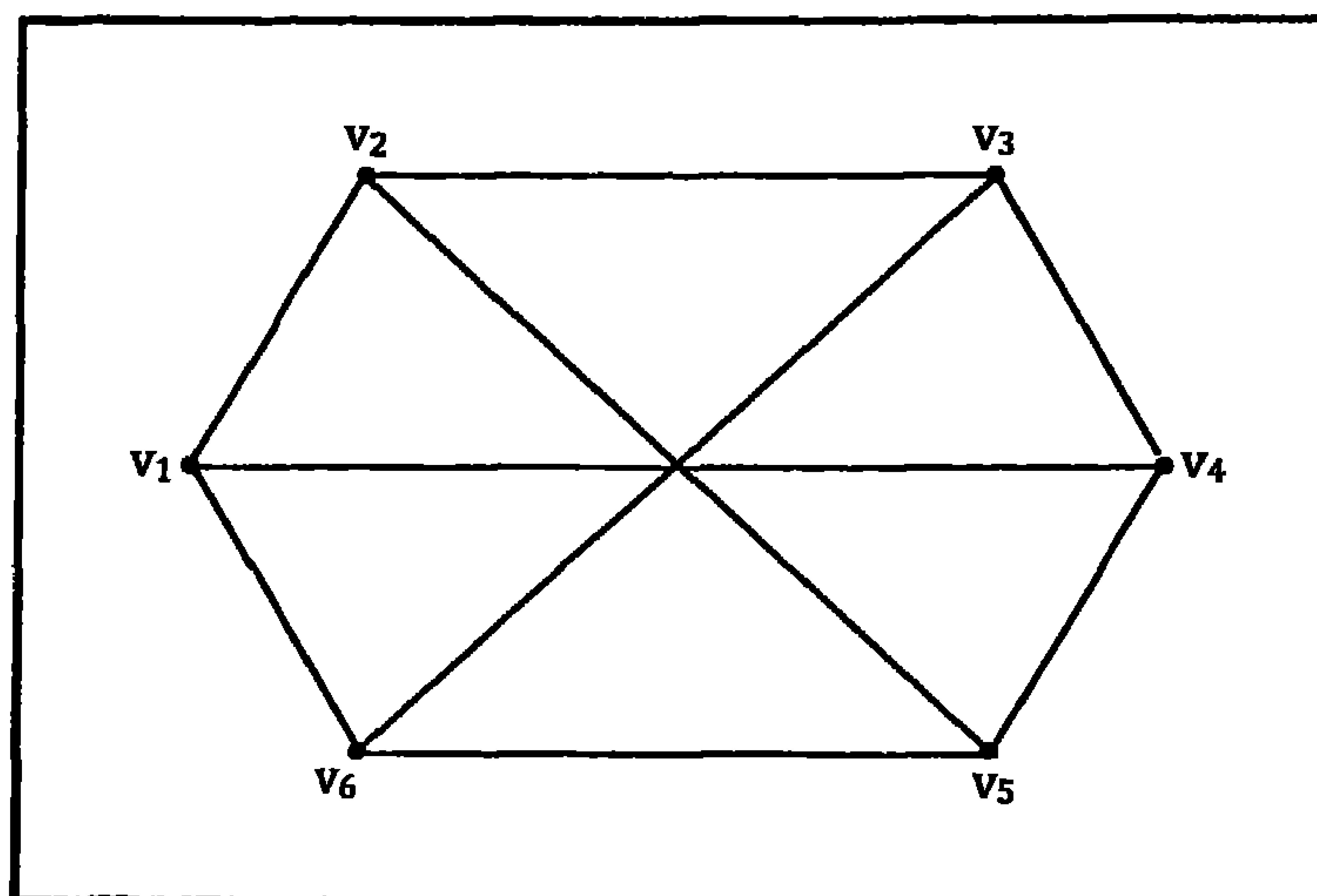


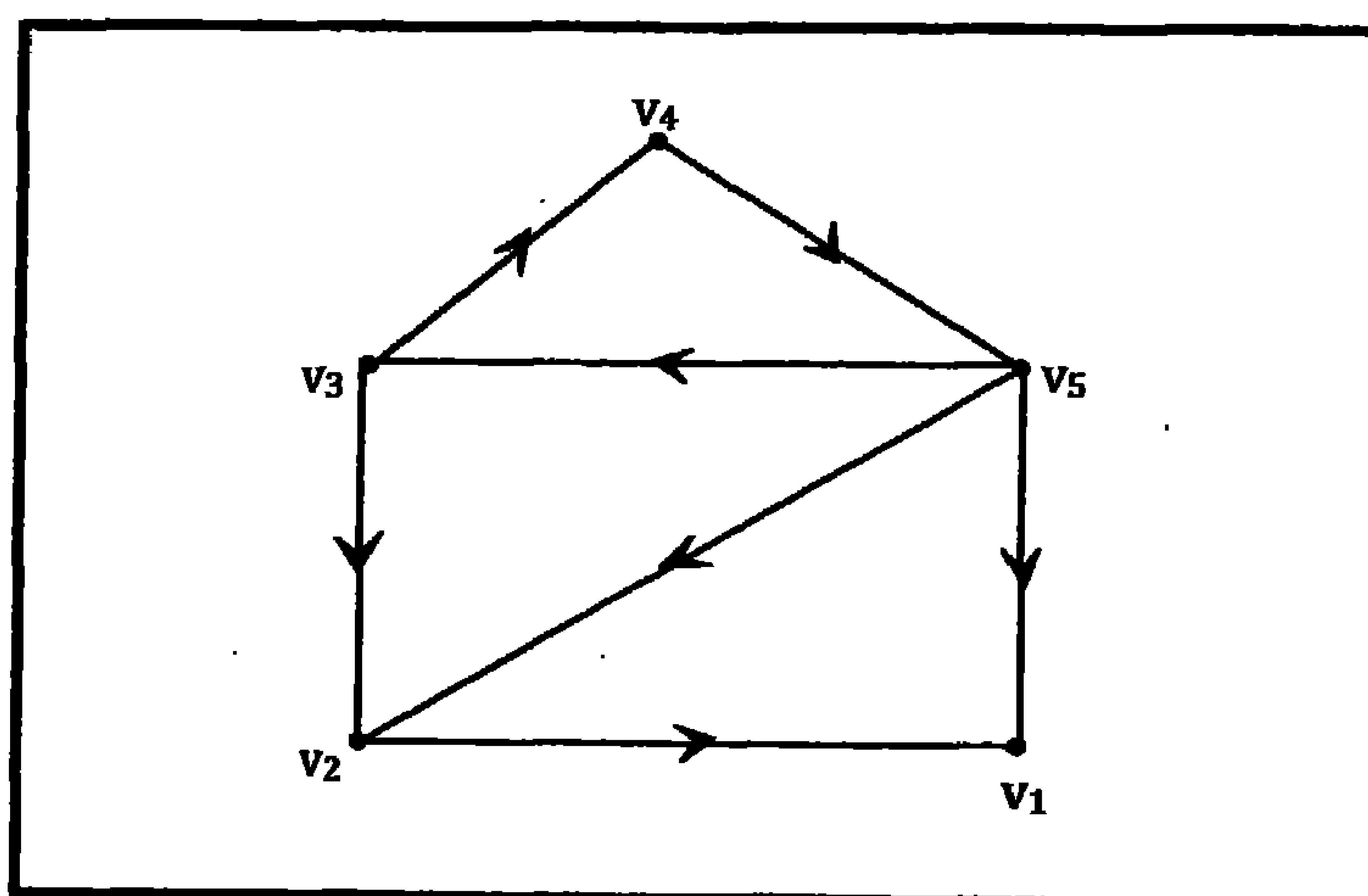
36. برهن أن المخططين التالين متشاكلين:

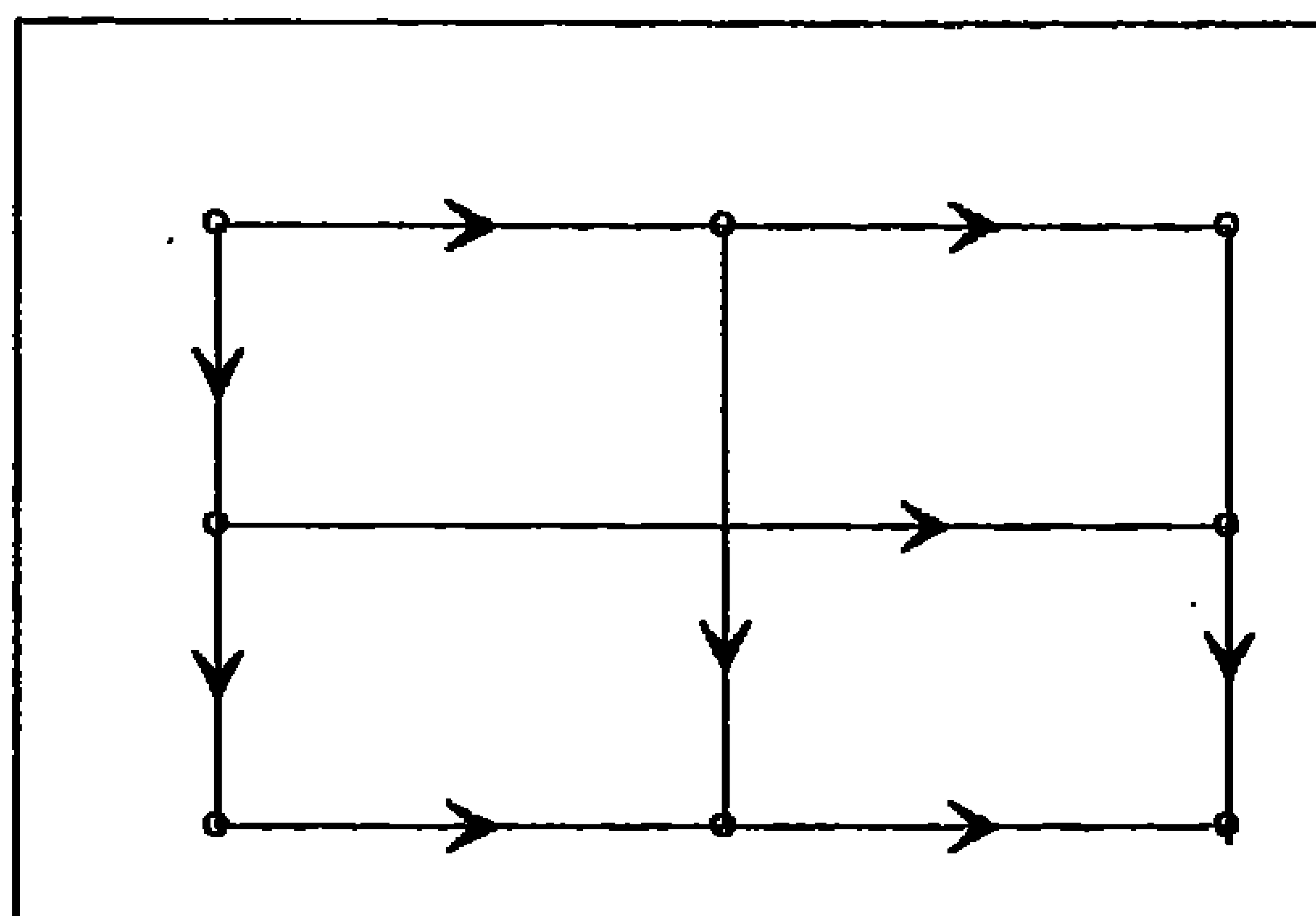


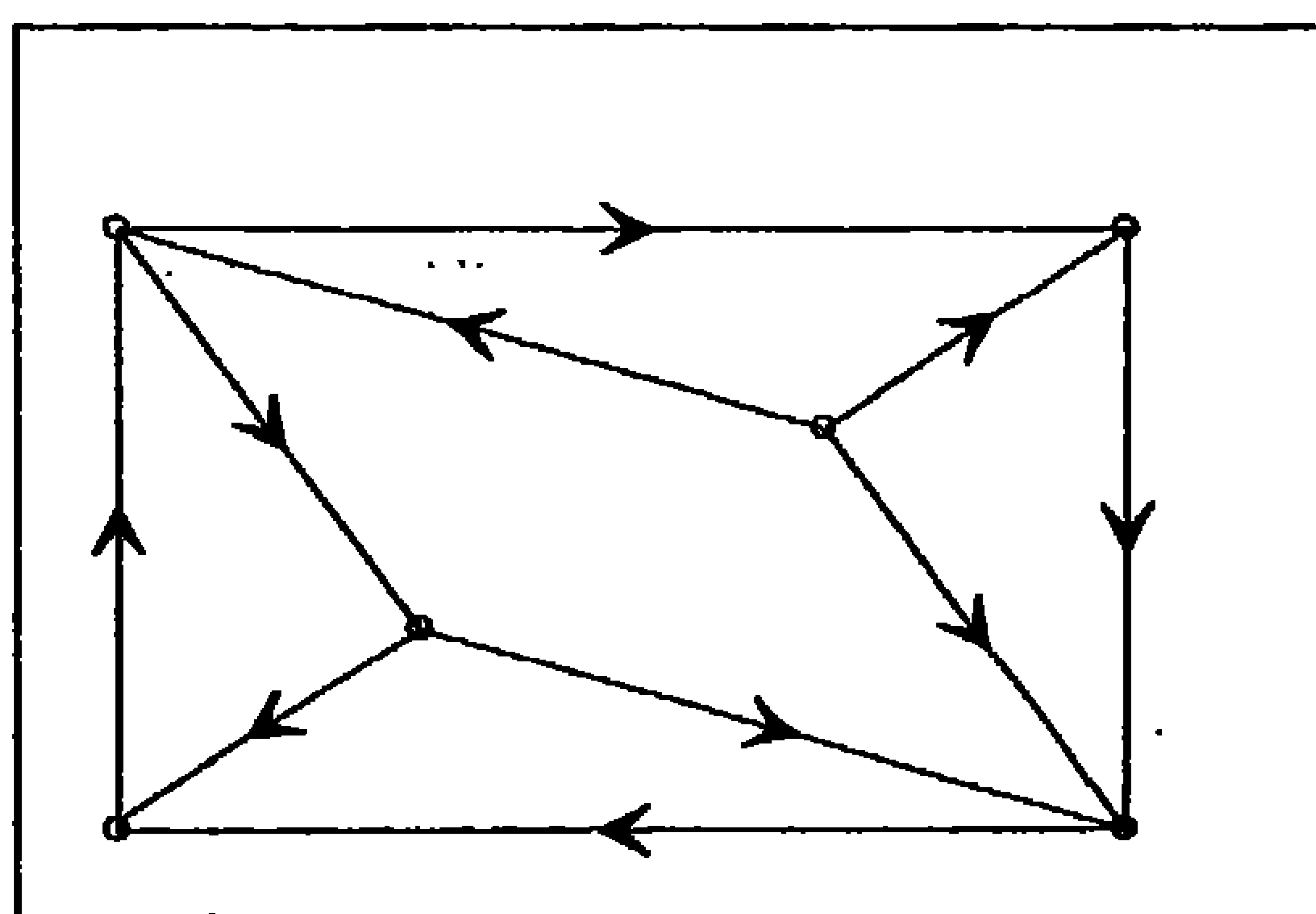
37. بإستخدام مصفوفة التجاور عبر عن المخطط التالي ثم إحسب درجات رؤوس المخطط:




v2
v3
v1
v4
v6
v5


v4
v3
v5
v2
v1





38. إرسم المخطط الذي له مصفوفة التجاور التالية:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

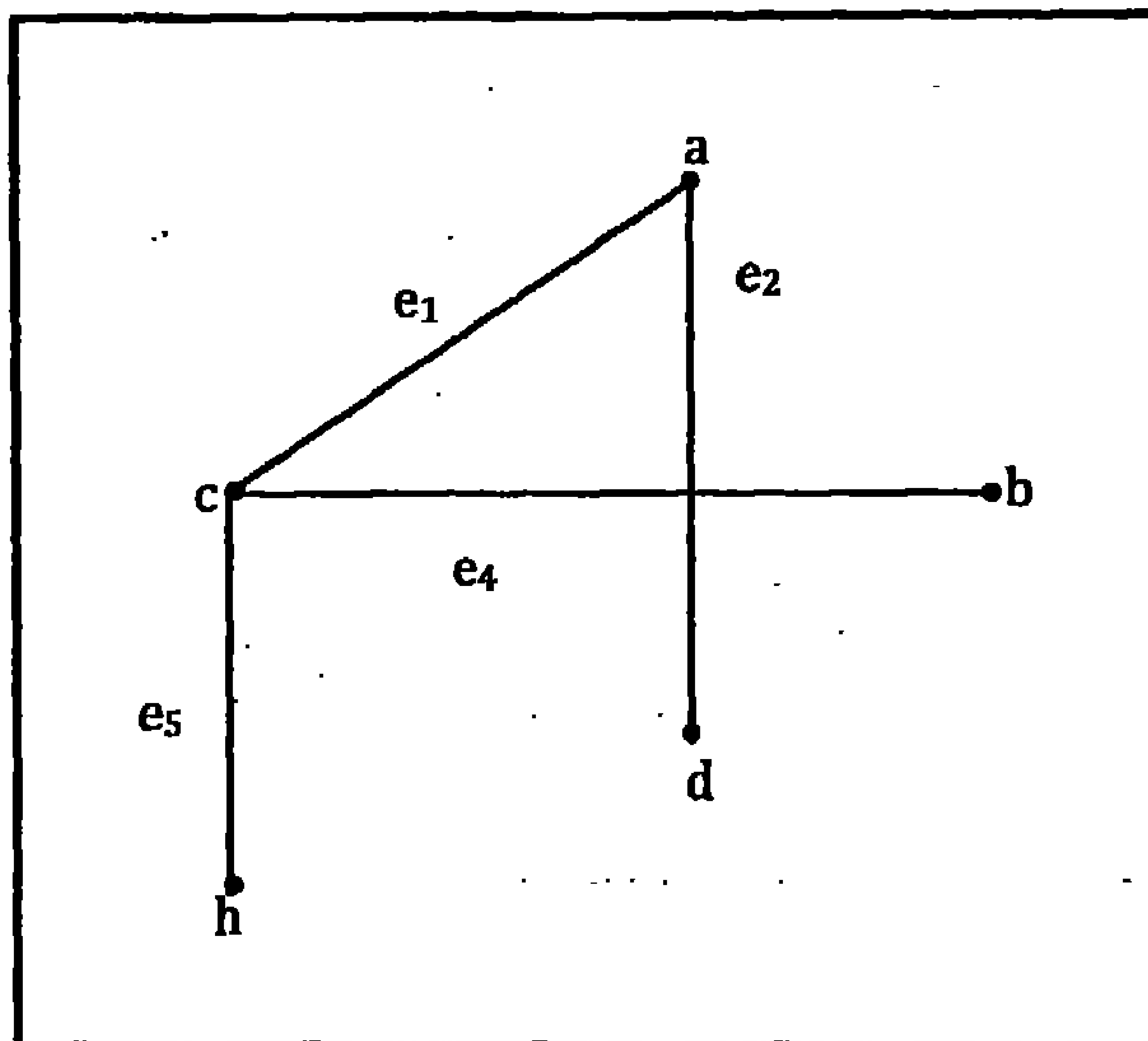
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

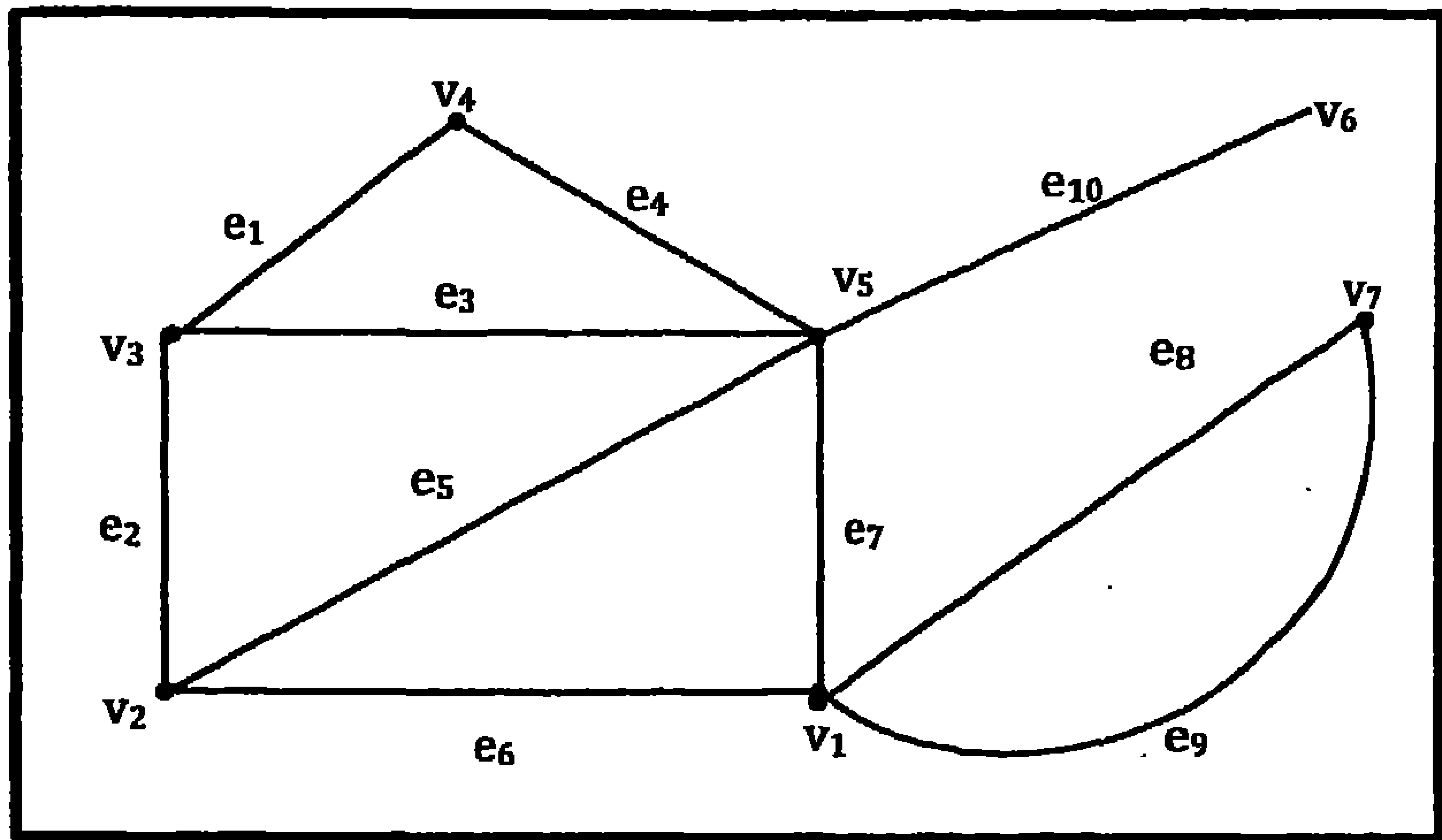
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

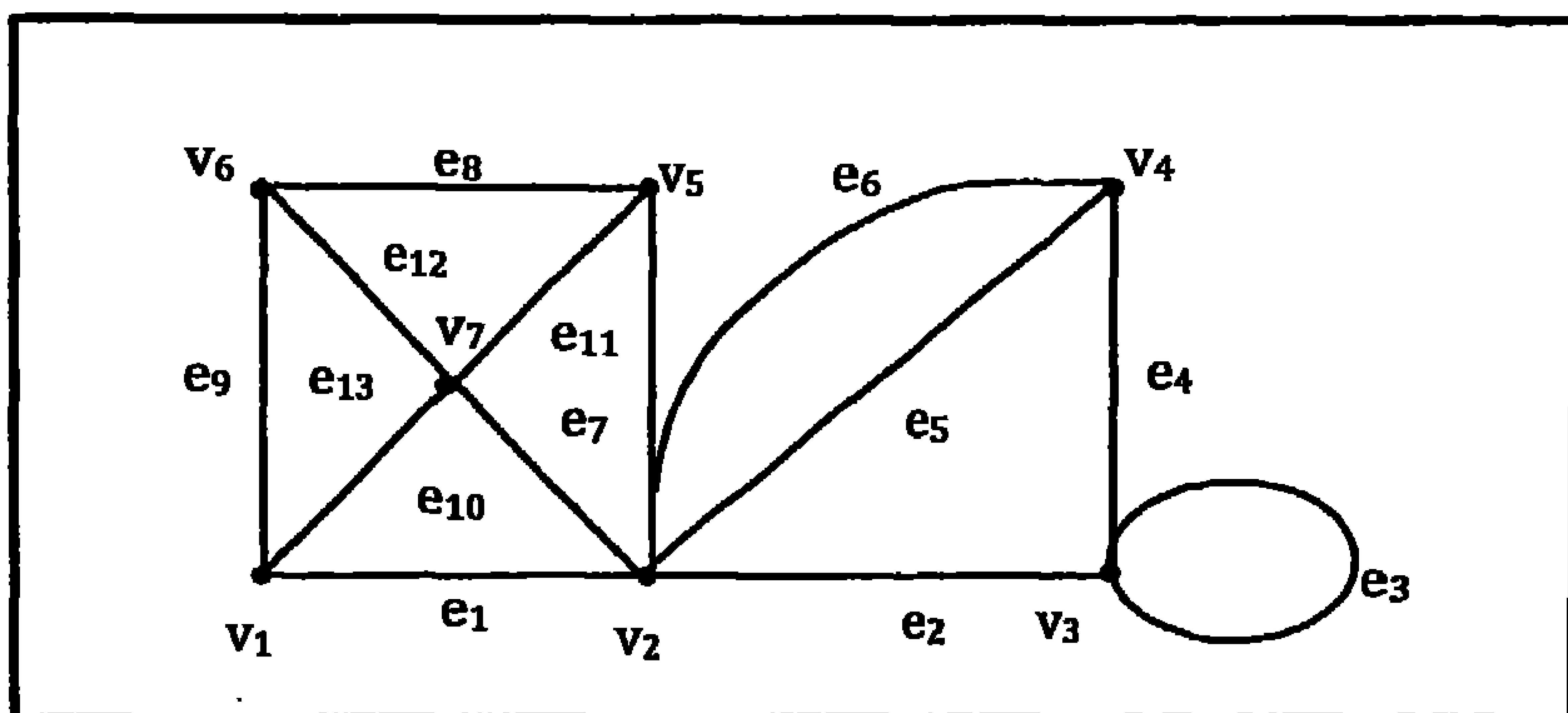
$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & a \\ 0 & d & a & 0 \end{bmatrix}$$

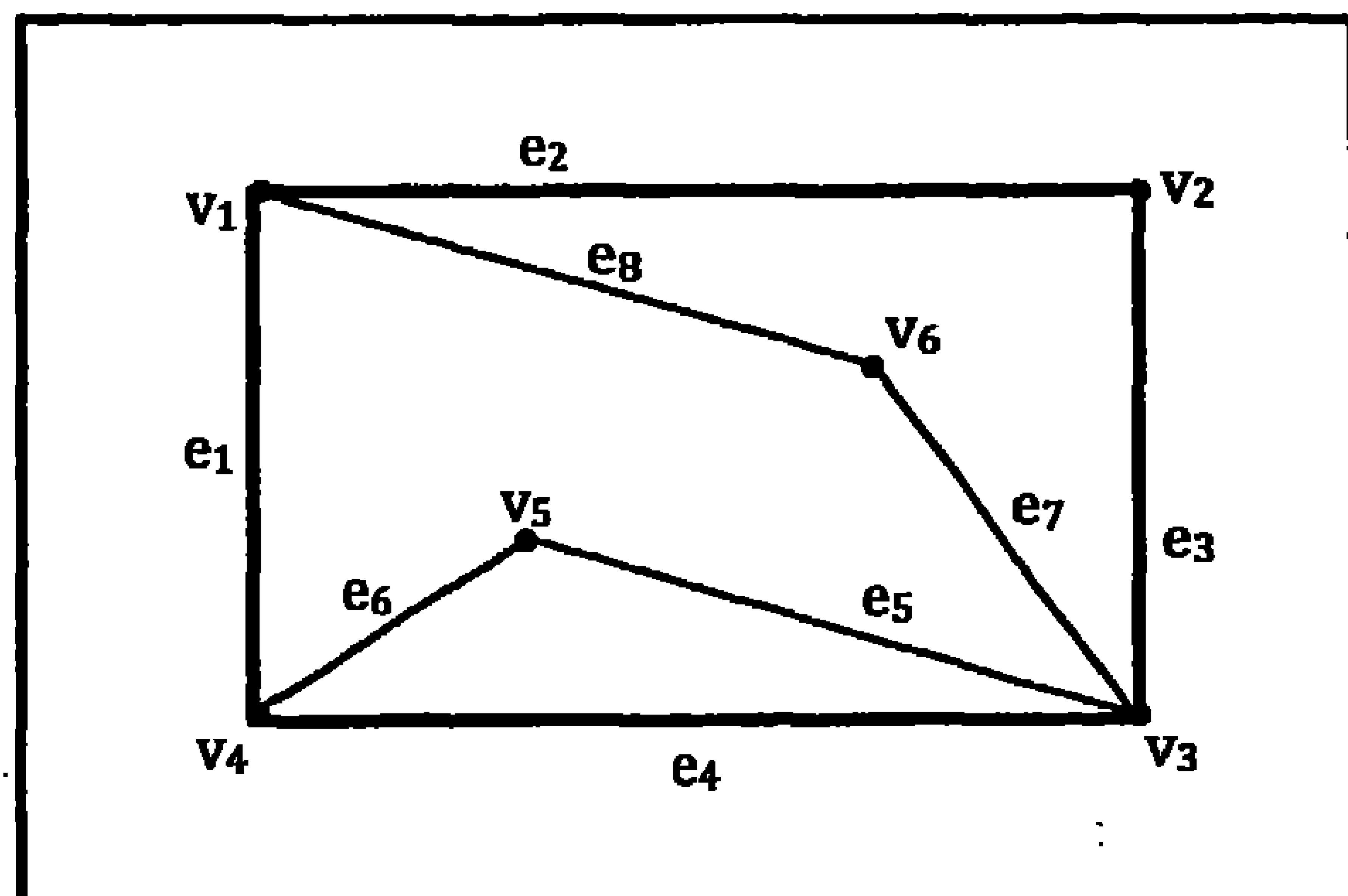
$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & c & b & 0 \end{bmatrix}$$

39. بإستخدام مصفوفة الوقوع عبر عن المخطط التالي:




v4
e1
e4
v6
e10
e3
v5
v7
v3
e8
e5
e2
e7
v2
e6
v1
e9


v6
e8
v5
e6
v4
e12
v7
e11
e9
e13
e4
e7
e5
e10
e3
v1
e1
v2
e2
v3


e2
v1
v2
e8
v6
e1
v5
e7
e3
e6
e5
v4
e4
v3

40. عبر عن التعبير الرياضي التالي بإستخدام مخطط الشجرة الثنائية:

- $(4 * 6) - (8 * 3) + 5$
- $(x * y) + z$
- $a \cap (b \cup c)$
- $(x + y) - [(x - y) + 5]$
- $[(4 * 6) - (8 + y)] + [5 + x]$

41. إذا كان لدينا القائمة العددية التالية:

$\{35, 50, 20, 25, 10, 40, 60, 70, 22, 17, 80\}$

فكون شجرة ثنائية مرتبة لهذه القائمة المعطاة.

42. إذا كان لدينا القائمة العددية التالية:

$\{50, 20, 25, 10, 40, 60, 22, 19, 55, 66, 22\}$

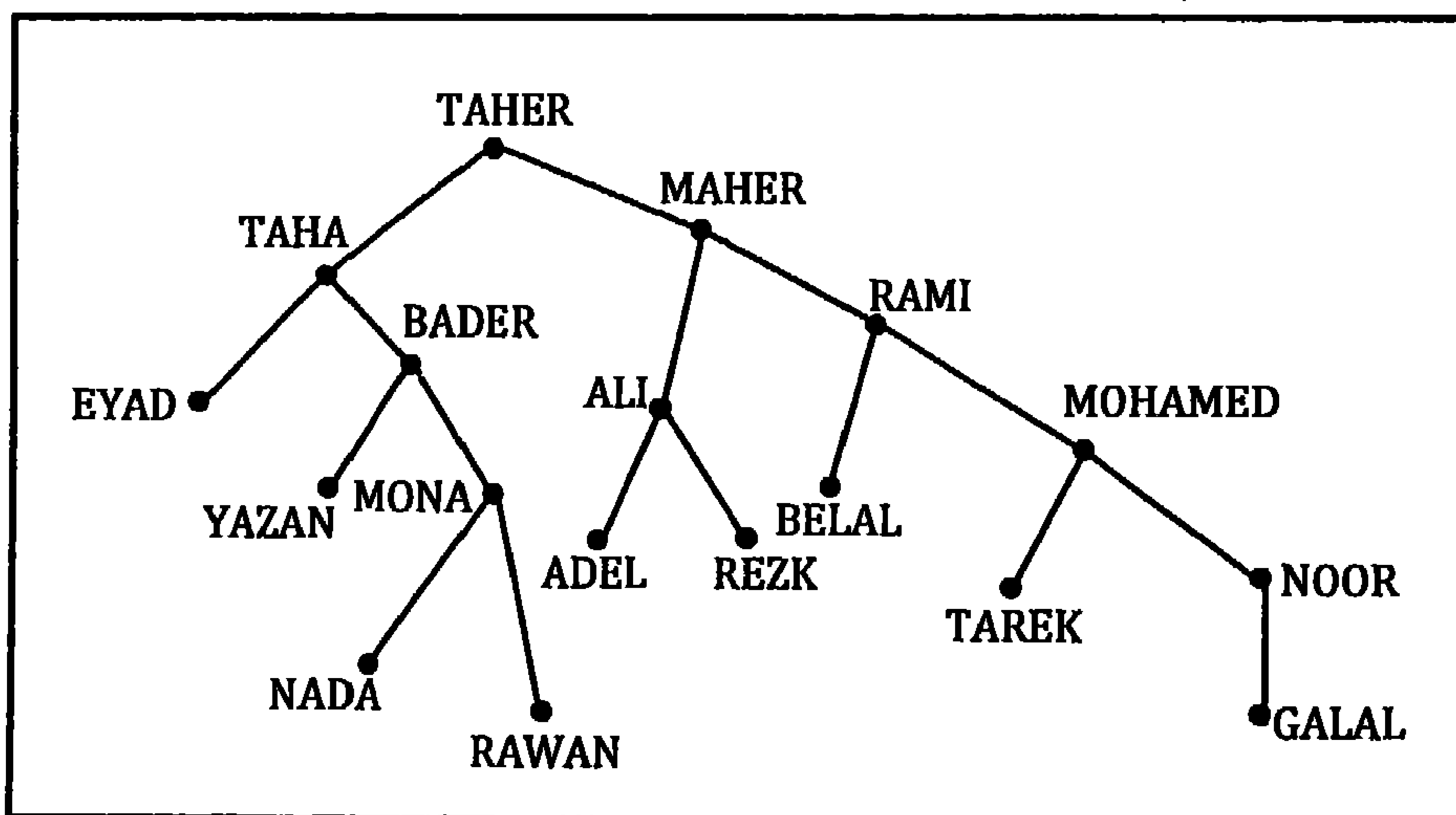
فكون شجرة ثنائية مرتبة لهذه القائمة المعطاة.

43. رتب بيانات مخطط الشجرة الثنائية التالية:

أولا: بإستخدام طريقة الترتيب السابق.

ثانيا: بإستخدام طريقة الترتيب الوسطى.

ثالثا: بإستخدام طريقة الترتيب اللاحق.



المراجع

المراجع العربية
المراجع الأجنبية

المراجع

المراجع العربية (Arabic References)

1. أبو بكر أحمد السيد، الرياضيات المتقطعة في علـم الحاسـوب ، ط1 ، دار حـنين للنشـر والتوزيع ،القاهرة ، مصر ، 2005 .
2. أحمد عايش عبدالله، نظرية المنطق والمجموعات، منشورات جامعة العلوم والتكنولوجيا- صنعاء، 1997 .
3. جاسم طعمة سرسوح، هياكل متقطعة، مطبعة دار الحكمة – جامعة البصرة ، 1992 .
4. سليم شفيق الأشهب، الرياضيات المنفصلة لطلبة العلوم والحاسوب، ط1-دار المنـاهج، عمان، الاردن، 2006.
5. عادل سودان، موفق دعبـول، نظريـة المجموعـات، مؤسسـة الرسـالة للطباعـة والنشـر، بيروت، لبنان، 1972.
6. عدنان عوض، أحمد علاونه، مفيد عزام، مبادئ الرياضيات، دار الفكر للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 1990.
7. عدنان عوض، تركـي سـعيد، رياضـيات منفصـلة، الشـركة العربيـة المتحـدة للتسـويق والتوريد، القاهرة، مصر، 2008 .
8. عزام صبري، التركيب الرياضية المنفصلة، عالم الكتب الحديث، أربد، الأردن، 2004 .
9. علي عزيز علي ،مقدمة في نظرية البيانـات ، وزارة التعليم العـالي ، بغـداد ، العـراق، 1982.
10. كامل فليفل، الرياضيات المنفصلة، ط1، دار حنين للنشـر والتوزيـع، القـاهرة ، مصـر، 1994.
11. محمد الصيرفي، رياضيات الحاسوب، دار الوفاء للنشر والتوزيـع، الإسـكندرية ، مصـر، 2007.

12. محمد كاظم البكاء ، الرياضيات المتقطعة في علم الحاسوب ، مكتبة الفلاح للنشر والتوزيع، الكويت، 2005.
13. محمود محمد كتكت، نظرية المجموعات، طبعة ثانية، دار الفرقان، عمان، الأردن، 1999.
14. مصباح جمعة عقل، محمد خليل ابو زلطة، زياد عبد الكريم القاضي، الرياضيات المنفصلة:التركيب المنفصلة، مكتبة المجتمع العربي ، عمان ، الأردن، 2009.
15. معروف عبدالرحمن سمحان، أحمد حميد شراري ، مبادئ الرياضيات المتقطعة، طبعة ثانية، جامعة الملك سعود، 2001 .

(English References) المراجع الاجنبية

1. Amanda Chetwynd, Peter Diggle, Discrete mathematics, Arnold, 1995.
2. Bernard Kolman, Robert Busby, Sharon C. Ross, Discrete Mathematical Structures, Edition 6, Prentice Hall, 2009.
3. D. S. Malik, M. K. Sen, Discrete Mathematical Structures: Theory And Applications, Edition 2, Course Technology Ptr, 2004.
4. David Noel Burghes, Ann Ault, Nigel Price, Peter Gwilliam, Discrete Mathematics, Edition 2, Pearson Education, 1994.
5. Douglas E. Ensley, J. Winston Crawley, Discrete Mathematics, Student Solutions Manual: Mathematical Reasoning and Proof with Puzzles, Patterns, and Games, Wiley, 2009
6. Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Discrete Mathematics With Graph Theory, Prentice Hall, 1998.
7. G. L. Ebert, R. D. Baker, Discrete Mathematics, Kendall/Hunt Publishing Company, 1999.
8. Harold S. Stone, Discrete mathematical structures and their applications, Science Research Associates, 1973.
9. Ian Anderson, A first course of discrete mathematics, Springer Verlag, 2001.
10. J. Dwyer & Suzy Jagger, Discrete Mathematics for Business & Computing, 1st ed. 2010.
11. J. Matousek, J. Nesetril, Invitation to Discrete Mathematics, Oxford University Press, USA; 2 edition, 2008.
12. James Andrew Anderson, Jerome L. Lewis, Discrete Mathematics With Combinatorics, Edition 2, Prentice Hall, 2004.
13. James Bradley, Introduction to discrete mathematics, Addison-Wesley Pub. Co., 1988.
14. Jerrold W. Grossman, Discrete mathematics: an introduction to concepts, methods, and applications, Macmillan, 1990.
15. John A. Dossey, Discrete Mathematics, Edition 4, Addison-Wesley, 2001.
16. John C., A First Course in Discrete Mathematics, Waveland Press, Inc., Edition 1, 1997.
17. Kenneth Rosen, Discrete Mathematics and its applications, 7th edition, McGraw-Hill Science, 2011.
18. Kevin Ferland, Discrete Mathematics: An Introduction to Proofs and Combinatorics, Brooks/Cole, 2009.
19. L. Gerstein, Discrete Mathematics and Algebraic Structures, New York: Freeman and Co., 1987.
20. L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, Discrete Mathematics: Elementary and Beyond, New York: Springer, 2003.
21. Lekh Rej Vermani, Shalini Vermani, A Course in Discrete Mathematical Structures, Imperial College Press, 2012.
22. M. K. Das, Discrete Mathematical Structures: For Computer Scientists and Engineers, Alpha Science, 2007.

23. Mario Benedicty, Frank R. Sledge, Discrete Mathematical Structures, H B/Holt/Saunders, 1987.
24. Michael O. Albertson, Joan P. Hutchinson, Discrete mathematics with algorithms, Wiley, 1988.
25. N. Iyengar, Discrete Mathematics, 1E, Vikas Publishing House Pvt Ltd, 2003.
26. Norman L. Biggs, Discrete mathematics, Oxford University Press, 2002.
27. Paul F. Dierker, William L. Voxman, Discrete mathematics, Harcourt Brace Jovanovich, 1986.
28. R. C. Penner, Discrete Mathematics, Proof Techniques, World Scientific, 1999.
29. R. P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics, An Applied Introduction, 5th edition, Pearson Addison-Wesley, 2003.
30. Richard Johnsonbaugh, Discrete Mathematics, Prentice Hall, 2008.
31. Rm. Somasundaram, Discrete Mathematical Structures, Prentice-Hall Of India Pvt. Limited, 2004.
32. Ronald E. Prather, Elements of discrete mathematics, Houghton Mifflin, 1986.
33. S. Barnett, Discrete mathematics: numbers and beyond, Addison Wesley, 1998.
34. S. K. Chakraborty, B. K. Sarkar, Discrete Mathematics, Oxford University Press, 2010.
35. Selvaraj Ranjethkumar, Manju Bargavi, Discrete Mathematics, Lambert Academic Publishing, 2011.
36. Sergeĭ Vsevolodovich IA͡blonskiĭ, Introduction to discrete mathematics, Mir Publishers, 1989.
37. Sherwood Washburn, Thomas Marlowe, Charles T. Ryan, Discrete Mathematics, Addison-Wesley, 2000.
38. Stephen A. Wiitala, Discrete mathematics: a unified approach, McGraw Hill, 1987.
39. Steven C. Althoen, Robert J. Bumcrot, Introduction to discrete mathematics, PWS-KENT Pub. Co., 1988.
40. Susanna S. Epp, Discrete Mathematics With Applications, Cengage Learning, 2010.
41. Tremblay, Discrete Mathematical Structure, McGraw-Hill Education (India) Pvt Limited, 2001.
42. Victoria Ossipova, Introduction to discrete mathematics: with complete software, World Federation Publishers Co., 1995.



دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo

الرياضيات المتقطعة

DISCRETE MATHEMATICS





دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة
شركة جمال أحمد محمد حيف وإخوانه
www.massira.jo